图的圈边连通度和圈弧连通度*

朱虹州, 孟吉翔†

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830046)

摘 要: 令G是一个简单图. G的圈边连通度$c\lambda(G)$定义为$E(G)$的一个子集F的最小基数, 其中$G-F$不连通且至少有两个分支包含圈. 令D是一个有向图. D的圈弧连通度$\lambda_c(D)$定义为$A(D)$的一个子集S的最小基数, 其中$D-S$不强连通且至少有两个强连通分支包含有向圈. 在文章中, 我们研究了无向二元Kautz图、无向de Bruijn图和无向二元广义de Bruijn图的圈边连通度. 而且, 我们获得了Kautz有向图、de Bruijn有向图和广义de Bruijn图的圈弧连通度.

关键词: 圈边连通度; 圈弧连通度; de Bruijn图; Kautz图; 广义de Bruijn图

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2020.12.10.0001

中图分类号: O157.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2021)06-0655-010

引文格式: 朱虹州, 孟吉翔. 图的圈边连通度和圈弧连通度[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2021, 38(6): 655-664.

0 概 念

令$G=(V(G),E(G))$是一个简单图, F是G中的边集, 如果$G-F$不连通且至少有两个分支包含圈, 那么称F是G的一个圈边割. 显然, G有圈边割当且仅当如果G有两个可分圈. 如果G有一个圈边割, 那么称G是圈可分的. 对于一个圈可分图G, 圈边连通度$c\lambda(G)$定义为所有圈边割的最小基数[1]. 如果G不是圈可分的, 那么$c\lambda(G)=\infty$.

对于有向图D, 如果D包含两个点不交的有向圈, 则称D是圈可分的. 令D是一个圈可分有向图, $S\subseteq A(D)$, 如果$D-S$至少有两个强连通分支包含有向圈, 那么称S是D的一个圈弧割. 对于一个圈可分有向图D, 圈弧连通度$\lambda_c(D)$定义为所有圈弧割的最小基数[2]. 如果D不是圈可分的, 那么$\lambda c(D)=\infty$. 圈边(弧)连通度的概念可以追溯到1880年Tait著名的错误猜想[3], 该猜想声称每一个3− 连通的三正则平面图都是哈密顿的, 从而证明了四色猜想. 此后, 圈边(弧)连通度被广泛应用于许多经典的图论领域, 如平面图[4], 整数流猜想[5]等. 最近, Zhang和Zhu[2]研究了$\lambda c(D_1\times D_2)$(其中D_1和D_2是强连通有向图), $\lambda c(C_{n_1}\times C_{n_2}\times\cdots\times C_{n_k})$, C_{n_i}是一个长度为n_i $(1\le i\le k)$的有向圈, Wang和Zhang[6]得到了任意圈可分图的圈边连通度的上界. 关于圈连通度的更多结果可参阅文献[7-9].

在文章中, 我们研究了Kautz图、de Bruijn图和广义de Bruijn图的圈边(弧)连通度.

1 准备工作

给定正整数n和d. Kautz有向图[10], 记为$K(d,n)$ $(d\ge1,n\ge1)$, 其中$V(K(d,n))=\{x_1x_2\cdots x_n: x_i\in\{0,1,\cdots,d\}, x_{i+1}\neq x_i,\ i\in\{1,2,\cdots,n-1\}\}$, 而且对$x,y\in V(K(d,n))$, $x=x_1x_2\cdots x_n$指向$y=y_1y_2\cdots y_n$当且仅当对于$i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$满足$x_{i+1}=y_i$. 显然, $K(d,1)$是顶点数为$d+1$的完全有向图. Kautz有向图$K(2,2)$见图1.

无向Kautz图$UK(d,n)$[11]是$K(d,n)$去掉边的定向及由此产生的重边而得到的简单图. 当$d=2$, 无向Kautz图$UK(2,n)$被称为无向二元Kautz图. 无向Kautz图$UK(2,2)$见图2. 对于$d\ge2$, $n\ge2$, $UK(d,n)$的最小度为$2d-1$. 显然, $|V(UK(d,n))|=d^n+d^{n-1}$. $K(d,n)$中的一对弧称为是对称的, 如果它们有相同的顶点而方向不同. 若(x,y)和(y,x)是一对对称弧, 为了方便起见, 我们也称它们中的一条弧为对称弧. $UK(d,n)$中的一条边称为是奇异的, 如果这条边对应着$K(d,n)$ 中的一对对称弧. 易知$UK(d,n)$ 中有$\binom{d+1}{2}$ 奇异边. 关于Kautz有向图和无向Kautz 图的更多结果可参阅文献[10-12].

* 收稿日期: 2020-12-10
基金项目: 新疆维吾尔自治区应用数学重点实验室开放课题(2020D04046).
作者简介: 朱虹州(1997-), 男, 硕士生, 从事图论及其应用研究.
† 通讯作者: 孟吉翔, 男, 博士, 教授, E-mail: mjxxju@sina.com.

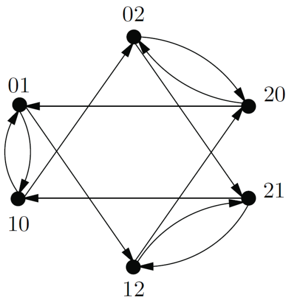

图 1　Kautz有向图$K(2,2)$

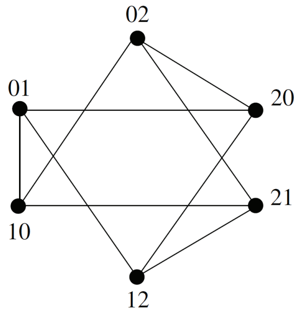

图 2　无向Kautz图$UK(2,2)$

de Bruijn有向图[10]，记为$B(d,n)$ $(d\geq 2,\ n\geq 2)$，其中$V(B(d,n))=\{x_1x_2\cdots x_n: x_i\in\{0,1,\cdots,d-1\},\ i\in\{1,2,\cdots,n\}\}$，对于$x,y\in V(B(d,n))$，$x=x_1x_2\cdots x_n$指向$y=y_1y_2\cdots y_n$当且仅当对于$i\in\{1,2,\cdots,n-1\}$满足$x_{i+1}=y_i$. de Bruijn有向图$B(2,2)$见图3. 无向de Bruijn图$UB(d,n)$[13]是$B(d,n)$去掉自环和边的定向及由此产生的重边而得到的简单图. 显然，对于$n\geq 2$，Kautz有向图$K(d,n)$是$B(d{+}1,n)$去掉所有对于某个i满足$x_i=x_{i+1}$的点$x_1x_2\cdots x_n$得到的. 无向de Bruijn图$UB(2,2)$见图4. 关于de Bruijn图和无向de Bruijn图的更多结果可参阅文献[10,13,14].

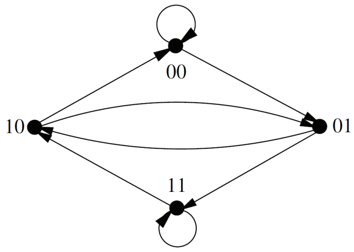

图 3　De Bruijn有向图$B(2,2)$

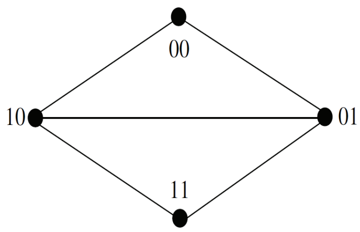

图 4　无向de Bruijn图$UB(2,2)$

广义de Bruijn有向图$B_G(d,n)$ $(d<n)$[10]有顶点集$V=\{0,1,\cdots,n-1\}$和弧集$\{(x,y)\mid y\equiv dx+k \pmod n$, 其中 $x\in\{0,1,\cdots,n{-}1\}$, $k\in\{0,1,\cdots,d{-}1\}\}$. 广义de Bruijn有向图$B_G(2,5)$见图5. 无向广义de Bruijn图$UB_G(d,n)$[15]是$B_G(d,n)$去掉自环和边的定向及由此产生的重边而得到的简单图. 当$d=2$, 无向广义de Bruijn图$UB_G(2,n)$称为无向二元广义de Bruijn图. 无向广义de Bruijn图$UB_G(2,5)$见图6. 关联着自环的顶点称为平凡点. 显然，0和$n-1$是$UB_G(d,n)$中的两个平凡点. 如果对两个不同顶点x和y, 且(x,y)和(y,x)都是$B_G(d,n)$的弧, 则称x和y是交替点. 关于广义de Bruijn有向图和无向广义de Bruijn图的更多结果可参阅文献[10,15,16].

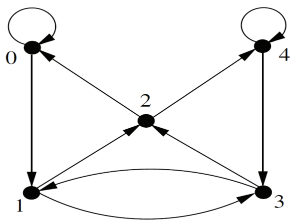

图 5　广义de Bruijn有向图$B_G(2,5)$

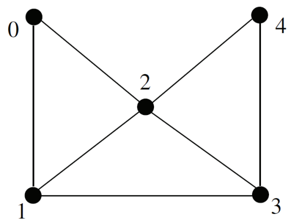

图 6　无向广义de Bruijn图$UB_G(2,5)$

对于这里没有提到的术语和符号, 可参阅文献[17]. 令D是一个有向图. 对于顶点x和$V(D)$的子集H, $A^+(x)=\{(x,y)\in A(D)|\ y\in V(D)\}$和$A^+(H)=\{(x,y)\in A(D)|\ x\in H, y\in V(D-H)\}$. 令$G$是一个无向图. 对于顶点$x$和$V(G)$的子集$H$, $S(x)=\{xy\mid y$是x的邻点$\}$和$S(H)=\{xy|\ x\in H, y\in V(G)\backslash H\}$. 对于$V(D)$的两个子集$V_1$和$V_2$, 定义$A(V_1,V_2)=\{(x,y)\mid x\in V_1, y\in V_2\}$.

去掉连通图G的一个边割, 若每一个分支都至少有k个顶点, 则称该边割为G的一个k-限制边割. 一个图G的k-限制边连通度$\lambda_k(G)$[18−19]是G的所有的$k-$限制边割的最小基数. 令$[A,B]$表示一个端点在A另一个端点在B的边的集合. $G\setminus A$表示把A中所有顶点从G中去掉得到的图. 定义$\varphi(A)=|[A,G\setminus A]|$和$\xi_m(G)=\min\{\varphi(X): X$是$G$的顶点数为$m$ 的连通点导出子图$\}$. 众所周知$\lambda_3(G)\leq\xi_3(G)$[12]. 如果$\lambda_3(G)=\xi_3(G)$, 则称图G为极大3-限制边连通[20].

引理1[20]　当$n\geq 3$, 无向二元Kautz图$UK(2,n)$是极大3-限制边连通的(也就是说$\lambda_3(UK(2,n))=\xi_3(UK(2,n))$).

引理2[20] 令$n\geq 4$, 则$\xi_3(UK(2,n))=6$.

引理3 令$n\geq 3$, 则$\xi_3(UK(2,n))=6$.

证明 令F是$UK(2,n)$中顶点数为3的连通子图. 如果F是$UK(2,n)$中的一个三圈. 那么$E(F)$不包含奇异边且$|S(V(F))|=6$. 如果F是$UK(2,n)$中的一条2长路且$E(F)$包含一条奇异边. 那么$|S(V(F))|=6$. 如果F是$UK(2,n)$中的一条2长路且$E(F)$不包含一条奇异边. 那么$|S(V(F))|=8$. 通过$\xi_3(UK(2,n))$的定义, 有$\xi_3(UK(2,n))=6$.

引理4[15] 当$n\geq 7$, 无向二元广义de Bruijn图$UB_G(2,n)$ 是极大3-限制边连通的(也就是说$\lambda_3(UB_G(2,n))=\xi_3(UB_G(2,n))=4$).

引理5 如果(x,y)是$K(d,n)$的一对对称弧且$(x',x),(y,y')\in A(K(d,n))$, 则$(x',y')\in A(K(d,n))$.

证明 令$x=x_1x_2x_1x_2\cdots$, $y=x_2x_1x_2x_1\cdots$, 那么$x'=\alpha x_1x_2x_1\cdots$ $(\alpha\in\{0,1,2,\cdots,d\}\backslash\{x_1,x_2\})$, $y'=x_1x_2x_1\cdots\beta$ $(\beta\in\{0,1,2,\cdots,d\}\setminus\{x_1,x_2\})$. 那么$(x',y')\in A(K(d,n))$.

引理6[21] 对于$d\geq 2, n\geq 2$, 设(x,y)和(u,v)是$K(d,n)$中任两条不相邻的弧. 如果(x,y)是一条对称弧, 则$K(d,n)$中存在$2d-2$条内点不交的从$\{x,y\}$到$\{u,v\}$的有向路.

引理7[10] $B(d,n)$是$(d-1)$-强连通, 也就是说, 对于任不同两点x,y存在$d-1$条内点不交的(x,y)-路.

引理8[10] $B_G(d,n)$是$(d-1)$-强连通, 也就是说, 对于任不同两点x,y存在$d-1$ 条内点不交的(x,y)-路.

2 $UK(2,n)$, $UB(d,n)$和$UB_G(2,n)$的圈边连通度

2.1 $UK(2,n)$的圈边连通度

引理9 令$d\geq 2$, $n\geq 3$, 则$c\lambda(UK(d,n))\leq 6d-6$.

证明 显然, $c\lambda(UK(2,2))=3$. 令$x,y,z\in V(UK(d,n))$, $x=x_1x_2x_3x_1x_2x_3\cdots$, $y=x_2x_3x_1x_2x_3x_1\cdots$, $z=x_3x_1x_2x_3x_1x_2\cdots$, 其中$x_1\neq x_2\neq x_3$. 那么$xyz$是$UK(d,n)$中的一个三圈. 显然, $|S(\{x,y,z\})|=6d-6$. 令$x'=x_3x_2x_1x_3x_2x_1\cdots$, $y'=x_2x_1x_3x_2x_1x_3\cdots$, $z'=x_1x_3x_2x_1x_3x_2\cdots$. 那么$x'y'z'$是$UK(d,n)-\{x,y,z\}$中的一个三圈以及$S(\{x,y,z\})$是$UK(d,n)$的一个圈边割. 因此, $c\lambda(UK(d,n))\leq 6d-6$.

引理10 令$n\geq 3$, 则$c\lambda(UK(2,n))\geq 6$.

证明 假设F是$UK(2,n)$的一个最小圈边割且$|F|\leq 5$, 则$UK(2,n)-F$有两个分支包含圈. 通过引理1和3, $\lambda_3(UK(2,n))=\xi_3(UK(2,n))=6$. 因为$|F|<6=\lambda_3(UK(2,n))$, 所以$UK(2,n)-F$的一个分支至多有两个顶点. 这与$F$是圈边割矛盾.

通过引理9和10, 得到下面结果.

定理1 令$n\geq 3$, 则$c\lambda(UK(2,n))=6$.

2.2 $UB(d,n)$的圈边连通度

定理2 对于$d\geq 3$, $n\geq 3$, 则$c\lambda(UB(d,n))\leq 6d-6$.

证明 与引理9的证明相似, 得到$c\lambda(UB(d,n))\leq 6d-6$.

2.3 $UB_G(2,n)$的圈边连通度

引理11 如果$n\geq 8$且为偶数, 则$c\lambda(UB_G(2,n))\leq 4$.

证明 因为顶点子集$\{0,1,\frac{n}{2}\}$和$\{\frac{n}{2}-1,n-2,n-1\}$在$V(UB_G(2,n))$中能导出三圈, 其中0是平凡点. 显然, $S(\{0,1,\frac{n}{2}\})$ 是$UB_G(2,n)$的一个圈边割, 则$c\lambda(UB_G(2,n))\leq|S(\{0,1,\frac{n}{2}\})|=4$.

引理12 如果$n\in\{7,9\}$, 则$c\lambda(UB_G(2,n))\leq 4$.

证明 对于$n=7$. 因为顶点子集$\{1,2,4\}$和$\{3,5,6\}$在$V(UB_G(2,n))$中能导出三圈, 其中2和4是交替点. 显然, $S(\{1,2,4\})$是$UB_G(2,n)$的一个圈边割, 则$c\lambda(UB_G(2,n))\leq|S(\{1,2,4\})|=4$.

对于$n=9$. 因为顶点子集$\{1,2,5\}$和$\{3,6,7\}$在$V(UB_G(2,n))$中能导出三圈, 其中2和5是交替点. 显然, $S(\{1,2,5\})$是$UB_G(2,n)$的一个圈边割, 则$c\lambda(UB_G(2,n))\leq|S(\{1,2,5\})|=4$.

引理13 如果$n\geq 11$且为奇数, 则$c\lambda(UB_G(2,n))\leq 6$.

证明 因为点子集$\{1,2,\frac{n-1}{2}+1\}$和$\{\frac{n-1}{2}-1,n-3,n-2\}$在$V(UB_G(2,n))$中能导出三圈, 则$S(\{1,2,\frac{n-1}{2}+1\})$是$UB_G(2,n)$的一个圈边割以及$c\lambda(UB_G(2,n))\leq|S(\{1,2,\frac{n-1}{2}+1\})|=6$.

引理14 如果$n\geq 7$, 则$c\lambda(UB_G(2,n))\geq 4$.

证明　假设F是$UB_G(2,n)$的一个最小圈边割且$|F|\leq 3$, 则$UB_G(2,n)-F$有两个分支包含圈. 通过引理4, $\lambda_3(UB_G(2,n))=\xi_3(UB_G(2,n))=4$. 因为$|F|<4=\lambda_3(UB_G(2,n))$, 所以$UB_G(2,n)-F$的一个分支至多有两个顶点. 这与$F$是圈边割矛盾.

通过引理11, 12, 13和14, 得到下面结果.

定理3　对于$UB_G(2,n)$, 有

(1) 如果$n\geq 8$且为偶数, 则$c\lambda(UB_G(2,n))=4$;

(2) 如果$n\in\{7,9\}$, 则$c\lambda(UB_G(2,n))=4$;

(3) 如果$n\geq 11$且为奇数, 则$4\leq c\lambda(UB_G(2,n))\leq 6$.

3　$K(d,n)$, $B(d,n)$和$B_G(d,n)$的圈弧连通度

3.1　$K(d,n)$的圈弧连通度

引理15

$$\lambda_c(K(d,n))=\begin{cases}\infty, & d=2,n=1;\\ 2d-2, & d\geq 3,n=1.\end{cases}$$

证明　因为$K(2,1)$是顶点数为3的完全有向图, 所以它不是圈可分的. 当$d\geq 3$, $K(d,1)$是顶点数为d+1的完全有向图. 令$u,v\in V(K(d,1))$. 显然, $A^+(\{u,v\})$是$K(d,1)$的一个圈弧割. 那么$\lambda_c(K(d,1))\leq 2d-2$. 令$S$是$K(d,1)$的一个最小圈弧割. 因为$K(d,1)-S$有两个强连通分支$D_1$和$D_2$包含有向圈, $|D_1|\geq 2$和$|D_2|\geq 2$. 这就意味着$|S|\geq 2d-2$和$\lambda_c(K(d,1))=|S|\geq 2d-2$. 因此, $\lambda_c(K(d,1))=2d-2$.

引理16　如果$d\geq 2$, $n\geq 2$, 则$\lambda_c(K(d,n))\leq 2d-2$.

证明　令(x,y)是$D=K(d,n)$ $(d\geq 2,n\geq 2)$的一条对称弧. 设$D_1=D[\{x,y\}]$, $D_2=D-D_1$. 对于$u,v\in V(D_2)$, 考虑两种情况.

情况1　$d=2$. 因为$\kappa(D)=d=2$, 所以D中存在两条内点不交的$(u,v)-$路P_1和P_2. 如果P_1或P_2 既不包含x也不包含y, 那么在D_2中有一条$(u,v)-$路. 如果$|V(P_i)\cap\{x,y\}|\neq\varnothing$, $i\in\{1,2\}$. 在这种情况下设$x\in V(P_1)$, $y\in V(P_2)$, 以及设$(w,x)\in A(P_1),(y,z)\in A(P_2)$. 通过引理5, $(w,z)\in A(D)$, 且P_1包含一条(u,w)-路以及P_2 包含一条(z,v)-路. 因此D_2中存在一条(u,v)-路. 类似的, D_2中存在一条$(v,u)-$路. 因此D_2是一个强连通分支.

情况2　$d\geq 3$. 因为$\kappa(D)=d\geq 3$, 所以D中存在d条内点不交的$(u,v)-$路. 因此, D_2中存在一条$(u,v)-$路. 类似的, D_2中存在一条$(v,u)-$路. 因此D_2是一个强连通分支.

显然, D_2包含有向圈. 那么$A^+(\{x,y\})=2d-2$是D的一个圈弧割. 因此, 如果$d\geq 2$, $n\geq 2$, 则$\lambda_c(K(d,n))\leq 2d-2$.

引理17　如果$d\geq 2$, $n\geq 2$, 则$\lambda_c(K(d,n))\geq 2d-2$.

证明　令$D=K(d,n)$, $S\subseteq A(D)$是D的一个最小圈边割, 有$|S|=\lambda_c(D)$. 因此, $V(D)$分为两个不交的顶点子集V_1和V_2且$S=A(V_1,V_2)$. 通过S的定义, 有$|V_1|\geq 2$, $|V_2|\geq 2$. 因为D中有$\binom{d+1}{2}$对对称弧且$\binom{d+1}{2}>2d-2$, 所以$D[V_1]$或$D[V_2]$中至少包含一条对称弧. 通过引理6, $|S|\geq 2d-2$. 因此, $\lambda_c(D)=|S|\geq 2d-2$.

通过引理15, 16和17, 得到下面结果.

定理4　如果$d\geq 3$, $n=1$或者$d\geq 2$, $n\geq 2$, 则$\lambda_c(K(d,n))=2d-2$.

3.2　$B(d,n)$的圈弧连通度

定理5　如果$d\geq 2$, $n\geq 2$, 则$\lambda_c(B(d,n))=d-1$.

证明 令x是$B(d,n)$中的顶点，并且有$(x,x)\in A(B(d,n))$. 那么$A^+(\{x\})$是$B(d,n)$中的一个圈弧割. 显然, $\lambda_c(B(d,n))\leq|A^+(\{x\})|=d-1$.

另一方面, 令$S\subseteq A(B(d,n))$是$B(d,n)$的一个最小圈弧割. 则$|S|=\lambda_c(B(d,n))$以及$V(B(d,n))$分为两个不交的顶点子集V_1和V_2且$S=A(V_1,V_2)$. 因为自环是一长的有向圈, $|V_1|\geq 1,|V_2|\geq 1$. 通过引理7, 有$|S|\geq d-1$和$\lambda_c(B(d,n))=|S|\geq d-1$. 因此, $\lambda_c(B(d,n))=d-1$.

3.3　$B_G(d,n)$的圈弧连通度

定理6　如果$d\geq 2$, $n\geq 2$, 则$\lambda_c(B_G(d,n))=d-1$.

证明 令x是$B_G(d,n)$中的平凡点, 那么$A^+(\{x\})$是$B_G(d,n)$的一个圈弧割, 则$\lambda_c(B_G(d,n)) \leq |A^+(\{x\})| = d-1$.

另一方面, 令$S \subseteq A(B_G(d,n))$是$B_G(d,n)$的一个最小圈弧割, 则$|S| = \lambda_c(B_G(d,n))$以及$V(B_G(d,n))$分为两个不交的顶点子集$V_1$和$V_2$且$S = A(V_1, V_2)$. 因为自环是一长的有向圈, $|V_1| \geq 1, |V_2| \geq 1$. 通过引理8, 有$|S| \geq d-1$和$\lambda_c(B_G(d,n)) = |S| \geq d-1$. 因此, $\lambda_c(B_G(d,n)) = d-1$.

4 结 论

在这篇文章中, 我们得到如果$n \geq 3$, 则$c\lambda(UK(2,n)) = 6$; 如果$d \geq 3$, $n \geq 3$, 则$c\lambda(UB(d,n)) \leq 6d-6$; 如果$n \in \{7,9\}$或$n \geq 8$且为偶数, 则$c\lambda(UB_G(2,n)) = 4$; 如果$n \geq 11$且为奇数, 且$4 \leq c\lambda(UB_G(2,n)) \leq 6$; 如果$d \geq 3$, $n = 1$或$d \geq 2$, $n \geq 2$, 则$\lambda_c(K(d,n)) = 2d-2$; 如果$d \geq 2$, $n \geq 2$, 则$\lambda_c(B(d,n)) = d-1$; 如果$d \geq 2$, $n \geq 2$, 则$\lambda_c(B_G(d,n)) = d-1$. 在将来的研究中, 可以探讨Kautz图、de Bruijn图和广义de Bruijn图的圈点连通度, 以及其它网络模型的圈边连通度和圈弧连通度.

参考文献:

[1] LOU D, HOLTON D. Lower bound of cyclic edge connectivity for n-extendability of regular graphs[J]. Discrete Math, 1993, 112: 139-150.

[2] ZHANG Z, ZHU Y F. Cyclic arc-connectivity in a Cartesian product digraph[J]. Applied Mathematics Letters, 2010, 23: 796-800.

[3] TAIT P. Remarks on the colouring of maps[J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 1880, 10: 501-503.

[4] PLUMMER M. On the cyclic connectivity of planar graphs[J]. Lecture Notes in Mathematics, 1992, 303: 235-242.

[5] ZHANG C. Integer flows and cycle covers of graphs[M]. New York: Marcel Dekker Inc Publishers, 1997.

[6] WANG B, ZHANG Z. On cyclic edge-connectivity of transitive graphs[J]. Discrete Mathematics, 2009, 309: 4555-4563.

[7] NEDELA, ŠKOVIERA R, MARTIN. Atoms of cyclic connectivity in cubic graphs[J]. Mathematica Slovaca, 1995, 45: 481-499.

[8] CHENG E, LIPTÁK L, QIU K, et al. Cyclic vertex-connectivity of Cayley graphs generated by transposition trees[J]. Graphs and Combinatorics, 2013, 29: 835-841.

[9] QIN D J, TIAN Y Z, MENG J X. Cyclic vertex connectivity of Cartesian product cycles[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition), 2017, 34(4): 415-420.

[10] JENSEN J, GUTIN G. Digraphs theory, algorithms and applications[M]. London: Springer Publishers, 2010.

[11] WANG S Y, LIN S W. The maximal restricted edge connectivity of Kautz undirected graphs(extended abstract)[J]. Electron Notes in Discrete Mathematics, 2005, 22: 49-53.

[12] WANG S Y, LIN S W. The k-restricted edge connectivity of undirected Kautz graphs[J]. Discrete Mathematics, 2009, 309: 4649-4652.

[13] LYU C, ZHANG K. Super connectivity and restricted connectivity of undirected de Bruijn graphs[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2002, 25: 29-35.

[14] IMASE M, SONEOKA T, OKADA K. Fault-tolerant processor interconnection networks[J]. Systems and Computers in Japan, 1986, 17: 21-30.

[15] OU J P, LI J Q. On $m-$restricted edge connectivity of undirected generalized de Bruijn graphs[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2013, 90：2259-2264.

[16] ZHANG J H, MENG J X. Restricted arc-connectivity of generalized de Bruijn digraphs and Kautz digraphs[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2020, 37(4): 415-427.

[17] BONDY J, MURTY U. Graph theory with applications[M]. Macmillan, London: Springer Publishers, 2008.

[18] FÀBREGA J, FIOL M. Extraconnectivity of graphs with large girth[J]. Discrete Mathematics, 1994, 127: 163-170.

[19] FÀBREGA J, FIOL M. On the extraconnectivity of graphs[J]. Discrete Mathematics, 1996, 155: 49-57.

[20] OU J P, CHENG X H, WU J C. On 3-restricted edge connectivity of undirected binary Kautz graphs[J]. Discrete Mathematics, 2009, 309: 629-638.

[21] FAN Y M, XU J M. Restricted edge-connectivity of Kautz graphs[J]. Mathematicase Applicatae, 2004, 17(2): 329-332.

责任编辑: 赵新科