

不可压缩的Brinkman-Forchheimer方程的 回溯两重网格法*

王小娟, 贾宏恩[†]

(太原理工大学 数学学院, 山西 晋中 030600)

摘要: 本文考虑了不可压缩的Brinkman-Forchheimer方程的回溯两重网格法. 该方法需要在粗网格上解一个非线性方程, 在细网格上解一个Stokes问题以及在粗网格上解一个线性校正问题. 最后给出了格式的能量误差估计, 并用数值实验验证了本文算法的有效性及其稳定性.

关键词: Brinkman-Forchheimer方程; 两重网格法; 误差估计

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2020.06.24.0002

中图分类号: O242.21 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2021)03-0275-010

引文格式: 王小娟, 贾宏恩. 不可压缩的Brinkman-Forchheimer方程的回溯两重网格法[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2021, 38(3): 275-284.

英文引文格式: WANG X J, JIA H E. A two-grid method with backtracking for the incompressible Brinkman-Forchheimer equations[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2021, 38(3): 275-284.

A Two-Grid Method with Backtracking for the Incompressible Brinkman-Forchheimer Equations

WANG Xiaojuan, JIA Hongen

(College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi 030600, China)

Abstract: In this paper, a two-grid method with backtracking for the incompressible Brinkman-Forchheimer equations is considered. The method needs to resolve a nonlinear equation on coarse mesh, a Stokes problem on the fine mesh and a linear correction problem on the coarse mesh. The energy error estimate of the format is given, moreover the effectiveness and stability of the proposed algorithm are validate by numerical tests.

Key words: Brinkman-Forchheimer equations; the two-grid method; error estimates

0 引言

考虑不可压缩的Brinkman-Forchheimer方程:

$$\begin{cases} -\nu\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \alpha|u|^{r-2}u + \nabla p = f, & \text{在}\Omega\text{内,} \\ \nabla \cdot u = 0, & \text{在}\Omega\text{内,} \\ u = 0, & \text{在}\partial\Omega\text{上,} \end{cases} \quad (1)$$

其中: Ω 是 \mathbb{R}^n ($n=2$ 或 3)中有界连通并具有Lipschitz连续的区域, 其边界为 $\partial\Omega$, u 是流体速度, p 是压力, $\nu > 0$ 是粘度系数, f 是体力, Forchheimer项 $\alpha|u|^{r-2}u$ ($2 \leq r < \infty, \alpha > 0$)是由Forchheimers定律导出的, 用来描述各种物理情况, 如多孔介质流动、摩擦效应以及某些耗散机制等.

* 收稿日期: 2020-06-24

基金项目: 山西省自然科学基金面上项目(201903D121038).

作者简介: 王小娟(1991-), 女, 硕士生, 从事有限元方法、偏微分方程理论及其数值计算、流体方程、相场方程的研究, E-mail: 1271582983@qq.com.

[†] 通讯作者: 贾宏恩(1981-), 男, 博士, 副教授, 从事有限元方法理论、偏微分方程理论及其数值计算、流体方程、相场方程的研究, E-mail: jiahongen@tyut.edu.cn.

方程(1)具有非线性和单调性. 近年来, 一些学者致力于Brinkman-Forchheimer方程数值分析的研究. 如文献[1]研究了Brinkman-Forchheimer方程的收敛性和连续依赖性; 文献[2]给出了求解这一问题的混合有限元方法, 证明了弱解的存在唯一性并进行了误差估计; 文献[3]讨论了混合有限元方法的超收敛性, 也可参考文献[4-7].

文献[8]提出了求解非线性问题的两重网格法, 该方法先在粗网格上求解一个非线性方程作为细网格的迭代初值近似, 然后在细网格求解线性问题, 与传统的方法相比可以节省大量的计算时间, 已被广泛应用于求解其他非线性方程^[9-14]. 文献[15]提出求解Navier-Stokes方程的回溯两重网格法.

本文将采用回溯两重网格法求解问题(1). 该方法需要先在粗网上求解非线性方程, 再在细网格上求解Stokes问题, 然后在粗网格上线性校正. 最后, 通过数值实验验证算法的有效性及其稳定性.

1 符号和准备工作

$W^{k,p}$ 表示Sobolev空间, 其中范数和半范为 $\|\cdot\|_{k,p}$ 和 $|\cdot|_{k,p}$. $L^2(\Omega)$ 上的内积空间定义为: $(p, q) = \int_{\Omega} pq \, dx, \forall p, q \in L^2(\Omega)$.

令 $X = (H_0^1(\Omega))^2$, $M = L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) | \int_{\Omega} q = 0\}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $H^1(\Omega)' \times H^1(\Omega)$ 的对偶积, $H^{-1}(\Omega)^2$ 是 $H_0^1(\Omega)^2$ 的对偶空间. 由嵌入定理得: $\|u\|_{0,i} \leq C \|u\|_1, \forall u \in X$.

引进如下的双线性、拟线性和三线性形式:

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \nu(\nabla u, \nabla v), \quad b(u, q) = -(\nabla \cdot u, q), \quad c(u; v, w) = \alpha(|u|^{r-2}v, w), \\ d(u; v, w) &= ((u \cdot \nabla)v, w) = \frac{1}{2}((u \cdot \nabla)v, w) - \frac{1}{2}((u \cdot \nabla)w, v) \end{aligned}$$

并且有以下不等式成立^[4-7]:

$$\begin{aligned} c(u; u, v) &\leq \alpha \| |u|^{r-2}u \|_{0,r'} \|v\|_{0,r} \\ |\xi|^{r-2}\xi - |\vartheta|^{r-2}\vartheta &\leq C(|\xi| + |\vartheta|)^{r-2}|\xi - \vartheta|, \quad \forall \xi, \vartheta \in \mathbb{R}^n \\ |\xi|^{r-2} - |\vartheta|^{r-2} &\leq C(|\xi|^{r-3} + |\vartheta|^{r-3})|\xi - \vartheta|, \quad \forall \xi, \vartheta \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (2)$$

其中: $r' = \frac{r}{r-1}$ 是 r 的共轭数, C 是正常数.

引理1^[15] 假设 Ω 的边界满足强Lipschitz条件, 下面三线性形式的不等式成立:

$$\begin{aligned} |d(u, v, w)| &\leq C \|u\|_1 \|v\|_1 \|w\|_1, \forall u, v, w \in X; \\ |d(u, v, w)| &\leq C \|u\|_0^{1-s} \|u\|_1^s \|v\|_1 \|w\|_1, \forall u, v, w \in X; \\ |d(u, v, w)| &\leq C \|u\|_0 \|v\|_1 \|w\|_2, \forall u, v \in X, w \in H^2(\Omega); \\ |d(u, v, w)| &\leq C \|u\|_0 \|v\|_1 \|w\|_2, \forall u, w \in X, v \in H^2(\Omega); \\ |d(u, v, w)| &\leq C \|u\|_2 \|v\|_0 \|w\|_1, \forall v, w \in X, u \in H^2(\Omega); \\ |d(u, v, w)| &\leq C \|u\|_1 \|v\|_2 \|w\|_0, \forall u, w \in X, v \in H^2(\Omega); \\ |d(u, v, w)| &\leq C (\|u\|_0 \|v\|_{1,\infty} + \|u\|_1 \|v\|_{0,\infty}) \|w\|_0, \forall u, w \in X, v \in W^{1,\infty}(\Omega). \end{aligned}$$

其中: 当 $n=2$ 时, $s = \epsilon > 0$ (任意小); 当 $n=3$ 时, $s = \frac{1}{2}$.

方程(1)的弱形式: 求 $(u, p) \in (X, M)$ 使得

$$a(u, v) + b(v, p) - b(u, q) + c(u; u, v) + d(u; u, v) = (f, v), \forall (v, q) \in (X, M) \quad (3)$$

问题(3)的解的存在性和唯一性, 详见文献[7].

2 两重网格法

令 Π_{η} 表示将 Ω 均匀规则地划分为网格大小为 η 的三角形剖分, 其中 $\eta = h$ 或 H 且 $H > h$. 由粗网格 Π_H 生成细网格 Π_h , 所以嵌套, 并构造速度-压力有限元空间 (X_{η}, M_{η}) . 空间 X_{η} 和 M_{η} 满足以下假设:

(A₁) 对于 $\forall (v, q) \in (H^{k+1}(\Omega))^2 \times H^k(\Omega)$, $k \geq 1$, 存在 $(I_{\eta}v, J_{\eta}q) \in X_{\eta} \times M_{\eta}$ 使得

$\|v - I_\eta v\|_0 \leq C\eta^{k+1} \|v\|_{k+1}$, $\|v - I_\eta v\|_1 \leq C\eta^k \|v\|_{k+1}$, $\|q - J_\eta q\|_0 \leq C\eta^k \|q\|_k$, 其中 C 是与 η 无关的正常数.

(A₂) LBB条件: 存在与 η 无关的正常数 β 使得 $\inf_{q \in M_\eta} \sup_{v_\eta \in X_\eta} \frac{b(v_\eta, q)}{|v_\eta|_1 \|q\|_0} \geq \beta$, 其中 $\eta = H$ 或 h .

方程(3)的混合有限元格式是: 求 $(u_\eta, p_\eta) \in X_\eta \times M_\eta$ 使得

$$a(u_\eta, v) + b(v, p_\eta) - b(u_\eta, q) + c(u_\eta; u_\eta, v) + d(u_\eta; u_\eta, v) = (f, v), \quad \forall (v, q) \in (X_\eta, M_\eta) \tag{4}$$

问题(4)的存在性、唯一性及收敛性分析, 参见文献[7].

引理2^[6-7, 15] 设 $(u, p), (u_\eta, p_\eta)$ ($\eta = h$ 或 H)分别是方程(3)和(4)的解, 对于 $\forall (u, p) \in (H_0^1(\Omega) \cap H^{k+1}(\Omega))^n \times (L_0^2(\Omega) \cap H^k(\Omega))$ 有:

$$\inf_{(u_\eta, p_\eta) \in (X_\eta, M_\eta)} (\eta \|u - u_\eta\|_1 + \|u - u_\eta\|_0 + \eta \|p - p_\eta\|_0) \leq C\eta^{k+1} (\|u_\eta\|_{k+1} + \|p_\eta\|_k).$$

下面给出两重网格法:

步骤1: 求 $(u_H, p_H) \in (X_H, M_H)$, 使得对于 $\forall (v, q) \in (X_H, M_H)$ 有

$$a(u_H, v) + b(v, p_H) - b(u_H, q) + c(u_H; u_H, v) + d(u_H; u_H, v) = (f, v), \tag{5}$$

步骤2: 求 $(u_h, p_h) \in (X_h, M_h)$, 使得对于 $\forall (v, q) \in (X_h, M_h)$ 有

$$a(u_h, v) + b(v, p_h) - b(u_h, q) + c(u_h; u_h, v) + d(u_h; u_h, v) = (f, v), \tag{6}$$

步骤3: 求 $(e_H, \varepsilon_H) \in (X_H, M_H)$, 使得对于 $\forall (v, q) \in (X_H, M_H)$ 有

$$\begin{aligned} a(e_H, v) + b(v, \varepsilon_H) - b(e_H, q) + c(u_H; e_H, v) + d(u_H; e_H, v) + d(e_H; u_H, v) \\ = c(u_H; u_H - u_h, v) + d(u_H - u_h; u_H, v) + d(u_H; u_H - u_h, v), \end{aligned} \tag{7}$$

其中: $u^* = u_h + e_H$, $p^* = p_h + \varepsilon_H$.

为了便于分析, 将内积空间定义为: $Y_\eta = (X_\eta, M_\eta)$ ($\eta = H$ 或 h)和 $Y = (X, M)$, 定义范数为 $\| (v, q) \| = (\|v\|_1^2 + \|q\|_0^2)^{\frac{1}{2}}$, 并引入连续双线性形式 $A_H: Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $B_H: Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

$$\begin{aligned} A_H[(u, p); (v, q)] &= a(u, v) + b(v, p) - b(u, q), \\ B_H[(u, p); (v, q)] &= a(u, v) + b(v, p) - b(u, q) + c(u_H; u, v) + d(u_H; u, v) + d(u; u_H, v). \end{aligned}$$

则两重网格法的步骤2和步骤3可以改写为:

$$\begin{aligned} A_H[(u_h, p_h); (v, q)] &= (f, v) - c(u_H; u_H, v) - d(u_H; u_H, v), \\ B_H[(e_H, \varepsilon_H); (v, q)] &= c(u_H; u_H - u_h, v) + d(u_H - u_h; u_H, v) + d(u_H; u_H - u_h, v). \end{aligned}$$

A_H 和 B_H 在 $Y \times Y$ 上连续且依赖于 $|u_H|_1$. 当 H 足够小, 可以证明 $|u_H|_1 \leq |u_H - u|_1 + |u|_1 \leq CH(|u|_2 + |p|_1) + |u|_1 \leq C(u, p)$. 并且 A_H 和 B_H 满足[15]:

$$\inf_{(v, q) \in Y_H} \sup_{(u, p) \in Y_H} \frac{A_H[(u, p); (v, q)]}{\| (u, p) \| \| (v, q) \|} \geq \gamma > 0, \tag{8}$$

$$\inf_{(v, q) \in Y_H} \sup_{(u, p) \in Y_H} \frac{B_H[(u, p); (v, q)]}{\| (u, p) \| \| (v, q) \|} \geq \gamma > 0, \tag{9}$$

引入Galerkin投影 $(Q, R): Y \rightarrow Y_H$ 满足 $B_H[(w, t); (v - Q(v, q), q - R(v, q))] = 0, \quad \forall (w, t) \in Y_H, (v, q) \in Y$.

为了导出 $v - Q(v, q)$ 的 L^2 估计, 令 $(\phi, \varphi) \in Y$ 满足

$$a(\phi, w) + b(w, \varphi) - b(\phi, t) + c(u; \phi, w) + d(u; \phi, w) + d(\phi; u, w) = (f, w), \quad \forall (w, t) \in Y \tag{10}$$

因为 u 是非奇异解, 所以 (ϕ, φ) 存在唯一. 若(10)是 H^2 正则的, 则对 $\forall f \in (L^2(\Omega))^n$, 解 $(\phi, \varphi) \in (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))^n \times (L_0^2(\Omega) \cap H^1(\Omega))$ 有 $\|\phi\|_2 + \|\varphi\|_1 \leq C \|f\|_0$.

引理3 若 u 是非奇异解, 则 (Q, R) 满足:

- (I) $|||(v - Q(v, q), q - R(v, q))||| \leq C |||(v, q)|||, \quad \forall (v, q) \in Y;$
 (II) $\|v - Q(v, q)\|_{\theta} \leq CH^{1-\theta} |||(v, q)|||, \quad \forall (v, q) \in Y, \forall \theta \in [0, 1];$
 (III) $\|v - Q(v, q)\|_0 + H \|v - Q(v, q)\|_1 \leq CH^2(\|v\|_2 + \|q\|_1), \quad \forall (v, q) \in Y \cap ((H^2(\Omega))^n \times H^1(\Omega)).$

证明 (I) 利用(9)式和 B_H 的连续性得:

$$|||(Q(v, q), R(v, q))||| \leq \frac{1}{\gamma} \sup_{(w, t) \in Y_H} \frac{B_H[(w, t); (Q(v, q), R(v, q))]}{|||(w, t)|||} = \frac{1}{\gamma} \sup_{(w, t) \in Y_H} \frac{B_H[(w, t); (v, q)]}{|||(w, t)|||} \leq \frac{C}{\gamma} |||(v, q)|||.$$

然后利用三角不等式证明.

(II) 令 (ϕ_f, φ_f) 为(10)式的解, 对于右边 $f = v - Q(v, q) \in (L^2(\Omega))^n$. 通过计算

$$B_H[(\phi_f, \varphi_f); (w, t)] = (f, w) + c(u_H; \phi_f, w) - c(u; \phi_f, w) + d(u_H - u; \phi_f, w) + d(\phi_f; u_H - u, w).$$

设 $w = v - Q(v, q), t = q - R(v, q)$, 然后利用投影性质, (2)式, 引理1, 引理2和嵌入定理得:

$$\begin{aligned} \|v - Q(v, q)\|_0^2 &= B_H[(\phi_f - \phi_H, \varphi_f - \varphi_H); (v - Q(v, q), q - R(v, q))] + \{c(u; \phi_f, v - Q(v, q)) \\ &\quad - c(u_H; \phi_f, v - Q(v, q))\} + d(u - u_H; \phi_f, v - Q(v, q)) + d(\phi_f; u - u_H, v - Q(v, q)) \\ &\leq C(|||(\phi_f - \phi_H, \varphi_f - \varphi_H)||| |||(v - Q(v, q), q - R(v, q))||| \\ &\quad + \alpha(\|u\|_{0,6(r-3)}^{r-3} + \|u_H\|_{0,6(r-3)}^{r-3}) \|\phi_f\|_{0,6} \|u - u_H\|_{0,6} \|v - Q(v, q)\|_0 \\ &\quad + C \|u - u_H\|_1 \|\phi_f\|_2 \|v - Q(v, q)\|_0 + C \|u - u_H\|_1 \|\phi_f\|_1 \|v - Q(v, q)\|_1 \\ &\leq CH \|v - Q(v, q)\|_0 |||(v, q)|||, \quad \forall (\phi_H, \varphi_H) \in Y_H. \end{aligned}$$

再利用上述不等式和插值不等式得:

$$\|v - Q(v, q)\|_{\theta} \leq \|v - Q(v, q)\|_0^{1-\theta} \|v - Q(v, q)\|_1^{\theta} \leq CH^{1-\theta} |||(v, q)|||.$$

(III) 当 $(v, q) \in Y \cap ((H^2(\Omega))^n \times H^1(\Omega))$ 时, 利用 $(I_H v, J_H q) \in Y_H$ 和(8)式得:

$$|||(I_H v - Q(v, q), J_H q - R(v, q))||| \leq \frac{1}{\gamma} \sup_{(w, t) \in Y_H} \frac{B_H[(w, t); (I_H v - v, J_H q - q)]}{|||(w, t)|||}$$

然后, 利用三角不等式和插值的性质得:

$$|||(v - Q(v, q), q - R(v, q))||| \leq (1 + \frac{C}{\gamma}) H(\|v\|_2 + \|q\|_1) \quad (11)$$

再重复以上步骤并利用(11)式得:

$$\|v - Q(v, q)\|_0 \leq CH^2(\|v\|_2 + \|q\|_1). \quad (12)$$

最后, 利用插值不等式和(12)式证明结论.

3 能量误差估计

定理1 假设 $X_H \subset X_h \subset X, M_H \subset M_h \subset M$ 满足逼近性假设及LBB条件. 记 (u, p) 为(3)式的解且 $u \in (H_0^1(\Omega) \cap H^{k+1}(\Omega))^n, p \in (L_0^2(\Omega) \cap H^k(\Omega))$, 则有:

$$|||(u - u^*, p - p^*)||| \leq C(h^k + H^{k+1} + H^{2k+1-s}),$$

$$\text{当 } h = O(H^{1+\frac{1}{k}}) \text{ 时, } |||(u - u^*, p - p^*)||| \leq Ch^k.$$

其中: $u^* = u_h + e_H, p^* = p_h + \varepsilon_H, C$ 为常数. 当 $n=2$ 时, $s = \epsilon > 0$ (任意小); 当 $n=3$ 时, $s = \frac{1}{2}$.

证明 首先, 考虑步骤2之后的误差, 误差满足:

$$\begin{aligned} A_H[(u - u_h, p - p_h); (v, q)] &= c(u_H; u_H, v) - c(u; u, v) + d(u_H; u_H, v) - d(u; u, v) \\ &= c(u_H; u_H, v) - c(u; u, v) + d(u_H - u; u_H - u, v) + d(u; u_H - u, v) + d(u_H - u; u, v). \end{aligned} \tag{13}$$

由(13)式及 A_H 的连续性得:

$$\begin{aligned} A_H[(I_h u - u_h, J_h p - p_h); (v, q)] &= A_H[(I_h u - u, J_h p - p); (v, q)] + c(u_H; u_H, v) - c(u; u, v) \\ &\quad + d(u_H - u; u_H - u, v) + d(u; u_H - u, v) + d(u_H - u; u, v). \end{aligned} \tag{14}$$

根据三角不等式, (A_1) , (2)式, (8)式, (14)式, 嵌入定理, 引理1和引理2得:

$$\begin{aligned} &||| (u - u_h, p - p_h) ||| \leq ||| (u - I_h u, p - J_h p) ||| + ||| (I_h u - u_h, J_h p - p_h) ||| \\ &\leq Ch^k (\|u\|_{k+1} + \|p\|_k) + \frac{1}{\gamma} \sup_{(v,q) \in Y_h} \frac{A_H[(I_h u - u_h, J_h p - p_h); (v, q)]}{|||(v, q)|||} \\ &\leq Ch^k + \frac{1}{\gamma} \sup_{(v,q) \in Y_h} \frac{A_H[(I_h u - u, J_h p - p); (v, q)]}{|||(v, q)|||} + \frac{1}{\gamma} \sup_{(v,q) \in Y_h} \frac{c(u_H; u_H, v) - c(u; u, v)}{|||(v, q)|||} \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} \sup_{(v,q) \in Y_h} \frac{d(u_H - u; u_H - u, v) + d(u; u_H - u, v) + d(u_H - u; u, v)}{|||(v, q)|||} \\ &\leq Ch^k + C \|u - u_H\|_0 (\|u\|_{0,6(r-2)} + \|u_H\|_{0,6(r-2)})^{r-2} + C(\|u_H - u\|_0^{1-s} \|u_H - u\|_1^{1+s} + \|u_H - u\|_0 \|u\|_1) \\ &\leq C(h^k + H^{k+1} + H^{2k+1-s}). \end{aligned} \tag{15}$$

利用(3)式和(6)式得:

$$\begin{aligned} B_H[(u - u_h, p - p_h); (v, q)] &= c(u_H; u_H, v) - c(u; u, v) + d(u_H; u_H, v) - d(u; u, v) \\ &\quad + c(u_H; u - u_h, v) + d(u_H; u - u_h, v) + d(u - u_h; u_H, v), \quad \forall (v, q) \in Y_h. \end{aligned} \tag{16}$$

然后, 由(3)式, (7)式和 (Q, R) 的定义得:

$$\begin{aligned} B_H[(e_H, \varepsilon_H); (v, q)] &= B_H[(e_H, \varepsilon_H); (Q(v, q), R(v, q))] = c(u_H; u_H - u_h, Q(v, q)) \\ &\quad + d(u_H; u_H - u_h, Q(v, q)) + d(u_H - u_h; u_H, Q(v, q)), \quad \forall (v, q) \in Y_h. \end{aligned} \tag{17}$$

(17)式减去(16)式, 且 $u^* = u_h + e_H, p^* = p_h + \varepsilon_H$ 得:

$$\begin{aligned} B_H[(u - u^*, p - p^*); (v, q)] &= -c(u_H; u_H - u_h, Q(v, q) - v) - c(u_H; u_H - u_h, v) + c(u_H; u_H, v) - c(u; u, v) + \\ &\quad c(u_H; u - u_h, v) - d(u_H - u_h; u_H, Q(v, q) - v) - d(u_H; u_H - u_h, Q(v, q) - v) - d(u - u_H; u - u_H, v). \end{aligned}$$

再由三角不等式, (A_1) 和(9)式得:

$$\begin{aligned} &||| (u - u^*, p - p^*) ||| \leq ||| (u - I_h u, p - J_h p) ||| + ||| (I_h u - u^*, J_h p - p^*) ||| \\ &\leq Ch^k + \frac{1}{\gamma} \sup_{(v,q) \in Y_h} \frac{B_H[(I_h u - u^*, J_h p - p^*); (v, q)]}{|||(v, q)|||}. \end{aligned} \tag{18}$$

记

$$\begin{aligned} &B_H[(u - u^*, p - p^*); (v, q)] = c(u_H; u_H - u, v - Q(v, q)) + c(u_H; u - u_h, v - Q(v, q)) \\ &\quad + \{c(u_H; u, v) - c(u; u, v)\} - d(u_H - u; u_h - u, v - Q(v, q)) - d(u; u - u_H, v - Q(v, q)) \\ &\quad + 2d(u - u_H; u - u_H, v - Q(v, q)) - d(u; u_h - u, v - Q(v, q)) - d(u - u_H; u - u_H, v) \\ &\quad - d(u_h - u; u_H - u, v - Q(v, q)) - d(u - u_H; u, v - Q(v, q)) + d(u - u_h; u, v - Q(v, q)) \\ &= \sum_{j=1}^{11} S_j \end{aligned}$$

然后, 利用(2)式, 嵌入定理, 引理1, 引理2和引理3分别估计 $S_j(j=1, \dots, 11)$:

$$\begin{aligned}
 |S_1| &\leq \alpha \|u_H\|_{0,3(r-2)}^{r-2} \|u - u_H\|_{0,6} \|v - Q(v, q)\|_0 \leq CH^{k+2} \|(v, q)\|, \\
 |S_2| &\leq \alpha \|u_H\|_{0,3(r-2)}^{r-2} \|u - u_h\|_{0,6} \|v - Q(v, q)\|_0 \leq CH^2 h^k \|(v, q)\|, \\
 |S_3| &\leq C \int_{\Omega} |u - u_H| (|u|^{r-3} + |u_H|^{r-3}) |u| |v| \leq C \|u - u_H\|_0 \\
 &(\|u\|_{0,6(r-3)}^{r-3} + \|u_H\|_{0,6(r-3)}^{r-3}) \|u\|_{0,6} \|v\|_{0,6} \leq CH^{k+1} \|(v, q)\|, \\
 |S_4| &\leq C |u_h - u|_1 |u_H - u|_1 |v - Q(v, q)|_1 \leq C(h^k + H^{k+1}) H^k \|(v, q)\|, \\
 |S_5| &\leq C \|u - u_H\|_0 \|u\|_2 |v - Q(v, q)|_1 \leq CH^{k+1} \|(v, q)\|, \\
 |S_6| &\leq C \|u - u_H\|_0^{1-s} |u - u_H|_1^{s+1} |v - Q(v, q)|_1 \leq CH^{2k+1-s} \|(v, q)\|, \\
 |S_7| &\leq C |u_h - u|_1 |u|_1 |v - Q(v, q)|_1 \leq C(h^k + H^{k+1}) \|(v, q)\|, \\
 |S_8| &\leq C \|u - u_H\|_0^{1-s} |u - u_H|_1^{s+1} |v - Q(v, q)|_1 \leq CH^{2k+1-s} \|(v, q)\|, \\
 |S_9| &\leq C |u_h - u|_1 |u_H - u|_1 |v - Q(v, q)|_1 \leq C(h^k H^k + H^{2k+1}) \|(v, q)\|, \\
 |S_{10}| &\leq C \|u - u_H\|_0 \|u\|_2 |v - Q(v, q)|_1 \leq CH^{k+1} \|(v, q)\|, \\
 |S_{11}| &\leq C |u_h - u|_1 |u|_1 |v - Q(v, q)|_1 \leq C(h^k + H^{k+1}) \|(v, q)\|. \tag{19}
 \end{aligned}$$

最后, 将(19)式代入(18)式证明定理.

4 数值算例

在这部分进行数值实验. 第一个例子是用光滑精确解验证算法的收敛阶. 第二个例子是用方腔驱动流证明算法的稳定性. 另外, 我们将比较标准有限元算法和两重网格法的CPU时间. 所有的算法都是用有限元软件FreeFem++^[16]实现.

4.1 收敛测验

问题(1)的精确的解:

$$\begin{cases} u_1 = 10x^2(x-1)^2y(y-1)(2y-1), \\ u_2 = 10x(x-1)y^2(y-1)^2, \\ p = 10(2x-1)^2(2y-1), \end{cases} \tag{20}$$

其中 f 是将精确解代入(1)式所得.

取 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, $h = 1/49, 1/64, 1/81, 1/100, 1/121$, 采用 $P_2 - P_1$ 元时, $H = h^{\frac{2}{3}}$, 取 $r = 3, \alpha = 1, \nu = 0.1$; 采用 $P_1 b - P_1$ 元时, $H = h^{\frac{1}{2}}$, 取 $r = 4, \alpha = 10, \nu = 1$. 数值结果分别见表1~表6.

表 1 利用 $P_2 - P_1$ 元的标准有限元算法的数值结果

Tab 1 The numerical results of the standard finite element method using $P_2 - P_1$ element

| h | $\ e_u\ _{L^2}$ | 收敛阶 | $\ e_u\ _{H^1}$ | 收敛阶 | $\ e_p\ _{L^2}$ | 收敛阶 |
|-----------------|----------------------------|----------|-----------------|----------|----------------------------|----------|
| $\frac{1}{49}$ | $2.096\ 02 \times 10^{-5}$ | | 0.001 227 89 | | 0.000 322 614 | |
| $\frac{1}{64}$ | $9.408\ 76 \times 10^{-6}$ | 2.999 24 | 0.000 720 093 | 1.998 3 | 0.000 189 111 | 1.999 99 |
| $\frac{1}{81}$ | $4.644\ 86 \times 10^{-6}$ | 2.996 53 | 0.000 449 661 | 1.998 96 | 0.000 118 061 | 2 |
| $\frac{1}{100}$ | $2.475\ 13 \times 10^{-6}$ | 2.987 21 | 0.000 295 065 | 1.999 32 | $7.745\ 97 \times 10^{-5}$ | 2.000 01 |
| $\frac{1}{121}$ | $1.408\ 2 \times 10^{-6}$ | 2.958 66 | 0.000 201 551 | 1.999 54 | $5.290\ 6 \times 10^{-5}$ | 2 |

表 2 利用 $P_2 - P_1$ 元的两重网格法的数值结果

Tab 2 The numerical results of the two-grid method using $P_2 - P_1$ element

| H | h | $\ e_u\ _{L^2}$ | 收敛阶 | $\ e_u\ _{H^1}$ | 收敛阶 | $\ e_p\ _{L^2}$ | 收敛阶 |
|----------------|-----------------|-----------------|----------|-----------------|----------|-----------------|----------|
| $\frac{1}{14}$ | $\frac{1}{49}$ | 0.000 902 121 | | 0.014 876 7 | | 0.003 952 03 | |
| $\frac{1}{17}$ | $\frac{1}{64}$ | 0.000 502 97 | 3.009 01 | 0.010 126 4 | 1.981 14 | 0.002 680 27 | 2 |
| $\frac{1}{19}$ | $\frac{1}{81}$ | 0.000 360 033 | 3.005 92 | 0.008 119 67 | 1.985 66 | 0.002 145 7 | 2 |
| $\frac{1}{22}$ | $\frac{1}{100}$ | 0.000 231 779 | 3.004 1 | 0.006 066 28 | 1.988 66 | 0.001 600 41 | 1.999 99 |
| $\frac{1}{25}$ | $\frac{1}{121}$ | 0.000 157 897 | 3.002 67 | 0.004 703 02 | 1.991 19 | 0.001 239 35 | 2.000 05 |

表 3 利用 $P_2 - P_1$ 元的两种方法的CPU时间(单位: s)

Tab 3 The comparison of the CPU times (unit: s) for two methods using $P_2 - P_1$ element

| h | 标准有限元方法 | 两重网格法 | 节省时间 |
|-----------------|---------|--------|--------|
| $\frac{1}{49}$ | 15.17 | 5.193 | 65.78% |
| $\frac{1}{64}$ | 26.578 | 8.02 | 69.82% |
| $\frac{1}{81}$ | 43.089 | 12.274 | 71.51% |
| $\frac{1}{100}$ | 66.003 | 18.517 | 71.95% |
| $\frac{1}{121}$ | 99.699 | 27.386 | 72.53% |

表 4 利用 $P_1b - P_1$ 元的标准有限元算法的数值结果

Tab 4 The numerical results of the standard finite element method using $P_1b - P_1$ element

| h | $\ e_u\ _{L^2}$ | 收敛阶 | $\ e_u\ _{H^1}$ | 收敛阶 | $\ e_p\ _{L^2}$ | 收敛阶 |
|-----------------|-----------------|----------|-----------------|----------|-----------------|----------|
| $\frac{1}{49}$ | 0.003 015 12 | | 0.053 784 6 | | 0.001 067 66 | |
| $\frac{1}{64}$ | 0.001 762 99 | 2.009 39 | 0.041 100 3 | 1.007 15 | 0.000 704 583 | 1.556 28 |
| $\frac{1}{81}$ | 0.001 098 65 | 2.007 61 | 0.032 433 9 | 1.005 29 | 0.000 489 834 | 1.543 27 |
| $\frac{1}{100}$ | 0.000 719 877 | 2.006 25 | 0.026 249 | 1.004 06 | 0.000 354 506 | 1.534 45 |
| $\frac{1}{121}$ | 0.000 491 197 | 2.005 22 | 0.021 680 1 | 1.003 21 | 0.000 264 918 | 1.528 19 |

表 5 利用 $P_1b - P_1$ 元的两重网格法的数值结果

Tab 5 The numerical results of the two-grid method using $P_1b - P_1$ element

| H | h | $\ e_u\ _{L^2}$ | 收敛阶 | $\ e_u\ _{H^1}$ | 收敛阶 | $\ e_p\ _{L^2}$ | 收敛阶 |
|----------------|-----------------|-----------------|----------|-----------------|----------|-----------------|----------|
| $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{49}$ | 0.148 778 | | 0.405 104 | | 0.025 845 5 | |
| $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{64}$ | 0.114 938 | 1.932 6 | 0.350 619 | 1.081 72 | 0.021 111 2 | 1.515 25 |
| $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{81}$ | 0.091 103 8 | 1.973 06 | 0.308 606 | 1.083 64 | 0.017 029 5 | 1.824 17 |
| $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{100}$ | 0.073 910 3 | 1.985 06 | 0.275 787 | 1.067 16 | 0.014 455 | 1.555 68 |
| $\frac{1}{11}$ | $\frac{1}{121}$ | 0.061 086 1 | 1.999 45 | 0.249 16 | 1.065 3 | 0.012 185 1 | 1.792 32 |

表 6 利用 $P_1b - P_1$ 元的两种方法的CPU时间(单位: s)

Tab 6 The comparison of the CPU times (unit: s) for two methods using $P_1b - P_1$ element

| h | 标准有限元方法 | 两重网格法 | 节省时间 |
|-----------------|---------|--------|--------|
| $\frac{1}{49}$ | 8.329 | 2.753 | 66.95% |
| $\frac{1}{64}$ | 15.017 | 4.6 | 69.37% |
| $\frac{1}{81}$ | 23.543 | 7.277 | 69.09% |
| $\frac{1}{101}$ | 36.397 | 11.119 | 69.45% |
| $\frac{1}{121}$ | 52.783 | 16.72 | 68.32% |

由表1、表2得: 采用 $P_2 - P_1$ 元时所有的收敛阶完全符合理论分析; 由表4、表5知: 采用 $P_1b - P_1$ 元时速度的收敛阶可以达到理论值, 而压力的收敛阶比理论分析高. 此外, 两种方法的收敛阶几乎相同, 但两重网格法比标准有限元方法节省了60%以上的CPU时间, 见表3和表6, 所以回溯两重网格法更有效.

4.2 方腔驱动流

在区域 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ 上进行计算, 在没有其他体力的情况下, 流动是由施加在顶部边界上的切向速度场驱动的. 在 $\partial\Omega$ 上施加速度的法向分量为零, 切向分量除沿顶部的边界设为1其余为零. 采用 $P_2 - P_1$ 元取 $h = 1/25$ 及不同的 r, α, ν 比较两种方法的CPU时间, 见表7. 然后取 $r = 3, \alpha = 10, \nu = 1$ 和 $r = 4, \alpha = 10, \nu = 0.1$ 分别描述两种方法的流线和压力等高线, 如图1~图4所示.

表 7 两种方法的CPU(时间: s)比较

Tab 7 The comparison of the CPU times (unit: s) for two methods

| | 标准有限元方法 | 两重网格法 |
|----------------------------------|---------|-------|
| $\alpha = 10, r = 3, \nu = 1$ | 3.489 | 3.081 |
| $\alpha = 10, r = 4, \nu = 1$ | 3.527 | 3.118 |
| $\alpha = 10, r = 4, \nu = 0.1$ | 5.742 | 4.956 |
| $\alpha = 10, r = 4, \nu = 0.01$ | 16.159 | 14.49 |
| $\alpha = 50, r = 3, \nu = 1$ | 5.329 | 4.279 |
| $\alpha = 100, r = 3, \nu = 1$ | 6.276 | 5.476 |

通过图1~图4和表7可以观察到: 这两种方法的流线和压力等值线几乎相同, 但两重网格法比标准有限元方法节省时间. 因此, 回溯两重网格法是稳定的并且比标准有限元方法更有效.

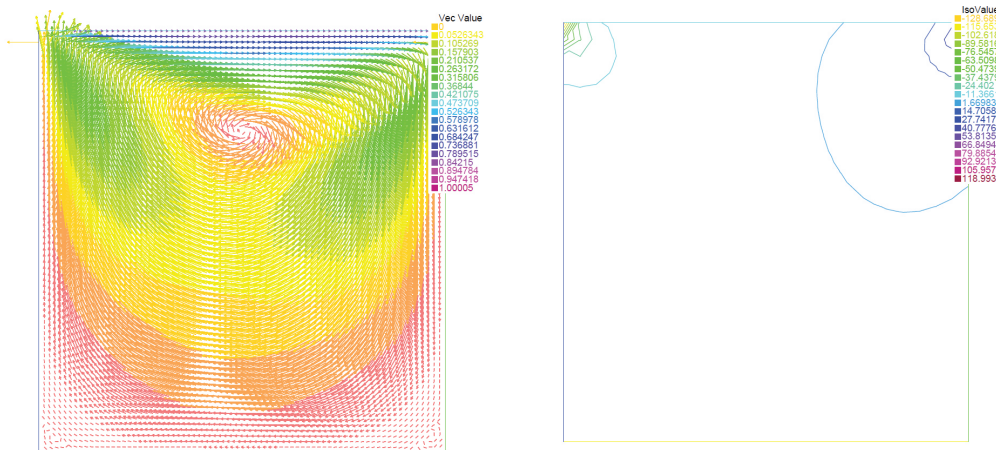


图 1 标准有限元法的流线(左)和压力等值线(右)

Fig 1 The streams (left) and pressure contours (right) of the standard finite element method

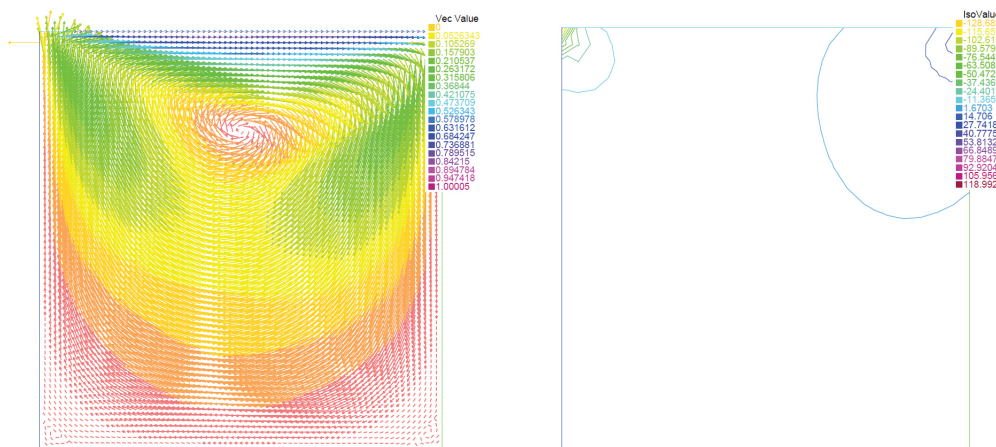


图 2 两重网格法的流线(左)和压力等值线(右)

Fig 2 The streams (left) and pressure contours (right) of the two-grid method

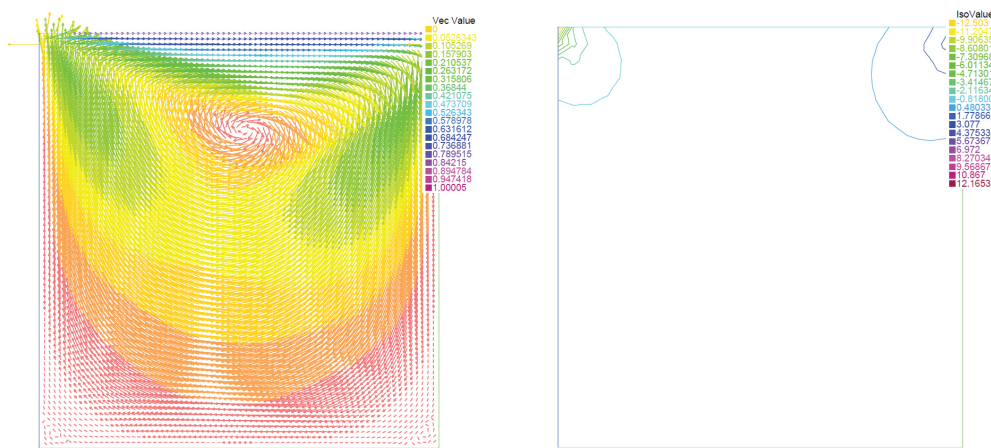


图3 标准有限元法的流线(左)和压力等值线(右)

Fig 3 The streams (left) and pressure contours (right) of the standard finite element method

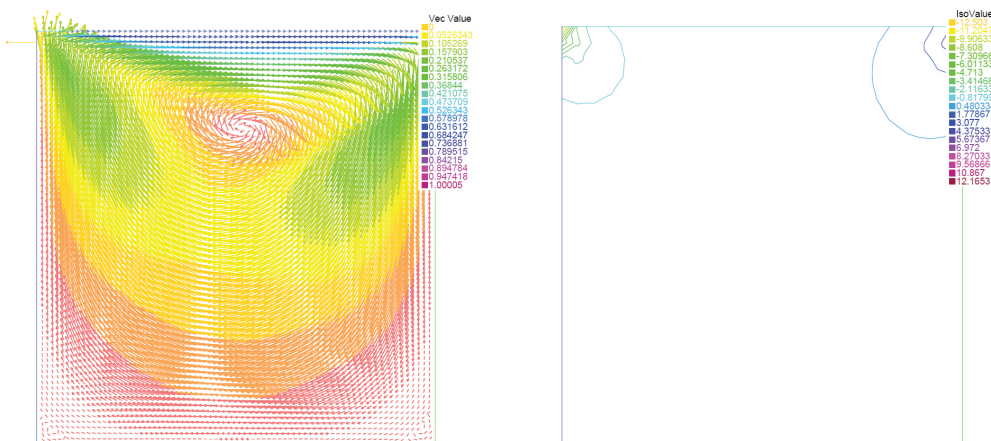


图4 两重网格法的流线(左)和压力等值线(右)

Fig 4 The streams (left) and pressure contours (right) of the two-grid method

5 结论

本文讨论了不可压缩的Brinkman-Forchheimer方程的回溯两重网格法. 通过两个数值实验对理论分析进行验证, 可知该算法是稳定的, 两种方法具有相同的收敛阶, 但是在保持相同的收敛阶时两重网格法可以节省大量的时间, 因此回溯两重网格法更有效.

参考文献:

- [1] LIU Y. Convergence, continuous dependence for the Brinkman-Forchheimer equations[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2009, 49: 1401-1415.
- [2] LIU D M, LI K T. Finite element analysis of the Stokes equations with damping[J]. Mathematica Numerica Sinica, 2010, 32(4): 433-448.
- [3] SHI D Y, YU Z Y. Superclose and superconvergence of finite element discretizations for the Stokes equations with damping[J]. Applied Mathematic and Computation, 2013, 219(14): 7693-7698.
- [4] LIU D M, LI K T. Mixed finite element for two-dimensional incompressible convective Brinkman-Forchheimer equations[J]. Mathematics and Mechanics, 2019, 40(6): 889-910.
- [5] ZHAO C D, YOU Y C. Approximation of the incompressible convective Brinkman-Forchheimer equations[J]. Journal of Evolution Equations, 2012, 12(4): 767-788.
- [6] LI Z Z, SHI D Y, LI M H. Stabilized mixed finite element methods for the Navier-Stokes equations with damping[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2019, 42: 605-619.

- [7] LI M H, SHI D Y, LI Z Z, et al. Two-level mixed finite element methods for the Navier-Stokes equations with damping[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2019, 470(1): 292-307.
- [8] XU J. Two-grid discretization techniques for linear and nonlinear PDEs[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1996, 33(5): 1759-1777.
- [9] CHEN Y P, HUANG Y Q, YU D H. A two-grid method for expanded mixed finite-element solution of semilinear reaction-diffusion equations[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, 57(2): 193-209.
- [10] CHEN L P, CHEN Y P. Two-grid method for nonlinear reaction-diffusion equations by mixed finite element methods[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2011, 49(3): 383-401.
- [11] ZHANG T, YUAN J Y, SI Z Y. Decoupled two-grid finite element method for the time-dependent natural convection problem I : spatial discretization[J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations An International Journal*, 2015, 31(6): 2135-2168.
- [12] GIRAULT V, LIONS J L. Two-grid finite element scheme for the steady Navier-Stokes equations in polyhedra[J]. *Portugaliae Mathematica*, 2001, 58(1): 25-58.
- [13] GIRAULT V, LIONS J L. Two-grid finite element scheme for the transient Navier-Stokes problem[J]. *ESAIM Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 2001, 35: 945-980.
- [14] LI J. Investigations on two kinds of two-level stabilized finite element methods for the stationary Navier-Stokes equations[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, 182: 1470-1481.
- [15] REN C F, MA Y C, YING G J. A two-grid method with backtracking technique for the Navier-Stokes equations[J]. *Numerical Mathematics A Journal of Chinese Universities*, 2003, 3(3): 193-204.
- [16] HECHT F. New development in FreeFem++[J]. *Journal of Numerical Mathematics*, 2012, 20(3/4): 251-265.

责任编辑: 赵新科

(上接第 268 页)

- [11] WEN G, DUAN Z, REN W, et al. Distributed consensus of multi-agent systems with general linear node dynamics and intermittent communications[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, 24: 2438-2457.
- [12] YU Z, JIANG H, HUANG D, et al. Directed spanning tree-based adaptive protocols for second-order consensus of multiagent systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2018, 28: 2172-2190.
- [13] YU W, ZHENG W, CHEN G, et al. Second-order consensus in multi-agent dynamical systems with sampled position data[J]. *Automatica*, 2011, 47: 1496-1503.
- [14] REN W, BEARD R. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. *IEEE Transactions on Automatic control*, 2005, 50(5): 655-661.

责任编辑: 赵新科