

加权异质网络上具有多语言环境的谣言传播建模*

罗续鹏, 蒋海军[†], 陈珊珊

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

摘要: 在多语言环境和加权异质网络中研究了具有交叉传播的 I2SR (Ignorants-Spreaders-1-Spreader-2-Removers) 时滞谣言传播模型. 首先, 通过分析该模型对应的平均场方程推导出确保谣言传播平衡点存在的基本再生数 \mathcal{R}_0 . 其次, 利用 Lyapunov 泛函方法和 LaSalle 不变原理证明无谣言平衡点的全局渐近稳定性. 最后, 通过两个数值例子验证所得结果的有效性.

关键词: 谣言传播; 加权异质网络; 时滞; 全局稳定性

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2021.10.22.0002

中图分类号: O175 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2022)04-0393-08

引文格式: 罗续鹏, 蒋海军, 陈珊珊. 加权异质网络上具有多语言环境的谣言传播建模[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2022, 39(4): 393-400.

英文引文格式: LUO Xupeng, JIANG Haijun, CHEN Shanshan. Modeling rumor propagation with multilingual environment over weighted heterogeneous networks[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2022, 39(4): 393-400.

Modeling Rumor Propagation with Multilingual Environment over Weighted Heterogeneous Networks

LUO Xupeng, JIANG Haijun, CHEN Shanshan

(School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China)

Abstract: An improved I2SR (Ignorants-Spreaders-1-Spreader-2-Removers) delayed rumor propagation model with cross-propagation is studied in multilingual environment and weighted heterogeneous networks. Firstly, by analyzing the corresponding mean-field equations of this model, the basic reproduction number \mathcal{R}_0 is derived to ensure the existence of the rumor propagation equilibrium. Secondly, the Lyapunov functional method and the LaSalle's invariance principle are applied to prove the global asymptotic stability of the rumor-free equilibrium. Finally, some numerical examples are shown to demonstrate the validity of the derived results.

Key words: rumor propagation; weighted heterogeneous network; time delay; global stability

0 引言

在线社交网络中谣言的肆意传播是互联网时代的典型社会现象,不但传播速度快、范围广^[1],而且会引起人们恐慌、对社会稳定产生负面影响^[2]. 例如,在全球暴发的新冠肺炎疫情期间,产生了“双黄连口服液能够有效治愈新冠肺炎”和“板蓝根加熏醋能预防新冠肺炎”等谣言,这在很短时间内导致人们囤积商品,扰乱了市场秩序并使人们恐慌. 因此,为了减少谣言造成的危害,研究在线社交网络中的谣言传播规律和提出有效的措施来干预谣言的传播是非常必要和紧迫的.

谣言传播的经典模型为 DK 模型^[3]与 MT 模型^[4],它们将人口分为三类:未知者(不知道谣言的人),传播者(知道并传播谣言的人),恢复者(知道但不再传播谣言的人). 然而,DK 模型和 MT 模型的缺点是没有考虑网

* 收稿日期: 2021-10-22

基金项目: 国家自然科学基金项目(U1703262; 61866036; 62006196; 61963033; 62163035); 天山创新团队项目(2020D14017).

作者简介: 罗续鹏(1994-),男,硕士生,从事复杂网络信息传播动力学的研究, E-mail: luoxupengsx@163.com.

[†] 通讯作者: 蒋海军(1968-),男,博士,教授, E-mail: jianghaijunxju@163.com.

络的拓扑特征,不适合描述在线社交网络中大规模谣言传播过程.众所周知,复杂网络是从网络的角度将个体抽象为网络中的节点并进行建模^[5-6],将个体之间的依赖关系和相互作用看作节点之间的连边,从而将现实中的复杂系统进行简单化和抽象化,为谣言传播的研究奠定了理论基础.由于复杂网络具有小世界特征^[7]和无标度性质^[8],因此许多学者在小世界网络^[9-10]和无标度网络^[11]上建立了谣言传播模型,考虑了网络的拓扑结构对谣言传播的影响.随着研究的深入,学者们发现真实网络中实体之间的相互作用不但呈现了高度异质性,而且还具有权重广泛分布的特征^[12-14].在谣言传播过程中,边权用来表示用户之间联系或通讯的频繁程度,边权越大,用户之间的联系越紧密,未知者被谣言影响的概率也就越大.文献[15]考虑了谣言传播率对节点之间基于权重的接触强度的依赖性,并发现边权和节点强度影响着谣言传播的阈值.文献[16]证明了加权网络下无谣言平衡点的全局稳定性和谣言传播平衡点的持久性.此外,一些加权网络的传染病模型为研究谣言传播提供了一个新的视角^[17-19].

值得注意的是,随着信息共享全球化的发展,一些网民同时拥有不同语言的在线社交网络账号,另一些网民生活在多语言环境中,使得谣言在多语言环境中广泛传播.一方面,不同语言的人群对同一谣言表现出不同的传播特征,而且这种谣言传播的异质性较单一语言环境下的谣言传播更为复杂.另一方面,谣言在跨多语言在线社交网络环境下传播可能通过人工翻译来实现,这必然使得同一谣言会产生多个版本.多语言环境增加了谣言研究的复杂性,同时给在线社交网络中谣言的识别与防控工作带来了很大的挑战.因此,研究谣言传播规律和动力学具有现实意义和应用价值.于是一些学者在多语言环境中建立了谣言传播模型^[20-22].

然而,上述工作对多语言环境中谣言传播模型的研究主要集中在非加权的网络中,忽略了真实网络的交互强度.众所周知,网络的异质性是由其拓扑结构和连边权重确定的.在线社交网络内的异质交互模式通常用加权网络来描述,网络的节点和连边具有不同的权重,网络间交互强度的变化对实现网络的基本功能至关重要.其次,时滞是谣言传播过程中普遍存在的现象.当传播者发布或者转发谣言信息后,由于网络信息传递延迟导致未知者无法及时查看谣言信息,或未知者对谣言不能立即做出回应,无知者在成为传播者之前存在时滞.因此,本文在多语言环境和加权异质网络中建立了具有交叉传播的 I2SR 时滞谣言传播模型.

1 模型建立

人们生活在多语言环境中或者拥有不同语言的在线社交网络账号,使得谣言在多语言环境中交叉传播.假设 t 时刻在线社交网络上的总用户为 $N(t)$,并将其分为四类:未知者 (Ignorants), 记为 $I(t)$,表示不知道谣言但是极易被谣言影响的用户;传播者 1 (Spreaders-1), 记为 $S^1(t)$,表示知道谣言并通过第一种语言传播谣言的用户;传播者 2 (Spreaders-2), 记为 $S^2(t)$,表示知道谣言并通过第二种语言传播谣言的用户;恢复者 (Removers), 记为 $R(t)$,表示知道谣言但不再传播谣言的用户.为了更准确地描述谣言传播过程,根据在线社交网络用户的连接度(即粉丝数量、交际圈或被关注度),我们将度相同的用户划分为同一组,共分为 m 组.设 $I_m(t), S_m^1(t), S_m^2(t), R_m(t)$ 分别表示在 t 时刻度为 m 的四类状态的密度,其中 $m = 1, 2, \dots, n$. 谣言的传播示意图如图 1 所示.

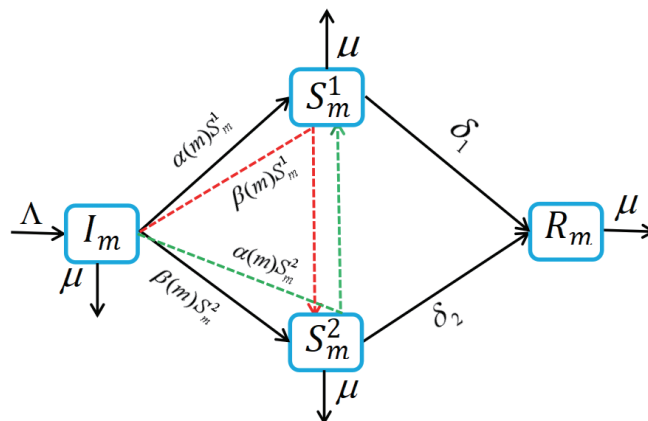


图 1 具有交叉传播的 I2SR 谣言传播示意图

基于异质平均场理论, 多语言环境中具有交叉传播的时滞谣言传播模型为

$$\begin{cases} \frac{dI_m(t)}{dt} = \Lambda - (\alpha(m) + \beta(m))I_m(t)(\theta_1(t-\tau) + \theta_2(t-\tau)) - \mu I_m(t) \\ \frac{dS_m^1(t)}{dt} = \alpha(m)I_m(t)(\theta_1(t-\tau) + \theta_2(t-\tau)) - (\delta_1 + \mu)S_m^1(t) \\ \frac{dS_m^2(t)}{dt} = \beta(m)I_m(t)(\theta_1(t-\tau) + \theta_2(t-\tau)) - (\delta_2 + \mu)S_m^2(t) \\ \frac{dR_m(t)}{dt} = \delta_1 S_m^1(t) + \delta_2 S_m^2(t) - \mu R_m(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\tau > 0$ 是平均影响时滞, Λ 为 t 时刻 $I_m(t)$ 的移入率, μ 为 t 时刻 $I_m(t), S_m^1(t), S_m^2(t), R_m(t)$ 的移出率, 在谣言传播过程中, 未知者成为传播者的比率依赖于异质网络中节点的度 m , 即 $\alpha(m)$ 和 $\beta(m)$ 分别表示当 $S_m^j(t) (j=1, 2)$ 联系 $I_m(t)$ 时, $I_m(t)$ 转变为 $S_m^1(t)$ 和 $S_m^2(t)$ 的交叉传播率. 毋庸置疑, 未受过教育的用户缺乏理性的思考和判断力, 更容易相信和传播谣言. 为了减少传播者的数量, 引入了教育机制^[21], 即政府对传播者进行教育或引导, 使其不再传播谣言. δ_1 和 δ_2 表示在教育机制的影响下, $S_m^1(t)$ 和 $S_m^2(t)$ 分别转为 $R_m(t)$ 的概率. $\theta_j(t-\tau) (j=1, 2)$ 指随机选择的节点在 t 时刻被传播者 1 (传播者 2) 感染的概率. 在度不相关的网络中, $\theta_j(t-\tau)$ 可以表示为

$$\theta_j(t-\tau) = \sum_{i=1}^n \lambda_{im} p(i|m) \frac{\varphi_j(i)}{i} S_i^j(t-\tau) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_{im} \varphi_j(i) p(i) S_i^j(t-\tau)}{\langle m \rangle}, j=1, 2 \quad (2)$$

其中 $p(i|m) = \frac{ip(i)}{\langle m \rangle}$ 是度为 m 的节点连向度为 i 的节点的概率, $\varphi_j(i) (j=1, 2)$ 是具有度为 i 节点的传播者 1 (传播者 2) 的影响力, λ_{im} 表示从度为 i 的节点到度为 m 间的节点的传播率. $p(m)$ 是异质网络中节点的度分布且满足 $\sum_{m=1}^n p(m) = 1$. $\langle m \rangle = \sum_{i=1}^n ip(i)$ 是异质网络的平均度. 为了方便起见, 定义 $\langle h(m) \rangle := \sum_{i=1}^n h(i)p(i)$, $\dot{x}(t) := \frac{dx(t)}{dt}$.

在谣言传播过程中, 权重表示谣言传播的强弱程度, 因此可以用节点的度来表示连边的权重. 节点的度 i 和 j 之间的权重用度函数 $\omega(i, j) = \omega_0(ij)^k = \omega_0(i)^k(j)^k$ ^[13, 23] 来表示, 其中 ω_0 和 k 取决于特定的复杂网络. 为了方便起见, 设 $\omega_0 = 1$, 进一步使用一般的权重函数 $\omega(i, j) = g(i)g(j)$ ^[18]. 由于异质网络中连接越多的节点获得的权重越大, 则 $g(m)$ 是一个关于度 m 的增函数. $\omega(i, j)$ 表示两节点之间的边权重函数, 则节点的权重可以通过所有与它相连的边的权重之和得到, 即 $\psi_m = m \sum_{i=1}^n p(i|m) \omega(i, j) = \frac{mg(m)\langle mg(m) \rangle}{\langle m \rangle}$. 假设 λ_i 是一个度为 i 节点的固定传播率, 从度为 i 的节点到度为 m 的节点的连边的传播概率是通过连边权重与度为 m 的节点权重的比值来确定的^[19], 则参数 λ_{im} 可以表示为

$$\lambda_{im} = \lambda_i \frac{\omega(i, m)}{\psi_i} = \frac{\lambda g(m) \langle m \rangle}{\langle mg(m) \rangle} \quad (3)$$

将 (3) 代入 (2), 得

$$\theta_j(t-\tau) = \frac{\lambda g(m)}{\langle mg(m) \rangle} \sum_{i=1}^n \varphi_j(i) p(i) S_i^j(t-\tau) = \frac{\lambda g(m)}{\langle mg(m) \rangle} \Theta_j(t-\tau), j=1, 2 \quad (4)$$

将 (4) 代入 (1), 得

$$\begin{cases} \frac{dI_m(t)}{dt} = \Lambda - (\alpha(m) + \beta(m))I_m(t) \frac{\lambda g(m)}{\langle mg(m) \rangle} (\Theta_1(t-\tau) + \Theta_2(t-\tau)) - \mu I_m(t) \\ \frac{dS_m^1(t)}{dt} = \alpha(m)I_m(t) \frac{\lambda g(m)}{\langle mg(m) \rangle} (\Theta_1(t-\tau) + \Theta_2(t-\tau)) - (\delta_1 + \mu)S_m^1(t) \\ \frac{dS_m^2(t)}{dt} = \beta(m)I_m(t) \frac{\lambda g(m)}{\langle mg(m) \rangle} (\Theta_1(t-\tau) + \Theta_2(t-\tau)) - (\delta_2 + \mu)S_m^2(t) \\ \frac{dR_m(t)}{dt} = \delta_1 S_m^1(t) + \delta_2 S_m^2(t) - \mu R_m(t) \end{cases} \quad (5)$$

假设系统 (5) 的初始条件为

$$\begin{aligned} I_m(\vartheta) &= \phi_{m1}(\vartheta), S_m^1(\vartheta) = \phi_{m2}(\vartheta), S_m^2(\vartheta) = \phi_{m3}(\vartheta), R_m(\vartheta) = \phi_{m4}(\vartheta) \\ \phi_{mz}(\vartheta) &\geq 0, \phi_{mz}(0) > 0, (\vartheta \in [-\tau, 0], m=1, \dots, n, z=1, \dots, 4) \end{aligned} \quad (6)$$

令 $\phi_m = (\phi_{m1}, \phi_{m2}, \phi_{m3}, \phi_{m4}) \in \mathcal{C}([-\tau, 0], R_+^{4n}), m = 1, \dots, n$. \mathcal{C} 是在 R_+^{4n} 中区间 $[-\tau, 0]$ 上的非负连续函数映射的 Banach 空间, 具有范数 $\|\phi_m\| = \left(\sum_{m=1}^n (|\phi_{m1}(\vartheta)|_\tau^2 + |\phi_{m2}(\vartheta)|_\tau^2 + |\phi_{m3}(\vartheta)|_\tau^2 + |\phi_{m4}(\vartheta)|_\tau^2)\right)^{\frac{1}{2}}$, 其中 $|\phi_{mz}(\vartheta)|_\tau = \sup_{-\tau \leq \vartheta \leq 0} |\phi_{mz}(\vartheta)|, z = 1, \dots, 4$.

引理 1 对任意的 $t \geq 0$, 系统 (5) 具有初始条件 (6) 的解 $(I_m(t), S_m^1(t), S_m^2(t), R_m(t))$ 都是正的.

证明 “反证法”. 为了便于分析, 假设 $\tau = 0$. 令 $\Gamma(t) = \min_t \{I_m(t), S_m^1(t), S_m^2(t), R_m(t)\}$. 假设存在常数 $t^* > 0$, 使得 $\Gamma(t^*) = 0, \dot{\Gamma}(t^*) \leq 0$, 并且当 $0 \leq t < t^*$ 时有 $\Gamma(t) > 0$. 若 $\Gamma(t^*) = I_m(t^*)$, 有 $\dot{I}_m(t^*) = \Lambda > 0$, 这与 $\dot{\Gamma}(t^*) \leq 0$ 矛盾, 即 $I_m(t) > 0$. 若 $\Gamma(t^*) = S_m^1(t^*)$, 有 $I_m(t^*) > 0, S_m^2(t^*) > 0, \Theta_2(t^*) > 0$, 并且 $\dot{\Gamma}(t^*) = \dot{S}_m^1(t^*) = \alpha(m)I_m^* \frac{\lambda g(m)}{\langle mg(m) \rangle} \Theta_2(t^*) > 0$, 与 $\dot{\Gamma}(t^*) \leq 0$ 矛盾, 则 $S_m^1(t) > 0$. 相似的, 易证 $S_m^2(t) > 0, R_m(t) > 0$.

令 $N_m(t) = I_m(t) + S_m^1(t) + S_m^2(t) + R_m(t)$ 并且 $\sum_{m=1}^n N_m(t) = N(t)$. 将 (5) 中四个方程相加得到 $\dot{N}_m(t) = \Lambda - \mu N_m(t)$, 解得 $\lim_{t \rightarrow \infty} N_m(t) = \frac{\Lambda}{\mu}$. 因此, 将系统 (5) 的不变集 Ω 定义为:

$$\Omega = \left\{ (I_m(t), S_m^1(t), S_m^2(t), R_m(t)) \in \mathcal{R}_+^{4n} \mid I_m(t) + S_m^1(t) + S_m^2(t) + R_m(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}.$$

2 平衡点的动力学分析

众所周知, 基本再生数 \mathcal{R}_0 是判断谣言是否传播的重要阈值. 在本节中, 我们定义 \mathcal{R}_0 并分析平衡点的存在性与稳定性.

定理 1 定义基本再生数

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\Lambda \lambda}{\mu \langle mg(m) \rangle} \left(\frac{\langle \alpha(m) \varphi_1(m) g(m) \rangle}{\delta_1 + \mu} + \frac{\langle \beta(m) \varphi_2(m) g(m) \rangle}{\delta_2 + \mu} \right).$$

(i) 如果 $\mathcal{R}_0 < 1$, 系统 (5) 存在唯一的无谣言平衡点 $E_0(I_m^0, S_m^{1^0}, S_m^{2^0}, R_m^0) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0\right), \dots, \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0\right)$.

(ii) 如果 $\mathcal{R}_0 > 1$, 系统 (5) 存在唯一的谣言传播平衡点 $E^*(I_m^*, S_m^{1*}, S_m^{2*}, R_m^*) = \left((I_1^*, S_1^{1*}, S_1^{2*}, R_1^*), \dots, (I_n^*, S_n^{1*}, S_n^{2*}, R_n^*)\right)$, 其中 $\Theta^* = \Theta_1^* + \Theta_2^*, \Xi^* = (\alpha(m) + \beta(m)) \lambda g(m) \Theta^* + \mu \langle mg(m) \rangle$,

$$\begin{cases} I_m^* = \frac{\Lambda \langle mg(m) \rangle}{\Xi^*}, & S_m^{1*} = \frac{\Lambda \alpha(m) \lambda g(m) \Theta^*}{(\delta_1 + \mu) \Xi^*}, \\ S_m^{2*} = \frac{\Lambda \beta(m) \lambda g(m) \Theta^*}{(\delta_2 + \mu) \Xi^*}, & R_m^* = \frac{\Lambda (\delta_1 (\delta_2 + \mu) \alpha(m) + \delta_2 (\delta_1 + \mu) \beta(m)) \lambda g(m) \Theta^*}{\mu (\delta_1 + \mu) (\delta_2 + \mu) \Xi^*}. \end{cases}$$

证明 为了得到传播平衡点, 令系统 (5) 的右端等于 0, 有

$$\dot{I}_m(t) = 0, \dot{S}_m^1(t) = 0, \dot{S}_m^2(t) = 0, \dot{R}_m(t) = 0.$$

对于(i), 当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时, 系统 (5) 在正不变集 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上存在唯一的无谣言平衡点 $E_0(I_m^0, S_m^{1^0}, S_m^{2^0}, R_m^0)$.

对于(ii), 通过计算可知, 系统 (5) 在正不变集 Ω 的内部存在谣言传播平衡点 $E^*(I_m^*, S_m^{1*}, S_m^{2*}, R_m^*)$.

将 S_m^{1*}, S_m^{2*} 代入 $\Theta^* = \Theta_1^* + \Theta_2^*$ 中, 并将 Θ^* 定义为 Θ , 有

$$\Theta = \sum_{m=1}^n \left(\frac{\varphi_1(m) \alpha(m)}{\delta_1 + \mu} + \frac{\varphi_2(m) \beta(m)}{\delta_2 + \mu} \right) p(m) \frac{\Lambda \lambda g(m) \Theta}{\Xi} =: F(\Theta) \tag{7}$$

其中 $\Xi = (\alpha(m) + \beta(m)) \lambda g(m) \Theta + \mu \langle mg(m) \rangle$. 显然, $\Theta = 0$ 是 (7) 的平凡解, 即 $F(0) = 0$.

由于

$$\frac{dF(\Theta)}{d\Theta} = \sum_{m=1}^n \left(\frac{\varphi_1(m) \alpha(m)}{\delta_1 + \mu} + \frac{\varphi_2(m) \beta(m)}{\delta_2 + \mu} \right) p(m) \frac{\Lambda \lambda g(m) \mu \langle mg(m) \rangle}{(\Xi)^2} > 0,$$

$$\frac{d^2F(\Theta)}{d\Theta^2} = - \sum_{m=1}^n \left(\frac{\varphi_1(m) \alpha(m)}{\delta_1 + \mu} + \frac{\varphi_2(m) \beta(m)}{\delta_2 + \mu} \right) \frac{2p(m) \mu \Lambda \langle mg(m) \rangle (\lambda g(m))^2 (\alpha(m) + \beta(m))}{(\Xi)^3} < 0,$$

则 $F(\Theta)$ 是凸递增函数. 因此 (7) 有正解当且仅当

$$\frac{dF(\Theta)}{d\Theta} \Big|_{\Theta=0} = \frac{\Lambda\lambda}{\mu\langle mg(m) \rangle} \left(\frac{\langle \alpha(m)\varphi_1(m)g(m) \rangle}{\delta_1 + \mu} + \frac{\langle \beta(m)\varphi_2(m)g(m) \rangle}{\delta_2 + \mu} \right) = \mathcal{R}_0 > 1.$$

因此, 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 系统 (5) 存在唯一的谣言传播平衡点 $E^*(I_m^*, S_m^{1*}, S_m^{2*}, R_m^*)$.

定理 2 如果 $\mathcal{R}_0 < 1$, 则系统 (5) 中的无谣言平衡点 $E_0(I_m^o, S_m^{1o}, S_m^{2o}, R_m^o)$ 是全局渐近稳定的.

证明 构造 Lyapunov 泛函:

$$V(t) = (\delta_2 + \mu) \left(\Theta_1(t) + \sum_{m=1}^n \varphi_1(m)p(m)\alpha(m)I_m^o \frac{\lambda g(m)}{\langle mg(m) \rangle} \int_{t-\tau}^t (\Theta_1(s) + \Theta_2(s)) ds \right) + (\delta_1 + \mu) \left(\Theta_2(t) + \sum_{m=1}^n \varphi_2(m)p(m)\beta(m)I_m^o \frac{\lambda g(m)}{\langle mg(m) \rangle} \int_{t-\tau}^t (\Theta_1(s) + \Theta_2(s)) ds \right).$$

由于 $I_m(t) \leq I_m^o = \frac{\Lambda}{\mu}$, 计算 $V(t)$ 沿着系统 (5) 关于 t 求导数得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= (\delta_2 + \mu) \left(\sum_{m=1}^n \varphi_1(m)p(m) \left\{ \alpha(m)I_m(t) \frac{\lambda g(m)}{\langle mg(m) \rangle} (\Theta_1(t-\tau) + \Theta_2(t-\tau)) - (\delta_1 + \mu)S_m^1(t) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^n \varphi_1(m)p(m)\alpha(m)I_m^o \frac{\lambda g(m)}{\langle mg(m) \rangle} \left\{ (\Theta_1(t) + \Theta_2(t)) - (\Theta_1(t-\tau) + \Theta_2(t-\tau)) \right\} \right) \\ &\quad + (\delta_1 + \mu) \left(\sum_{m=1}^n \varphi_2(m)p(m) \left\{ \beta(m)I_m(t) \frac{\lambda g(m)}{\langle mg(m) \rangle} (\Theta_1(t-\tau) + \Theta_2(t-\tau)) - (\delta_2 + \mu)S_m^2(t) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^n \varphi_2(m)p(m)\beta(m)I_m^o \frac{\lambda g(m)}{\langle mg(m) \rangle} \left\{ (\Theta_1(t) + \Theta_2(t)) - (\Theta_1(t-\tau) + \Theta_2(t-\tau)) \right\} \right) \\ &\leq (\delta_2 + \mu) \sum_{m=1}^n \varphi_1(m)p(m) \left(\alpha(m)I_m^o \frac{\lambda g(m)}{\langle mg(m) \rangle} (\Theta_1(t) + \Theta_2(t)) - (\delta_1 + \mu)S_m^1(t) \right) \\ &\quad + (\delta_1 + \mu) \sum_{m=1}^n \varphi_2(m)p(m) \left(\beta(m)I_m^o \frac{\lambda g(m)}{\langle mg(m) \rangle} (\Theta_1(t) + \Theta_2(t)) - (\delta_2 + \mu)S_m^2(t) \right) \\ &\leq (\delta_1 + \mu)(\delta_2 + \mu)(\Theta_1(t) + \Theta_2(t))(\mathcal{R}_0 - 1). \end{aligned}$$

显然, 当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时, $\dot{V}(t) \leq 0$. $\dot{V}(t) = 0$ 当且仅当 $\Theta_1(t) = \Theta_2(t) = 0$, 也就意味着 $\lim_{t \rightarrow \infty} S_m^1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} S_m^2(t) = 0$. 因此, 在 Ω 中的最大不变集 $\{\dot{V}(t) = 0\}$ 是单点集 $\{E_0\}$. 根据 LaSalle 不变原理, 系统 (5) 的无谣言平衡点 $E_0(I_m^o, S_m^{1o}, S_m^{2o}, R_m^o)$ 是全局渐近稳定的.

猜想 1 如果 $\mathcal{R}_0 > 1$, 则谣言传播平衡点 $E^*(I_m^*, S_m^{1*}, S_m^{2*}, R_m^*)$ 是全局渐近稳定的.

注 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 在定理 1 中证明了系统 (5) 存在唯一的谣言传播平衡点 $E^*(I_m^*, S_m^{1*}, S_m^{2*}, R_m^*)$. 在数值仿真例 2 中, 验证了谣言传播平衡点 E^* 是全局渐近稳定的.

3 数值仿真

在本节中, 我们通过数值仿真来验证本文所提的理论结果在不同参数下的有效性. 由于异质网络中度分布函数服从幂律分布, 考虑异质网络中节点最大度 $n = 100$, 选取 $p(m) = dm^{-2.8}$ 并且 d 满足 $\sum_{m=1}^n p(m) = 1$. 选用依赖于节点度 m 的影响力函数: $\varphi_1(m) = m, \varphi_2(m) = m^{0.9}$; 取 $g(m) = m^{\omega_0}$, ω_0 是常数; 设 $\Lambda = \mu = 0.02, \alpha(m) = \alpha m, \beta(m) = \beta m, m = 1, \dots, 100$.

例 1 选取 $\alpha = 0.01, \beta = 0.015, \omega_0 = 1, \delta_1 = 0.025, \delta_2 = 0.015, \tau = 10$. 若 $m \in [1, 50]$, 当 $\lambda = 0.01, \mathcal{R}_0 \approx 0.1335 < 1$ 和 $\lambda = 0.07, \mathcal{R}_0 \approx 0.9348 < 1$ 时无谣言平衡点 E_0 的渐近稳定性分别见图 2(a) 和图 2(b). 若 $m \in [1, 100], \lambda = 0.02$ 时, 通过计算可知 $\mathcal{R}_0 < 1$, E_0 的局部渐近稳定性如图 2(c) 所示; 当 $m = 100$ 时, 无谣言平衡点 E_0 是全局渐近稳定的, 如图 2(d) 所示, 与定理 2 一致.

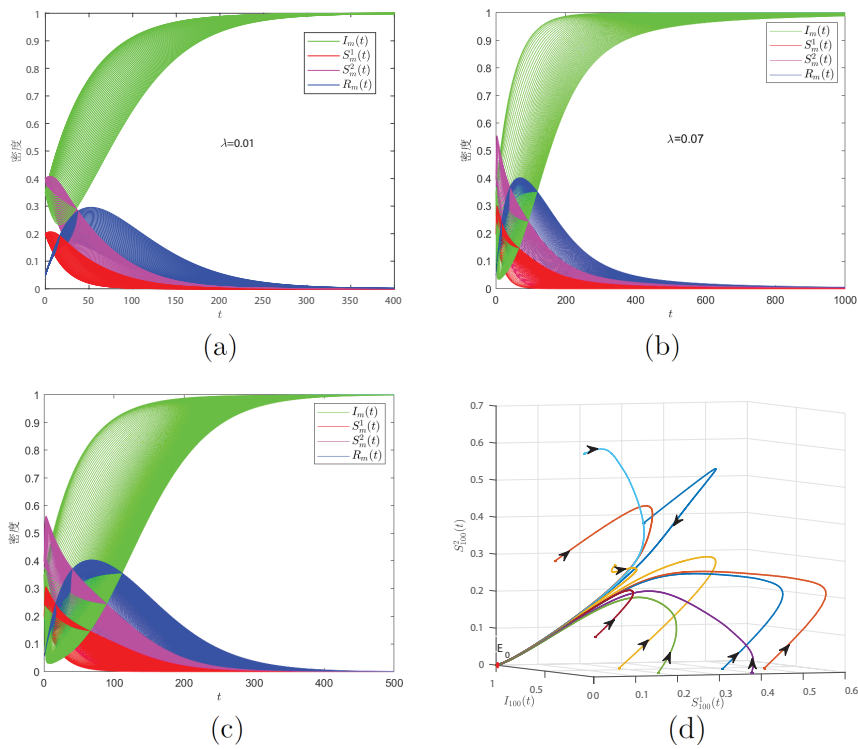


图 2 当 $R_0 < 1$ 时, 无谣言传播平衡点 E_0 的渐近稳定性

例 2 选取 $\alpha = 0.3, \beta = 0.4, \omega_0 = 0.1, \delta_1 = 0.005, \delta_2 = 0.008, \lambda = 0.04, \tau = 10$. 通过计算可知 $R_0 = 4.8527 > 1$. 由定理 1 可知, 系统 (5) 存在唯一的谣言传播点 E^* . 若 $m \in [1, 20]$, 谣言传播平衡点 E^* 的渐近稳定性如图 3(a) 和图 3(b). 当 $m = 20$ 时, 谣言传播平衡点 E^* 的局部和全局渐近稳定性轨迹如图 3(c) 和图 3(d). 综上可知, 当 $R_0 > 1$ 时, 谣言传播平衡点 E^* 是全局渐近稳定的, 这就验证了猜想 1 的结论.

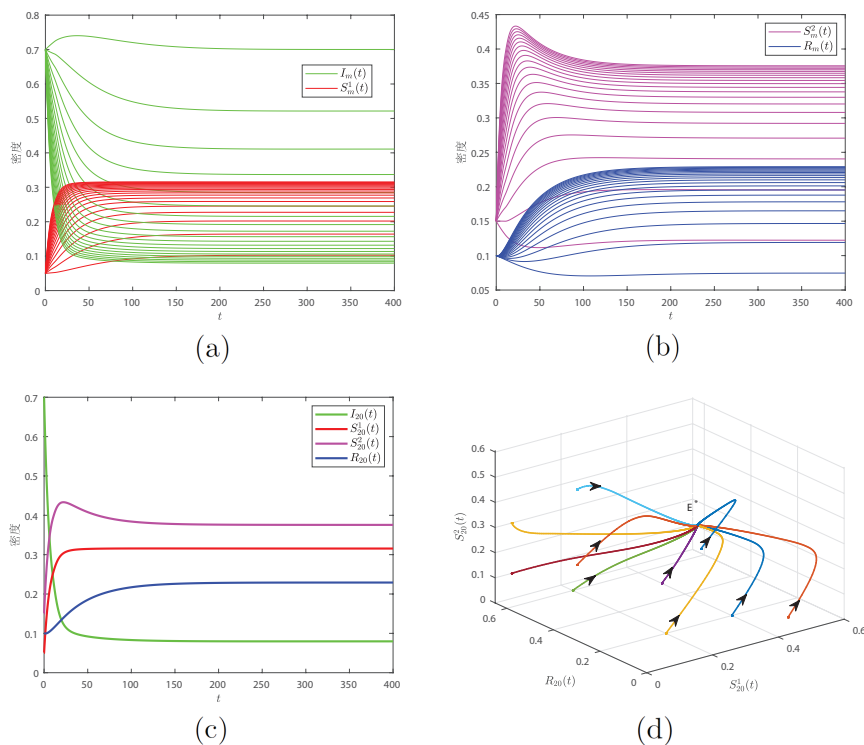


图 3 当 $R_0 > 1$ 时, 谣言传播平衡点 E^* 的稳定性

时滞 τ 对谣言传播的影响. 分别取 τ 为 0, 10, 20, 30, 40, 其他参数与例 2 一致. 如图 4 所示, 时滞能够降低谣言传播的峰值, 但是不改变谣言传播最终的平衡状态.

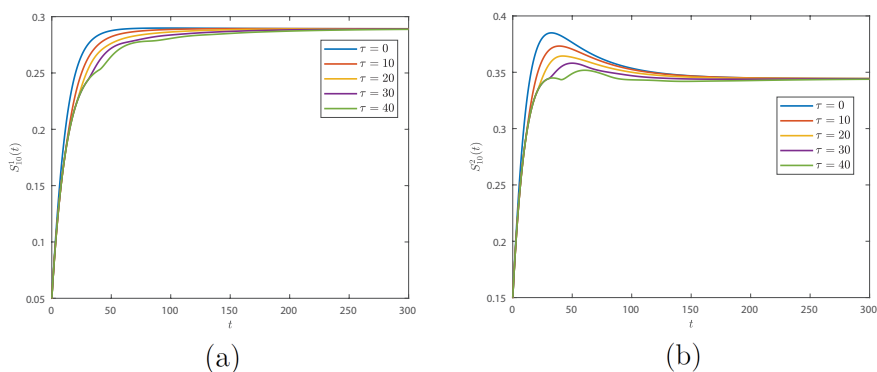


图 4 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 时滞 τ 对谣言传播者的密度影响

$\alpha(m), \delta_1$ 和 $\beta(m), \delta_2$ 分别与 \mathcal{R}_0 之间的关系. 如图 5 所示, 我们分别选择参数 $\alpha(m), \beta(m) \in [0, 1], \delta_1, \delta_2 \in [0, 0.5]$, 其他参数与例 2 中一致. 结果表明, 随着 $\alpha(m)$ (或 $\beta(m)$) 的增大和 δ_1 (或 δ_2) 的减小, \mathcal{R}_0 逐渐增大. 这就启发我们增强教育机制和采取相应的干预策略来减小 \mathcal{R}_0 的值有助于消除谣言传播.

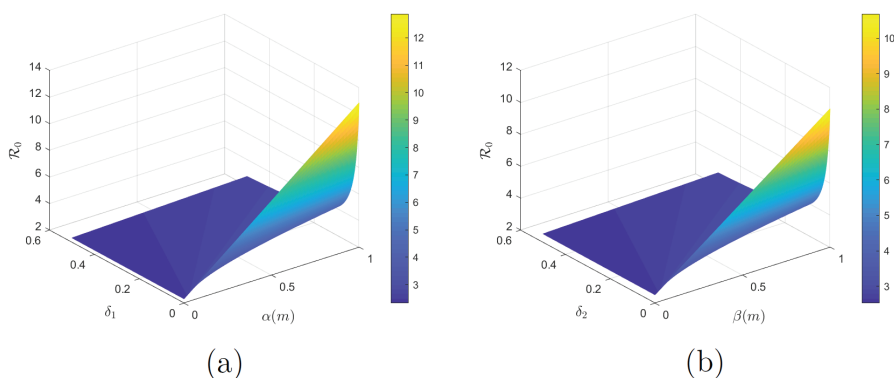


图 5 $\alpha(m), \delta_1$ 和 $\beta(m), \delta_2$ 分别与 \mathcal{R}_0 之间的关系

4 结论

在多语言环境和加权异质网络中, 提出了具有交叉传播的 I2SR 时滞谣言传播模型. 首先, 证明了解的的正性和有界性. 其次, 为了判定平衡点的存在唯一性以及稳定性, 定义了基本再生数 \mathcal{R}_0 . 通过证明得到: 当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时, 无谣言平衡点 E_0 是全局渐近稳定的; 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 谣言传播平衡点 E^* 是全局渐近稳定的. 最后, 数值模拟结果表明加大教育的投入和采取相应的控制策略来减小基本再生数的值有助于消除谣言的传播. 在未来, 我们将进一步研究自适应加权异质网络中具有时滞的谣言传播动力学行为, 同时考虑脉冲控制^[24]、间歇控制^[25]等策略来抑制谣言的传播.

参考文献:

- [1] VOSOUGHI S, ROY D, ARAL S. The spread of true and false news online[J]. Science, 2018, 359: 1146-1151.
- [2] THOMAS S A. Lies, damn lies, and rumors: an analysis of collective efficacy, rumors, and fear in the wake of Katrina[J]. Sociological Spectrum, 2007, 27: 679-703.
- [3] DALEY D J, KENDALL D G. Stochastic rumours[J]. IMA Journal of Applied Mathematics, 1965, 1(1): 42-55.
- [4] MAKI D P, THOMPSON M. Mathematical models and applications: with emphasis on the social, life, and management sciences[M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1973.
- [5] NEWMAN M E J. The structure and function of complex networks[J]. SIAM Review, 2003, 45(2): 167-256.

- [6] BOCCALETTI S, LATORA V, MORENO Y, et al. Complex networks: structure and dynamics[J]. *Physics Reports*, 2006, 424: 175-308.
- [7] WATTS D J, STROGATZ S H. Collective dynamics of 'small-world' networks[J]. *Nature*, 1998, 393: 440-442.
- [8] BARABÁSI A L, ALBERT R. Emergence of scaling in random networks[J]. *Science*, 1999, 286: 509-512.
- [9] ZANETTE D H. Critical behavior of propagation on small-world networks[J]. *Physical Review E*, 2001, 64(5): 050901.
- [10] ZANETTE D H. Dynamics of rumor propagation on small-world networks[J]. *Physical Review E*, 2002, 65(4): 041908.
- [11] NEKOVEE M, MORENO Y, BIANCONI G, et al. Theory of rumour spreading in complex social networks[J]. *Physica A*, 2007, 374: 457-470.
- [12] YOON S H, JEONG H, BARABÁSI A L. Weighted evolving networks[J]. *Physical Review Letters*, 2001, 86(25): 5835-5838.
- [13] BARRAT A, BARTHÉLEMY M, PASTOR-SATORRAS R, et al. The architecture of complex weighted networks[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2004, 101(11): 3747-3752.
- [14] BARRAT A, BARTHÉLEMY M, VESPIGNANI A. Weighted evolving networks: Coupling topology and weight dynamics[J]. *Physical review letters*, 2004, 92(22): 228701.
- [15] SINGH A, SINGH Y N. Rumor dynamics in weighted scale-free networks with degree correlations[J]. *Journal of Complex Networks*, 2015, 3(3): 450-468.
- [16] ZHANG Y H, ZHU J J. Dynamic behavior of an I2S2R rumor propagation model on weighted contract networks[J]. *Physica A*, 2019, 536: 120981.
- [17] 袁叙普, 胡海军, 李娟. 加权网络上一类 SIRS 传染病模型的动力学分析[J]. *应用数学进展*, 2019, 8(3): 371-380.
- [18] ZHU G H, CHEN G R, XU X J, et al. Epidemic spreading on contact networks with adaptive weights[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2013, 317: 133-139.
- [19] CHU X W, ZHANG Z Z, GUAN J H, et al. Epidemic spreading with nonlinear infectivity in weighted scale-free networks[J]. *Physica A*, 2011, 390(3): 471-481.
- [20] WANG J L, JIANG H J, MA T L, et al. Global dynamics of the multi-lingual SIR rumor spreading model with cross-transmitted mechanism[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2019, 126: 148-157.
- [21] LI J R, JIANG H J, MEI X H. Dynamical analysis of rumor spreading model in multi-lingual environment and heterogeneous complex networks[J]. *Information Sciences*, 2020, 536: 391-408.
- [22] YU S Z, YU Z Y, JIANG H J, et al. Dynamical study and event-triggered impulsive control of rumor propagation model on heterogeneous social network incorporating delay[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2021, 145: 110806.
- [23] MACDONALD P J, ALMAAS E, BARABÁSI A L. Minimum spanning trees of weighted scale-free networks[J]. *Europhysics Letters*, 2005, 72(2): 308-314.
- [24] MEI X H, ZHANG W L, YU Z Y, et al. Synchronization of competitive neural networks with time-varying delays and impulses effects[J]. *Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition)*, 2016, 33(3): 280-286.
- [25] MEI X H, LIU B, WU L J. Exponential synchronization of competitive neural networks with time delay under intermittent control[J]. *Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English)*, 2021, 38(5): 513-532+575.

责任编辑: 赵新科