

净保费在平衡损失函数下的回归信度估计*

再努尔·木塔力甫, 吴黎军[†]

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830046)

摘要: 本文讨论了非寿险精算中的回归信度模型, 将回归模型嵌入到信度理论. 本模型考虑到通货膨胀, 刻画了净保费随时间的变化, 用矩阵论中的求逆公式以及投影公式推导出平衡损失函数下的净保费回归信度表达式, 推广了平方损失函数下的净保费回归信度模型.

关键词: 平衡损失函数; 回归信度; 净保费

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2019.11.15.0003

中图分类号: O211 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2021)01-0025-04

引文格式: 再努尔·木塔力甫, 吴黎军. 净保费在平衡损失函数下的回归信度估计[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2021, 38(1): 25-28.

英文引文格式: Zaynur Mutallip, WU L J. Regression credibility estimation of net premium under balanced loss function[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2021, 38(1): 25-28.

Regression Credibility Estimation of Net Premium under Balanced Loss Function

Zaynur Mutallip, WU Lijun

(School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830046, China)

Abstract: In this paper, we discussed the regression credibility model from non-life insurance actuarial. The regression model is embedded into the credibility theory. In this model, considering inflation, we characterize the change of net premium over time. Using the inverse formula and projection formula in matrix theory, we obtain the regression credibility premium expression of net premium under the balanced loss function. Therefore, the regression credibility model under the square loss function is generalized.

Key words: balanced loss function; regression credibility; net premium

0 引言

信度理论是非寿险精算学的核心内容之一, 是非寿险中的一组经验评估技术. 信度模型包括古典信度模型和最精确信度模型. 在古典信度模型中, 需要确定当历史索赔数据达到多大规模时, 才能够赋予完全的可信度, 而这个数据规模被称作为完全可信度标准, 如果经验数据达不到完全可信度标准就赋予部分可信度. 在实际操作中我们得到的索赔数据规模往往达不到完全可信度标准, 因此研究部分可信度的计算方法具有重要的实际意义. 自从信度理论提出以后, 许多学者对信度理论进行了研究. Bühlmann^[1]建立了无分布信度模型, 得到了信度保费公式. Bühlmann 和 Straub 在无分布信度模型的基础上, 将其推广至自然权重的情形. Hachemeister^[2]在利用 Bühlmann-Straub 信度模型对美国各州的汽车第三者责任险进行定价时, 注意到索赔数据在时间分量上由于通货膨胀的影响具有时间趋势效应, 因而提出用回归模型来刻画该时间效应, 并且建立了回归信度模型. 回归信度模型的刻画如下, 假设某一个风险合同对索赔 X 有下面的模型成立:

$$X_j = Y_j \beta(\Theta) + \varepsilon_j$$

这里 $j = 1, 2, \dots, t$, $X = (X_1, \dots, X_t)'$ 为索赔样本, Y_j 为已知的设计向量, 而 $\beta(\Theta)$ 为未知不可观测的随机系数向量, ε_i ($i = 1, 2, \dots, t$) 为随机误差项, 也是不可观测的, 且满足 $E(\varepsilon_j | \Theta) = 0$, 则风险参数 Θ 给定时有 $E(X_j | \Theta) = Y_j \beta(\Theta)$.

* 收稿日期: 2019-11-15

基金项目: 国家自然科学基金项目(11861064).

作者简介: 再努尔·木塔力甫(1986-), 女, 硕士生, 从事保险精算理论研究, E-mail: znmzjbl@126.com.

[†] 通讯作者: 吴黎军(1961-), 男, 教授, 从事精算数学和数学建模研究, Email: xjmath@xju.edu.cn.

经典信度理论中,用平方损失函数来刻画保费与风险的拟合程度.然而,在20世纪70年代前后,学者们注意到正误差与负误差引起的损失并不相同,他们认为某些情况对对称损失函数下所得出的估计会出现较高误差,于是非对称损失函数逐步得到重视.Zellner^[3]提出了一种新的衡量参数估计优良性的标准,从模型拟合度和估计的精度两个方面来综合衡量估计的好坏,所考虑的损失函数为

$$L(\hat{\theta}, \theta) = \frac{\omega}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\theta}) + (1 - \omega)(\theta - \hat{\theta})$$

作为 Zellner 平衡损失函数的推广,如下形式的平衡损失函数 $L_{\rho, \omega, \delta_0}(\theta, \delta) = \omega \rho(\delta_0, \delta) + (1 - \omega) \rho(\theta, \delta)$ 受到了很多关注,这里 δ_0 是 θ 的预想目标估计,它可以是 θ 的极大似然估计或者最小二乘估计或者无偏估计等.在精算学的领域, Gómez-Déniz^[4] 则讨论了经典的 Bühlmann 信度模型在平衡损失函数下信度保费及其性质.国内学者^[5-10]用平衡损失函数研究了信度估计模型.本文将用平衡损失函数得出单份保单净保费的信度回归估计表达式.

1 预备知识及假设

设 Θ 为未知的风险参数, $X' = (X_1, X_2, \dots, X_t)$ 为某保单在 t 年的观测数据.本文估计的是,当风险 Θ 给定时, X_j 的条件期望为 $\mu_j(\Theta)$, 这里 $\mu_j(\Theta) = E(X_j | \Theta)$ 是风险参数 Θ 下保单在第 j 年的净保费, $j = 1, 2, \dots, t$. 考虑到通货膨胀, 回归假设中净保费 $\mu_j(\Theta)$ 随时间发生变化, 且

$$\mu_j(\Theta) = E(X_j | \Theta) = Y_j' \beta(\Theta), \quad j = 1, 2, \dots, t.$$

Y_j 为 $(q \times 1)$ 设计矩阵, $\beta(\Theta)$ 为未知 $(q \times 1)$ 随机向量. 通过选择合适的设计矩阵 Y_j , 可以刻画时间对净保费的影响. 比如, 若 Y_j 是 (2×1) 矩阵且 $Y_j = \begin{pmatrix} 1 & j \end{pmatrix}'$, 则 $\mu_j(\Theta) = \beta_1(\Theta) + j\beta_2(\Theta)$ ($j = 1, 2, \dots, t$), $\beta(\Theta) = (\beta_1(\Theta), \beta_2(\Theta))'$. 若 $Y_j = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \end{pmatrix}'$, 则 $\mu_j(\Theta) = \beta_1(\Theta) + j\beta_2(\Theta) + j^2\beta_3(\Theta)$ ($j = 1, 2, \dots, t$), $\beta(\Theta) = (\beta_1(\Theta), \beta_2(\Theta), \beta_3(\Theta))'$. 下面介绍本文假设.

假设 1 设 $\mu_j(\Theta) = E(X_j | \Theta) = Y_j' \beta(\Theta)$, $j = 1, 2, \dots, t$, $E[\beta(\Theta)] = \beta_0$.

假设 2 设矩阵 $\Lambda = \Lambda^{(q, q)} = \text{Cov}[\beta(\Theta)]$, $\Phi = \Phi^{(t, t)} = E[\text{Cov}(X | \Theta)]$ 是正定矩阵 (Λ 是回归系数向量 $\beta(\Theta)$ 的协方差, Φ 是 Θ 给定时观测数据 X 的条件协方差的期望).

本文根据已知观测 $X' = (X_1, X_2, \dots, X_t)$ 得出净保费 $\mu_j(\Theta)$ 在平衡损失函数下的估计 $\tilde{\mu}_j$ 的表达式.

2 平衡损失函数下的净保费回归信度估计

首先给出线性代数中满足特殊条件的矩阵的求逆公式.

引理 1 设矩阵 A 是 $(r \times s)$ 矩阵, B 是 $(s \times r)$ 矩阵且 $(I + AB)^{-1}$ 存在, 那么有如下求逆公式:

$$(I + AB)^{-1} = I - A(I + BA)^{-1}B,$$

其中: I 表示 $(r \times r)$ 单位矩阵.

证明 线性代数中的求逆公式 $(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$, 取 $A = D = I, B = A, C = B$ 就可得出以上公式.

信度保费用样本的线性函数预测未来保费, 使得期望平方损失函数达到最小, 求解下面的最优化问题:

$$\min_{r_0, r_j \in R} E[(\mu_j(\Theta) - r_0 - \sum_{i=1}^t r_i X_i)^2].$$

下面的引理可以更方便地求信度估计, 其证明可参考文献[11].

引理 2 设随机向量 $\begin{pmatrix} X_{p \times 1} \\ Y_{q \times 1} \end{pmatrix}$ 的期望与协方差矩阵分别为

$$\begin{pmatrix} EX \\ EY \end{pmatrix} \text{ 与 } \begin{pmatrix} \Sigma_{XX} & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{YX} & \Sigma_{YY} \end{pmatrix},$$

则当 $A = EY - \Sigma_{YX} \Sigma_{XX}^{-1} EX, B = \Sigma_{YX} \Sigma_{XX}^{-1}$ 时, 期望损失

$$E(Y - A - BX)(Y - A - BX)',$$

在矩阵的非负定意义下达到最小.

根据引理, 基于随机向量 X 的非齐次函数类的随机向量 Y 的最优预测为

$$\text{proj}(Y | L(X, 1)) = EY + \Sigma_{YX} \Sigma_{XX}^{-1} (X - EX),$$

其中: $\text{proj}(Y | L(X, 1))$ 表示 Y 在 X 的线性函数空间的正交投影.

取损失函数为平衡损失函数:

$$L = \omega [\delta(\mu_j(\Theta)) - r_0 - \sum_{i=1}^t r_i X_i]^2 + (1 - \omega) [\mu_j(\Theta) - r_0 - \sum_{i=1}^t r_j X_i]^2,$$

其中: $\delta(\mu_j(\Theta))$ 是 $\mu_j(\Theta)$ 的已知目标估计. 平衡损失函数下估计净保费等价于求解下面的最优化问题:

$$\min_{r_0, r_1 \in R} E\{\omega [\delta(\mu_j(\Theta)) - r_0 - \sum_{i=1}^t r_i X_i]^2 + (1 - \omega) [\mu_j(\Theta) - r_0 - \sum_{i=1}^t r_i X_i]^2\}.$$

关于平衡损失函数下的信度理论有下面的引理 3.

引理3 在平衡损失函数

$$L = \omega [\delta(\mu_j(\Theta)) - r_0 - \sum_{i=1}^t r_i X_i]^2 + (1 - \omega) [\mu_j(\Theta) - r_0 - \sum_{i=1}^t r_i X_i]^2$$

下, $\mu_j(\Theta)$ 的非齐次信度估计为

$$\tilde{\mu}_j = \omega \text{proj}[\delta(\mu_j(\Theta)) | L(X, 1)] + (1 - \omega) \text{proj}[\mu_j(\Theta) | L(X, 1)],$$

其证明可参考文献[6].

下面给出 $\mu_j(\Theta)$ 在平衡损失函数下的回归信度估计. 令 $\delta(\mu_j(\Theta)) = Y_j' \delta(\beta(\Theta))$, 其中 $\delta(\beta(\Theta))$ 是 $\beta(\Theta)$ 的已知目标估计, 设 $E[\delta(\beta(\Theta))] = \mu_\delta$, $\text{Cov}[\delta(\beta(\Theta)), \beta(\Theta)] = \Delta$, 则 $\text{Cov}[\delta(\mu_j(\Theta)), X] = Y_j' \Delta Y$.

定理 1 基于以上假设及引理, 在平衡损失函数下净保费 $\mu_j(\Theta)$ 的估计 $\tilde{\mu}_j$ 如下:

$$\tilde{\mu}_j = Y_j' [Z_{j1} \hat{\beta} + Z_{j2} \beta_0 + (I - Z_{j1} - Z_{j2}) \mu_\delta],$$

其中

$$\begin{aligned} Z_{j1} &= (1 - \omega) \Lambda Y' \Phi^{-1} Y (I + \Lambda Y' \Phi^{-1} Y)^{-1} + \omega \Delta Y' \Phi^{-1} Y (I + \Lambda Y' \Phi^{-1} Y)^{-1}, \\ Z_{j2} &= (1 - \omega) [I - \Lambda Y' \Phi^{-1} Y (I + \Lambda Y' \Phi^{-1} Y)^{-1}] - \omega \Delta Y' \Phi^{-1} Y (I + \Lambda Y' \Phi^{-1} Y)^{-1}, \\ \hat{\beta} &= (Y' \Phi^{-1} Y)^{-1} Y' \Phi^{-1} X. \end{aligned}$$

证明 由假设1, 假设2可得 $\text{Cov}(X) = \Phi + Y \Lambda Y'$, $\text{Cov}[\mu_j(\Theta), X'] = Y_j' \Lambda Y'$. 由引理 3 可得

$$\tilde{\mu}_j = (1 - \omega) \text{proj}[\mu_j(\Theta) | L(X, 1)] + \omega \text{proj}[\delta(\mu_j(\Theta)) | L(X, 1)],$$

而根据引理 1 和引理2 有

$$\begin{aligned} \text{proj}[\delta(\mu_j(\Theta)) | L(X, 1)] &= E[\delta(\mu_j(\Theta))] + \text{Cov}[\delta(\mu_j(\Theta)), X'] \text{Cov}(X, X)^{-1} (X - EX) \\ &= Y_j' \mu_\delta + Y_j' \Delta Y' (\Phi + Y \Lambda Y')^{-1} (X - Y \beta_0) \\ &= Y_j' \mu_\delta + Y_j' \Delta Y' (I + \Phi^{-1} Y \Lambda Y')^{-1} \Phi^{-1} (X - Y \beta_0) \\ &= Y_j' \mu_\delta + Y_j' \Delta Y' [I - \Phi^{-1} Y \Lambda (I + Y' \Phi^{-1} Y \Lambda)^{-1} Y'] \Phi^{-1} (X - Y \beta_0) \\ &= Y_j' \mu_\delta + Y_j' \Delta [I - Y' \Phi^{-1} Y \Lambda (I + Y' \Phi^{-1} Y \Lambda)^{-1}] Y' \Phi^{-1} (X - Y \beta_0) \\ &= Y_j' \mu_\delta + Y_j' \Delta Y' \Phi^{-1} Y [I - \Lambda (I + Y' \Phi^{-1} Y \Lambda)^{-1} Y' \Phi^{-1} Y] (Y' \Phi^{-1} Y)^{-1} Y' \Phi^{-1} (X - Y \beta_0) \\ &= Y_j' \mu_\delta + Y_j' \Delta Y' \Phi^{-1} Y (I + \Lambda Y' \Phi^{-1} Y)^{-1} \hat{\beta} - Y_j' \Delta Y' \Phi^{-1} Y (I + \Lambda Y' \Phi^{-1} Y)^{-1} \beta_0, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
 \text{proj}[\mu_j(\Theta)|L(X, 1)] &= E[\mu_j(\Theta)] + \text{Cov}[\mu_j(\Theta), X']\text{Cov}(X, X)^{-1}(X - EX) \\
 &= Y_j'\beta_0 + Y_j'\Lambda Y'(\Phi + Y\Lambda Y')^{-1}(X - Y\beta_0) \\
 &= Y_j'\beta_0 + Y_j'\Lambda Y'(I + \Phi^{-1}Y\Lambda Y')^{-1}\Phi^{-1}(X - Y\beta_0) \\
 &= Y_j'\beta_0 + Y_j'\Lambda Y'[I - \Phi^{-1}Y\Lambda(I + Y'\Phi^{-1}Y\Lambda)^{-1}Y']\Phi^{-1}(X - Y\beta_0) \\
 &= Y_j'\beta_0 + Y_j'\Lambda Y'\Phi^{-1}Y(I + \Lambda Y'\Phi^{-1}Y)^{-1}(Y'\Phi^{-1}Y)^{-1}Y'\Phi^{-1}(X - Y\beta_0) \\
 &= Y_j'\{[I - \Lambda Y'\Phi^{-1}Y(I + \Lambda Y'\Phi^{-1}Y)^{-1}]\beta_0 + \Lambda Y'\Phi^{-1}Y(I + \Lambda Y'\Phi^{-1}Y)^{-1}\hat{\beta}\},
 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mu}_j &= Y_j'\{\omega I\mu_\delta + [(1-\omega)\Lambda Y'\Phi^{-1}Y(I + \Lambda Y'\Phi^{-1}Y)^{-1} + \omega\Delta Y'\Phi^{-1}Y(I + \Lambda Y'\Phi^{-1}Y)^{-1}]\hat{\beta} + \\
 &\quad (1-\omega)[I - \Lambda Y'\Phi^{-1}Y(I + \Lambda Y'\Phi^{-1}Y)^{-1} - \omega\Delta Y'\Phi^{-1}Y(I + \Lambda Y'\Phi^{-1}Y)^{-1}]\beta\} \\
 &= Y_j'[Z_{j1}\hat{\beta} + Z_{j2}\beta_0 + (I - Z_{j1} - Z_{j2})\mu_\delta].
 \end{aligned}$$

定理得证.

3 结论

本文用投影公式和矩阵理论讨论了回归信度模型, 推出平衡损失函数下的净保费回归信度表达式, 推广了平方损失函数下的净保费回归信度模型. 本文中刻画了时间对净保费的影响, 用观测数据的线性函数估计了净保费, 推导过程中用到了求逆公式的特殊形式, 使得模型的推导更加简洁.

参考文献:

- [1] BÜHLMANN H. Experience rating and credibility[J]. *Astin Bulletin*, 1967, 5(2): 199-207.
- [2] HACHEMEISTER C A. Credibility for regression models with application to trend[M]. New York: Academic Press, 1975.
- [3] ZELLNER A. Bayesian and Non-Bayesian estimation using balanced loss functions[C]. New York: Springer-Verlag, *Statistical decision theory and Related Topics V*, 1994: 337-390.
- [4] GÓMEZ-DÉNIZ E. A generalization of the credibility theory obtained by using the weighted balanced loss function[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2008, 42: 850-854.
- [5] 温利民, 林霞, 王静龙. 平衡损失函数下的信度模型[J]. *应用概率统计*, 2009, 25(5): 553-560.
WEN L M, LIN X, WANG J L. The credibility model under balance loss fuction[J]. *Chinese Journal of Applied Probability and Statistics*, 2009, 25(5): 553-560. (in Chinese)
- [6] 黄维忠. 平衡损失函数下风险相依回归信度模型[J]. *华东师范大学学报(自然科学版)*, 2013(1): 30-40.
HUANG W Z. Regression credibility model with correlation risk under balanced loss function[J]. *Journal of East Normal University(Natural Science)*, 2013(1): 30-40. (in Chinese)
- [7] 黄维忠, 吴贤毅. 平衡损失函数下具有共同效应的信度保费[J]. *应用概率统计*, 2012, 28(2): 203-216.
HUANG W Z, WU X Y. The credibility premiums with common effects under balanced loss function[J]. *Chinese Journal of Applied Probability and Statistics*, 2012, 28(2): 203-216. (in Chinese)
- [8] ZHANG Q, WU L, CUI Q. The balanced credibility estimators with correlation risk and inflation factor[J]. *Statistical Papers*, 2015. DOI: 10.1007/s00362-015-0719-6.
- [9] ZHANG Q, CHEN P. Credibility estimators with dependence structure over risks and time under balanced loss function[J]. *Stata Neerlandica*, 2018, 72: 153-179.
- [10] 腾叶, 吴黎军. 平衡损失函数下的双相依信度估计[J]. *统计与决策*, 2015(6): 13-17.
TENG Y, WU L J. The crdibility estimation of double dependence under the balanced loss function[J]. *Statistics and Decision*, 2015(6): 13-17. (in Chinese)
- [11] WEN L, WU X, ZHOU X. The credibility premiums for models with dependence induced by common effects[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2009, 44: 19-25.

责任编辑: 赵新科