

# 曲面上对流-扩散-反应方程的两种稳定化混合有限元方法的数值比较\*

金孟晴<sup>1</sup>, 冯新龙<sup>1†</sup>, 何银年<sup>1,2</sup>

(1. 新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017; 2. 西安交通大学 数学与统计学院, 陕西 西安 710049)

**摘要:** 研究了曲面对流-扩散-反应方程的有限元逼近问题. 通过引入不同形式的中间变量, 分别将原方程转化为等价的一阶混合形式. 运用混合有限元的思想, 直接使用低阶有限元对 $(P_1-P_1)$ 近似的混合稳定化方法. 该方法不仅满足inf-sup条件, 而且对于对流占优情况所产生的非物理震荡, 可以将其有效地捕捉. 最后, 数值实验结果表明, 测试的收敛结果与已知理论一致.

**关键词:** 曲面对流-扩散-反应方程; 曲面混合有限元方法; 稳定化方法; inf-sup条件

**DOI:** 10.13568/j.cnki.651094.651316.2021.09.28.0003

**中图分类号:** O242.21 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2022)03-0266-09

**引文格式:** 金孟晴, 冯新龙, 何银年. 曲面上对流-扩散-反应方程的两种稳定化混合有限元方法的数值比较[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2022, 39(3): 266-274+282.

**英文引文格式:** JIN Mengqing, FENG Xinlong, HE Yinnian. Numerical comparison of two stabilized mixed finite element methods for convection-diffusion-equations on surfaces[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2022, 39(3): 266-274+282.

## Numerical Comparison of Two Stabilized Mixed Finite Element Methods for Convection-Diffusion-Equations on Surfaces

JIN Mengqing<sup>1</sup>, FENG Xinlong<sup>1</sup>, HE Yinnian<sup>1,2</sup>

(1. School of Mathematics and Systems Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an Shaanxi 710049, China)

**Abstract:** In this paper, the finite element approximation of the convection-diffusion-reaction equation on surfaces is studied. By introducing middle variables of different forms, the original equation is transformed into the equivalent, first-order mixed form. Using the idea of mixed finite element, this paper directly uses the mixed stabilization method of low order finite element pair $(P_1-P_1)$  approximation. The method not only satisfies the well-posed condition, but also can effectively capture the non-physical oscillation caused by convective dominance. Finally, the numerical results show that the convergence results are consistent with the known theory.

**Key words:** surface convection-diffusion-reaction equation; surface mixed finite element method; stabilized finite element method; inf-sup condition

\* 收稿日期: 2021-09-28

基金项目: 新疆维吾尔自治区重点实验室开放课题(2020D04002).

作者简介: 金孟晴(1995-), 女, 博士生, 从事对流扩散反应方程的研究, E-mail: Jin1559440963@163.com.

† 通讯作者: 冯新龙(1976-), 男, 博士, 教授, 主要从事偏微分方程数值解的研究, E-mail: fxmath@xju.edu.cn.

## 0 引言

对流-扩散-反应方程是基本的动力学方程,它描述了三种不同的物理现象:对流、扩散和反应<sup>[1-2]</sup>. 对流扩散现象包括河流污染、空气污染、污染物在核废料污染中的分布等. 随着数学和工程研究的发展,人们需要使用更加复杂的数学模型来描述自然界中的一些物理现象,这就使得研究者们将注意力集中在曲面问题的建立与求解上. 因此,曲面偏微分方程的重要性越来越突出.

我们知道求解曲面椭圆方程的有限元方法可以追溯到1988年<sup>[3]</sup>,作者用三角剖分来离散曲面,此后相继出现求解曲面方程的方法. 在流体力学中,一些文献介绍和总结了两相不可压流的数值模拟方法. 在生物学领域,一些生物学家用曲面对流和扩散现象来描述生物膜上的物质转移<sup>[4-5]</sup>、种群迁移以及细菌在生物膜上的聚集现象<sup>[6-7]</sup>. 在大多数实际应用中,都需要求解曲面对流-扩散-反应方程. 然而,用解析的方法在曲面上求解此类方程是一个巨大的挑战,尤其是对流占优问题的相关求解. 尽管一些学者对对流占优问题的数值逼近做了大量的工作,但仍然存在一个问题,即如何找到一种精确、稳定、快速的数值方法对其进行模拟.

对流占优问题,使方程有了双曲方程的性质,这让求解变得更加困难,用一般的方法,比如标准的有限元方法、有限差分方法会导致所得到的解产生非物理震荡. 只有当网格剖分的足够细时,解才会相对稳定. 但对于高维问题,网格剖分较细会导致大的计算量和存储空间. 因此,我们希望设计一种算法,即使网格尺寸稍大,也能克服上述问题. 在本文中,我们采用混合的一阶形式来近似对流-扩散-反应方程,其中两个变量使用有限元对 $(P_1-P_1)$ ,根据平面微分方程中运用的稳定化思想<sup>[3,8-13]</sup>,文中使用混合稳定化方法消除对流占优情况所产生的非物理震荡. 最后进行了数值实验,来验证两种算法的有效性并得到了相应的结果.

## 1 预备知识

在这一部分,我们将介绍一些曲面的预备知识,比如曲面算子的一些符号和相应的Sobolev空间以供后面使用. 此外,还推导了曲面上对流-扩散-反应方程的混合弱形式.

### 1.1 曲面算子

假设 $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$  是一个开区域, $\Gamma \subset \Omega$  是一个紧致曲面,可以用一个函数的零水平集 $\phi(x) \in C^2(\Gamma)$ 定义,使得

$$\Gamma = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \phi(x) = 0\} \quad (1)$$

对于充分光滑的函数 $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  在曲面上某一点 $x \in \Gamma$  的切向梯度可以定义为

$$\nabla_{\Gamma} f(x) = \nabla f(x) - \nabla f(x) \cdot n(x) \otimes n(x) = P(x) \nabla f(x), \quad \forall x \in \Gamma \quad (2)$$

这里, $P(x) = I - n(x) \otimes n(x)$ , $\nabla$  表示平面上标准的梯度算子,其中曲面法向 $n$ 定义为

$$n(x) = \frac{\nabla \phi(x)}{|\nabla \phi(x)|} \quad (3)$$

函数 $\phi$  满足 $\nabla \phi(x) \neq 0$ .

同样的,曲面上的散度算子 $F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x)) \in \mathbb{R}^3$  可以被定义为

$$\nabla_{\Gamma} \cdot F(x) = \sum_{i=1}^3 \tilde{D}_i f(x) \quad (4)$$

这里 $\tilde{D}_i$  表示切向梯度的第 $i$  个分量.

自然的,Laplace-Beltrami 算子可以定义为

$$\Delta_{\Gamma} f(x) = \nabla_{\Gamma} \cdot \nabla_{\Gamma} f(x) \quad (5)$$

### 1.2 Sobolev 空间

假设 $\Gamma$  是属于 $C^2$  的一个曲面, $L^p(\Gamma)$  是可测量函数 $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  的空间,则我们将Sobolev 空间 $W^{r,p}(\Gamma)$  定义为

$$W^{r,p}(\Gamma) = \{f \in W^{r-1,p}(\Gamma) \mid Df \in W^{r-1,p}(\Gamma)\},$$

其中:  $1 \leq r \leq s$ ,  $W^{0,p}(\Gamma) = L^p(\Gamma)$ . 对于  $p = 2$ , 我们使用符号  $H^r(\Gamma) = W^{r,2}(\Gamma)$ , 将它的对偶空间记为  $H^{-r}(\Gamma)$ , 这里  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ ,  $D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial^{\alpha_3}}{\partial x_3}$ .

假设  $H^r(\Gamma)$  是 Hilbert 空间, 将其内积定义为

$$\langle f, g \rangle_{H^r(\Gamma)} = \int_{\Gamma} \sum_{|\alpha| \leq r} D^\alpha f D^\alpha g \, dx, \quad 0 \leq r \leq s, \quad \forall f, g \in H^r(\Gamma) \quad (6)$$

相对应的范数为

$$\|f\|_{H^r(\Gamma)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq r} \|D^\alpha f\|_{L^2(\Gamma)}^2, \quad 0 \leq r \leq s \quad (7)$$

我们将它的半范记为  $|\cdot|_{H^r(\Gamma)}$ ,  $1 \leq r \leq s$ . 为了简单起见, 分别使用  $\|\cdot\|_{r,\Gamma}$  和  $|\cdot|_{r,\Gamma}$  来表示  $\|\cdot\|_{H^r(\Gamma)}$  和  $|\cdot|_{H^r(\Gamma)}$ .

我们引入切向向量函数的空间

$$L_n^2(\Gamma) := \{u \in L^2(\Gamma)^3 \mid n \cdot u = 0 \text{ 在 } \Gamma \text{ 上几乎处处成立}\} \quad (8)$$

$$H_n^1(\Gamma) := \{u \in H^1(\Gamma)^3 \mid n \cdot u = 0 \text{ 在 } \Gamma \text{ 上几乎处处成立}\} \quad (9)$$

相对应的范数分别是  $\|\cdot\|_{L_n^2(\Gamma)}$  和  $\|\cdot\|_{H_n^1(\Gamma)}$ . 此外, 下面定义 Sobolev 空间和范数

$$H(\nabla_{\Gamma} \cdot) = \{u \mid u \in L_n^2(\Gamma), \nabla_{\Gamma} \cdot u \in L^2(\Gamma)\} \quad (10)$$

$$\|u\|_{H(\nabla_{\Gamma} \cdot)}^2 = \|u\|_{L_n^2(\Gamma)}^2 + \|\nabla_{\Gamma} \cdot u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \quad (11)$$

这将用于推导对流-扩散-反应方程的混合形式.

### 1.3 曲面对流-扩散-反应方程

我们所研究的问题是以下的对流-扩散-反应方程: 在  $\Gamma$  上找到  $p$ , 使得

$$-\varepsilon \Delta_{\Gamma} p + \alpha \cdot \nabla_{\Gamma} p + \mu p = f \text{ 在 } \Gamma \text{ 上} \quad (12)$$

其中:  $\varepsilon > 0$  是扩散系数,  $\alpha \in W^{1,\infty}(\Gamma)^3$  是对流项且在  $\Gamma$  上满足  $\nabla_{\Gamma} \cdot \alpha = 0$ ,  $\mu > 0$  是反应系数,  $f$  是体积力且属于  $L^2(\Gamma)$ .

**引理 1**<sup>[14]</sup> 假设  $\alpha$  在曲面  $\Gamma$  上是给定的无散度速度场, 即满足  $\nabla_{\Gamma} \cdot \alpha = 0$ . 此外, 如果  $\alpha$  和  $\mu$  满足下式, 则方程(12)有弱解

$$-\frac{\nabla_{\Gamma} \cdot \alpha}{2} + \mu \geq 0 \quad (13)$$

我们思考(12)的变分形式: 找到  $p \in H^1(\Gamma)$ , 使得

$$\varepsilon(\nabla_{\Gamma} p, \nabla_{\Gamma} q) + (\alpha \cdot \nabla_{\Gamma} p, q) + \mu(p, q) = (f, q), \quad \forall q \in H^1(\Gamma).$$

引入  $\varepsilon - H^1$  范数:

$$\|p\|_{\varepsilon(\Gamma)} = \varepsilon \|\nabla_{\Gamma} p\|_{L^2(\Gamma)} + \|p\|_{L^2(\Gamma)}.$$

**定理 1**<sup>[14]</sup> 假设  $\Gamma \in C^2$  且  $p \in H^2(\Gamma)$ , 我们得到

$$\|p\|_{\varepsilon(\Gamma)} \leq c \|f\|_{L^2(\Gamma)} \quad (14)$$

和

$$\varepsilon^{\frac{3}{2}} \|\Delta_{\Gamma} p\|_{L^2(\Gamma)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\nabla_{\Gamma} p\|_{L^2(\Gamma)} + \|p\|_{L^2(\Gamma)} \leq c \|f\|_{L^2(\Gamma)} + c \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\Gamma)} \quad (15)$$

算法一: 定义扩散通量为  $\mathbf{v}_d := -\varepsilon \nabla_{\Gamma} p$ , 因此在  $\Gamma$  上(12)变成

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{v}_d + \nabla_{\Gamma} p = \mathbf{0} \\ \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{v}_d + \nabla_{\Gamma} p \cdot \alpha + \mu p = f \end{cases} \quad (16)$$

(16) 的弱解是: 找到  $(\mathbf{v}_d, p) \in \mathbf{V} \times Q := H(\nabla_{\Gamma}; \Gamma) \times L^2(\Gamma)$ , 使得

$$\frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{v}_d, \mathbf{w}) - (p, \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{w}) - \frac{1}{\varepsilon}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{v}_d, q) + (\nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{v}_d, q) + \mu(p, q) = (f, q) \quad (17)$$

对所有的  $(\mathbf{w}, q) \in \mathbf{V} \times Q$ .

算法二: 我们定义总通量为  $\mathbf{v} := -\varepsilon \nabla_{\Gamma} p + \boldsymbol{\alpha} p$ , 因此在  $\Gamma$  上(12) 变成

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{v} + \nabla_{\Gamma} p - \frac{1}{\varepsilon} \boldsymbol{\alpha} p = \mathbf{0} \\ \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{v} + \mu p = f \end{cases} \quad (18)$$

(18) 的弱解是: 找到  $(\mathbf{v}, p) \in V \times Q := H(\nabla_{\Gamma}; \Gamma) \times L^2(\Gamma)$ , 使得

$$\frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - (p, \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{w}) - \frac{1}{\varepsilon}(\boldsymbol{\alpha} p, \mathbf{w}) + (\nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{v}, q) + \mu(p, q) = (f, q) \quad (19)$$

对所有的  $(\mathbf{w}, q) \in V \times Q$ .

引理 2<sup>[15]</sup> 若  $\boldsymbol{\alpha}$  和  $\mu$  满足(13) 且方程(12) 有唯一的弱解, 使得

$$\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}\|_{H_{\Gamma}^1(\Gamma)} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|p\|_{L^2(\Gamma)} + \mu^{\frac{1}{2}} \|p\|_{H^1(\Gamma)} \leq C^* \|f\|_{L^2(\Gamma)} \quad (20)$$

其中:  $C^*$  是一个正常数.

注 1: 使用Lax-Milgram 引理, 可以证明(12) 具有唯一的弱解  $p \in H^1(\Gamma)$ . 因此, 问题(16) 或(18) 的任何一个解都是(12) 的弱解, 反之亦然.

## 2 稳定混合有限元方法

在这个部分, 将介绍一种稳定混合有限元方法. 首先, 我们用一致的分片三角形来逼近光滑曲面  $\Gamma$ . 因此, 由近似曲面  $\Gamma_h$  引入的几何误差一般为  $O(h^2)$ , 其中  $h$  是分片三角形  $\Gamma_h$  的网格尺度.

我们选择一系列的点  $\{x_1, x_2, \dots, x_{N_p}\}$  生成一个不重叠的三角形单元  $\{e_1, e_2, \dots, e_{N_e}\}$ , 由这些单元近似光滑曲面所组成的曲面  $\Gamma_h$  被定义为:

$$\Gamma_h = \bigcup_{k=1}^{N_e} e_k \quad (21)$$

其中:  $N_e$  和  $N_p$  分别表示单元和节点的个数,  $h = \max\{h_1, h_2, \dots, h_{N_e}\}$  是离散曲面网格的大小. 对于离散曲面  $\Gamma_h$  上的任意点  $x$ , 有光滑曲面  $\Gamma$  上的点  $a(x)$  与之对应, 满足以下的映射关系

$$x = a(x + d(x)n(a(x))), \quad \forall x \in \Gamma_h \quad (22)$$

其中:  $d(x)$  是一个定向距离函数并且满足  $|d(x)| = \text{dist}(x, \Gamma)$ ,  $\nabla d(x) = n(a(x))$  和  $|\nabla d(x)| = 1$ , 详细介绍可参阅文献[16].

引理 3<sup>[17]</sup> 光滑曲面  $\Gamma$  的定向距离函数  $d(x)$  满足以下估计

$$\|d(x)\|_{L^{\infty}(\Gamma_h)} \leq C^* h^2,$$

其中:  $C^*$  是一个正常数.

对于曲面  $\Gamma$  上定义的函数, 我们可以将它投影到近似曲面  $\Gamma_h$  上

$$v^l(a(x)) = v(x), \quad \forall x \in \Gamma_h \quad (23)$$

逆投影为

$$v^{-l}(x) = v(a(x)), \quad \forall x \in \Gamma_h \quad (24)$$

定理 2<sup>[3]</sup> 假设  $v$  是  $v^{-l} \in H^1(\Gamma)$  在  $\Gamma_h$  上的投影, 则有下列范数等价

$$\|v^l\|_{L^2(\Gamma)} \sim \|v\|_{L^2(\Gamma_h)}, \quad \|v\|_{L^2(\Gamma)} \sim \|v^{-l}\|_{L^2(\Gamma_h)} \quad (25)$$

$$\|\nabla_{\Gamma} v^l\|_{L^2(\Gamma)} \sim \|\nabla_{\Gamma_h} v\|_{L^2(\Gamma_h)}, \|\nabla_{\Gamma} v\|_{L^2(\Gamma)} \sim \|\nabla_{\Gamma_h} v^{-l}\|_{L^2(\Gamma_h)} \quad (26)$$

对于上面定义的有限元空间, 我们引入了基于曲面 $\Gamma_h$ 的有限元空间, 其中通量变量 $v$ 的离散子空间为:

$$H_h := \{\varphi \in C^0(\Gamma_h)^d : \varphi|_{e_k} \in \mathcal{P}_k(e_k)^d, \forall e_k \in \Gamma_h\} \quad (27)$$

标量变量 $p$ 的离散子空间为:

$$Q_h := \{q_h \in C^0(\Gamma_h)^d : q_h|_{e_k} \in \mathcal{P}_k(e_k), \forall e_k \in \Gamma_h\} \quad (28)$$

我们可以得到(19)的离散变分形式如下: 找到 $(\mathbf{v}_h, p_h) \in H_h \times Q_h$ , 使得

$$a_h((\mathbf{v}_h, p_h), (\mathbf{w}_h, q_h))_{\Gamma_h} = f_h(\mathbf{w}_h, q_h), \quad \forall (\mathbf{w}_h, q_h) \in H_h \times Q_h \quad (29)$$

其中

$$\begin{aligned} a_h((\mathbf{v}_h, p_h), (\mathbf{w}_h, q_h))_{\Gamma_h} &:= \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)_{\Gamma_h} - (p_h, \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{w}_h)_{\Gamma_h} - \frac{1}{\varepsilon}(\boldsymbol{\alpha} p_h, \mathbf{w}_h)_{\Gamma_h} + (\nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{v}_h, q_h)_{\Gamma_h} + \mu(p_h, q_h)_{\Gamma_h}, \\ f_h(\mathbf{w}_h, q_h) &:= (f^{-l}, q_h)_{\Gamma_h}. \end{aligned}$$

本文在(17)式的离散变分形式中加入了稳定项, 此时, 求解的离散形式变为: 找到 $(\mathbf{v}_{d_h}, p_h) \in H_h \times Q_h$ , 使得

$$A((\mathbf{v}_{d_h}, p_h), (\mathbf{w}_h, q_h))_{\Gamma_h} = F(\mathbf{w}_h, q_h)_{\Gamma_h} \quad (30)$$

对所有的 $(\mathbf{w}_h, q_h) \in H_h \times Q_h$ .

这里

$$\begin{aligned} &A((\mathbf{v}_{d_h}, p_h), (\mathbf{w}_h, q_h))_{\Gamma_h} \\ &= \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{v}_{d_h}, \mathbf{w}_h)_{\Gamma_h} - (p_h, \nabla_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{w}_h)_{\Gamma_h} - \frac{1}{\varepsilon}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{v}_{d_h}, q_h)_{\Gamma_h} + (\nabla_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{v}_{d_h}, q_h)_{\Gamma_h} + \mu(p_h, q_h)_{\Gamma_h} \\ &- \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{v}_{d_h} + \nabla_{\Gamma_h} p_h, \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{w}_h - \nabla_{\Gamma_h} q_h \right)_{\Gamma_h} + \sum_{e_k \in \Gamma_h} \delta^{e_k} (\nabla_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{v}_{d_h} + \nabla_{\Gamma_h} p_h \cdot \boldsymbol{\alpha} + \mu p_h, \nabla_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{w}_h + \nabla_{\Gamma_h} q_h \cdot \boldsymbol{\alpha} + \mu q_h)_{e_k}, \end{aligned}$$

和

$$F(\mathbf{w}_h, q_h)_{\Gamma_h} = (f^{-l}, q_h)_{\Gamma_h} + \sum_{e_k \in \Gamma_h} \delta^{e_k} (f^{-l}, \nabla_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{w}_h + \mu q_h)_{e_k} \quad (31)$$

本文在(29)式上加入了稳定项, 此时, 求解的离散形式变为: 找到 $(\mathbf{v}_h, p_h) \in H_h \times Q_h$ , 使得

$$B((\mathbf{v}_h, p_h), (\mathbf{w}_h, q_h))_{\Gamma_h} = L(\mathbf{w}_h, q_h)_{\Gamma_h} \quad (32)$$

对所有的 $(\mathbf{w}_h, q_h) \in H_h \times Q_h$ .

这里

$$\begin{aligned} &B((\mathbf{v}_h, p_h), (\mathbf{w}_h, q_h))_{\Gamma_h} \\ &= \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)_{\Gamma_h} - (p_h, \nabla_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{w}_h)_{\Gamma_h} - \frac{1}{\varepsilon}(\boldsymbol{\alpha} p_h, \mathbf{w}_h)_{\Gamma_h} + (\nabla_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{v}_h, q_h)_{\Gamma_h} + \mu(p_h, q_h)_{\Gamma_h} \\ &- \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{v}_h + \nabla_{\Gamma_h} p_h - \frac{1}{\varepsilon} \boldsymbol{\alpha} p_h, \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{w}_h - \nabla_{\Gamma_h} q_h + \frac{1}{\varepsilon} \boldsymbol{\alpha} q_h \right)_{\Gamma_h} + \sum_{e_k \in \Gamma_h} \delta^{e_k} (\nabla_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{v}_h + \mu p_h, \nabla_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{w}_h + \mu q_h)_{e_k}, \end{aligned}$$

和

$$L(\mathbf{w}_h, q_h)_{\Gamma_h} = (f^{-l}, q_h)_{\Gamma_h} + \sum_{e_k \in \Gamma_h} \delta^{e_k} (f^{-l}, \nabla_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{w}_h + \mu q_h)_{e_k} \quad (33)$$

其中:  $\delta^{e_k}$  是稳定参数.

$$\delta^{e_k} = \delta \min\left\{h, \frac{h^2}{4\varepsilon}\right\} \quad (34)$$

其中:  $\delta > 0$  是正的常数.

此外, 我们在离散空间中定义算法一和算法二的范数:

算法一范数:

$$\|(\mathbf{w}_h, q_h)\|_u := \left( \frac{1}{\varepsilon} \|\mathbf{w}_h\|_{0,\Gamma_h}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\alpha q_h\|_{0,\Gamma_h}^2 + \varepsilon |q_h|_{1,\Gamma_h}^2 + \mu \|q_h\|_{0,\Gamma_h} + \sum_{e_i \in \Gamma_h} \delta^{e_i} \|\nabla_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{w}_h + \nabla_{\Gamma_h} q_h \cdot \alpha + \mu q_h\|_{0,e_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

算法二范数:

$$\|(\mathbf{w}_h, q_h)\|_h := \left( \frac{1}{\varepsilon} \|\mathbf{w}_h - \alpha q_h\|_{0,\Gamma_h}^2 + \varepsilon |q_h|_{1,\Gamma_h}^2 + \mu \|q_h\|_{0,\Gamma_h}^2 + \sum_{e_i \in \Gamma_h} \delta^{e_i} \|\nabla_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{w}_h + \mu q_h\|_{0,e_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (35)$$

**定理 3** 设  $A(\cdot, \cdot)_{\Gamma_h}$  是(30) 中的双线性形式. 存在一个不依赖于  $\varepsilon$ ,  $\mu$  和  $h$  的正常数  $C$ , 使得

$$\sup_{(\mathbf{w}_h, q_h) \in H_h \times Q_h} \frac{A((\mathbf{v}_{d_h}, p_h), (\mathbf{w}_h, q_h))_{\Gamma_h}}{\|(\mathbf{w}_h, q_h)\|_u} \geq C \|(\mathbf{v}_{d_h}, p_h)\|_u,$$

其中:  $(\mathbf{w}_h, q_h) \in H_h \times Q_h$ .

**证明** 用  $A(\cdot, \cdot)_{\Gamma_h}$  的定义, Cauchy-Schwarz 和 Young 不等式, 我们得到

$$\begin{aligned} & A((\mathbf{v}_{d_h}, p_h), (\mathbf{v}_{d_h}, p_h))_{\Gamma_h} \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} (\mathbf{v}_{d_h}, \mathbf{v}_{d_h})_{\Gamma_h} - \frac{1}{\varepsilon} (\alpha \cdot \mathbf{v}_{d_h}, q_h)_{\Gamma_h} + \frac{\varepsilon}{2} (\nabla_{\Gamma_h} p_h, \nabla_{\Gamma_h} p_h)_{\Gamma_h} + \mu (p_h, p_h)_{\Gamma_h} \\ & \quad + \sum_{e_i \in \Gamma_h} \delta^{e_i} (\nabla_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{v}_{d_h} + \nabla_{\Gamma_h} p_h \cdot \alpha + \mu p_h, \nabla_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{v}_{d_h} + \nabla_{\Gamma_h} p_h \cdot \alpha + \mu p_h)_{e_i} \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathbf{v}_{d_h}\|_{0,\Gamma_h}^2 - \frac{1}{\varepsilon} (\alpha p_h, \mathbf{v}_{d_h})_{\Gamma_h} + \frac{\varepsilon}{2} |p_h|_{1,\Gamma_h}^2 + \mu \|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 + \sum_{e_i \in \Gamma_h} \delta^{e_i} \|\nabla_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{v}_{d_h} + \nabla_{\Gamma_h} p_h \cdot \alpha + \mu p_h\|_{0,e_i}^2 \\ &\geq \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathbf{v}_{d_h}\|_{0,\Gamma_h}^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathbf{v}_{d_h}\|_{0,\Gamma_h}^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \|\alpha p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 + \frac{\varepsilon}{2} |p_h|_{1,\Gamma_h}^2 + \mu \|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \\ & \quad + \sum_{e_i \in \Gamma_h} \delta^{e_i} \|\nabla_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{v}_{d_h} + \nabla_{\Gamma_h} p_h \cdot \alpha + \mu p_h\|_{0,e_i}^2 \\ &= \frac{\varepsilon}{2} |p_h|_{1,\Gamma_h}^2 + \mu \|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \|\alpha p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 + \sum_{e_i \in \Gamma_h} \delta^{e_i} \|\nabla_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{v}_{d_h} + \nabla_{\Gamma_h} p_h \cdot \alpha + \mu p_h\|_{0,e_i}^2. \end{aligned}$$

显然, 有

$$\begin{aligned} & A((\mathbf{v}_{d_h}, p_h), (\mathbf{w}_h, 0))_{\Gamma_h} \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} (\mathbf{v}_{d_h}, \mathbf{w}_h)_{\Gamma_h} + \frac{1}{2} (\nabla_{\Gamma_h} p_h, \mathbf{w}_h)_{\Gamma_h} + \sum_{e_i \in \Gamma_h} \delta^{e_i} (\nabla_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{v}_{d_h} + \nabla_{\Gamma_h} p_h \cdot \alpha + \mu p_h, \nabla_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{w}_h)_{e_i} \end{aligned}$$

此外, 令  $\widetilde{\mathbf{w}}_h = \mathbf{v}_{d_h} - \alpha p_h$ , 运用逆不等式, 我们得到

$$\begin{aligned} & A((\mathbf{v}_{d_h}, p_h), (\widetilde{\mathbf{w}}_h, 0))_{\Gamma_h} \\ &= \frac{1}{2\varepsilon} (\mathbf{v}_{d_h}, \widetilde{\mathbf{w}}_h)_{\Gamma_h} + \frac{1}{2} (\nabla_{\Gamma_h} p_h, \widetilde{\mathbf{w}}_h)_{\Gamma_h} + \sum_{e_i \in \Gamma_h} \delta^{e_i} (\nabla_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{v}_{d_h} + \nabla_{\Gamma_h} p_h \cdot \alpha + \mu p_h, \nabla_{\Gamma_h} \cdot \widetilde{\mathbf{w}}_h)_{e_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\varepsilon}(\mathbf{v}_{d_h}, \widetilde{\mathbf{w}}_h)_{\Gamma_h} + \frac{1}{2}(\nabla_{\Gamma_h} p_h, \widetilde{\mathbf{w}}_h)_{\Gamma_h} + \sum_{e_i \in \Gamma_h} \delta^{e_i} (\nabla_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{v}_{d_h} + \nabla_{\Gamma_h} p_h \cdot \boldsymbol{\alpha} + \mu p_h, \nabla_{\Gamma_h} \cdot \widetilde{\mathbf{w}}_h)_{e_i} \\
&\geq \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathbf{v}_{d_h}\|_{0,\Gamma_h}^2 - \frac{1}{2\varepsilon} (\boldsymbol{\alpha} p_h, \mathbf{v}_{d_h})_{\Gamma_h} - \frac{\varepsilon}{4} |p_h|_{1,\Gamma_h}^2 - \frac{1}{4\varepsilon} \|\mathbf{v}_{d_h} - \boldsymbol{\alpha} p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \\
&\quad - \sum_{e_i \in \Gamma_h} \left\{ \frac{\delta^{e_i} c^2 \delta}{2} \|\nabla_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{v}_{d_h} + \nabla_{\Gamma_h} p_h \cdot \boldsymbol{\alpha} + \mu p_h\|_{0,e_i}^2 + \frac{\delta^{e_i}}{2c^2 \delta} \|\nabla_{\Gamma_h} \cdot (\mathbf{v}_{d_h} - \boldsymbol{\alpha} \cdot p_h)\|_{0,e_i}^2 \right\} \\
&\geq \frac{1}{2\varepsilon} \|\mathbf{v}_{d_h}\|_{0,\Gamma_h}^2 - \frac{1}{4\varepsilon} \|\mathbf{v}_{d_h}\|_{0,\Gamma_h}^2 - \frac{1}{4\varepsilon} \|\boldsymbol{\alpha} p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 - \frac{\varepsilon}{4} |p_h|_{1,\Gamma_h}^2 - \frac{1}{8\varepsilon} \|\mathbf{v}_{d_h}\|_{0,\Gamma_h}^2 - \frac{1}{8\varepsilon} \|\boldsymbol{\alpha} p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \\
&\quad - \sum_{e_i \in \Gamma_h} \left\{ \frac{\delta^{e_i} c^2 \delta}{2} \|\nabla_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{v}_{d_h} + \nabla_{\Gamma_h} p_h \cdot \boldsymbol{\alpha} + \mu p_h\|_{0,e_i}^2 + \frac{\delta^{e_i}}{2h^2 \delta} \|\mathbf{v}_{d_h} - \boldsymbol{\alpha} \cdot p_h\|_{0,e_i}^2 \right\} \\
&\geq \frac{1}{8\varepsilon} \|\mathbf{v}_{d_h}\|_{0,\Gamma_h}^2 - \frac{3}{8\varepsilon} \|\boldsymbol{\alpha} p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 - \frac{\varepsilon}{4} |p_h|_{1,\Gamma_h}^2 \\
&\quad - \sum_{e_i \in \Gamma_h} \left\{ \frac{\delta^{e_i} c^2 \delta}{2} \|\nabla_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{v}_{d_h} + \nabla_{\Gamma_h} p_h \cdot \boldsymbol{\alpha} + \mu p_h\|_{0,e_i}^2 + \frac{1}{8\varepsilon} \|\mathbf{v}_{d_h} - \boldsymbol{\alpha} \cdot p_h\|_{0,e_i}^2 \right\} \\
&\geq \frac{1}{16\varepsilon} \|\mathbf{v}_{d_h}\|_{0,\Gamma_h}^2 - \frac{1}{2\varepsilon} \|\boldsymbol{\alpha} p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 - \frac{\varepsilon}{4} |p_h|_{1,\Gamma_h}^2 - \sum_{e_i \in \Gamma_h} \frac{\delta^{e_i} c^2 \delta}{2} \|\nabla_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{v}_{d_h} + \nabla_{\Gamma_h} p_h \cdot \boldsymbol{\alpha} + \mu p_h\|_{0,e_i}^2
\end{aligned}$$

定义  $\gamma := \min\{1, (C^2 \delta)^{-1}\}$ , 我们得到

$$\begin{aligned}
&A((\mathbf{v}_{d_h}, p_h), (\mathbf{v}_{d_h} + \gamma \widetilde{\mathbf{w}}_h, p_h))_{\Gamma_h} \\
&= \frac{\gamma}{16\varepsilon} \|\mathbf{v}_{d_h}\|_{0,\Gamma_h}^2 + \frac{\varepsilon(2-\gamma)}{4} |p_h|_{1,\Gamma_h}^2 + \mu \|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 - \frac{\gamma+1}{2\varepsilon} \|\boldsymbol{\alpha} p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \\
&\quad + \sum_{e_i \in \Gamma_h} \delta^{e_i} \left(1 - \frac{C^2 \delta \gamma}{2}\right) \|\nabla_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{v}_{d_h} + \nabla_{\Gamma_h} p_h \cdot \boldsymbol{\alpha} + \mu p_h\|_{0,e_i}^2 \\
&\geq C \|(\mathbf{v}_{d_h}, p_h)\|_u^2
\end{aligned} \tag{36}$$

运用范数的定义, 取  $\gamma \leq 1$ , 我们得到

$$\begin{aligned}
&\|(\mathbf{v}_{d_h} + \gamma \widetilde{\mathbf{w}}_h, p_h)\|_u \\
&= \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \|\mathbf{v}_{d_h} + \gamma \widetilde{\mathbf{w}}_h\|_{0,\Gamma_h}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\boldsymbol{\alpha} p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 + \varepsilon |p_h|_{1,\Gamma_h}^2 + \mu \|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{e_i \in \Gamma_h} \delta^{e_i} \|\nabla_{\Gamma_h} \cdot (\mathbf{v}_{d_h} + \gamma \widetilde{\mathbf{w}}_h) + \nabla_{\Gamma_h} p_h \cdot \boldsymbol{\alpha} + \mu p_h\|_{0,e_i}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \|\mathbf{v}_{d_h}\|_{0,\Gamma_h}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\boldsymbol{\alpha} p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\gamma \widetilde{\mathbf{w}}_h\|_{0,\Gamma_h}^2 + \varepsilon |p_h|_{1,\Gamma_h}^2 + \mu \|p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{e_i \in \Gamma_h} \delta^{e_i} (\|\nabla_{\Gamma_h} \cdot \mathbf{v}_{d_h} + \nabla_{\Gamma_h} p_h \cdot \boldsymbol{\alpha} + \mu p_h\|_{0,e_i}^2 + \|\nabla_{\Gamma_h} \cdot \gamma \widetilde{\mathbf{w}}_h\|_{0,e_i}^2) \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left\{ \|(\mathbf{v}_{d_h}, p_h)\|_u^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|\gamma \widetilde{\mathbf{w}}_h\|_{0,\Gamma_h}^2 + \sum_{e_i \in \Gamma_h} \delta^{e_i} \|\nabla_{\Gamma_h} \cdot \gamma \widetilde{\mathbf{w}}_h\|_{0,e_i}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left\{ \|(\mathbf{v}_{d_h}, p_h)\|_u - \frac{1}{2\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \|\mathbf{v}_{d_h}\|_{0,\Gamma_h} - \frac{1}{2\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \|\boldsymbol{\alpha} p_h\|_{0,\Gamma_h} + \left( \sum_{e_i \in \Gamma_h} \delta^{e_i} \|\nabla_{\Gamma_h} \cdot (\mathbf{v}_{d_h} - \boldsymbol{\alpha} p_h)\|_{0,e_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\
&\leq C \left\{ \|(\mathbf{v}_{d_h}, p_h)\|_u + \left( \sum_{e_k \in \Gamma_h} \frac{\delta^{e_k} C^2}{h^2} \|\mathbf{v}_{d_h} - \boldsymbol{\alpha} p_h\|_{0,\Gamma_h}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\
&\leq C \|(\mathbf{v}_{d_h}, p_h)\|_u.
\end{aligned}$$

因此, 我们得到

$$\sup_{(\mathbf{w}_h, q_h) \in H_h \times Q_h} \frac{A((\mathbf{v}_{d_h}, p_h), (\mathbf{w}_h, q_h))_{\Gamma_h}}{\|(\mathbf{w}_h, q_h)\|_u} \geq \frac{A((\mathbf{v}_{d_h}, p_h), (\mathbf{v}_{d_h} + \gamma \widetilde{\mathbf{w}}_h, p_h))_{\Gamma_h}}{\|(\mathbf{v}_{d_h} + \gamma \widetilde{\mathbf{w}}_h, p_h)\|_u} \geq C \|(\mathbf{v}_{d_h}, p_h)\|_u.$$

注 2: 离散形式(32) 的稳定性在<sup>[15]</sup> 中已被证明.

### 3 数值算例

在这部分, 我们展示了几个数值实验的结果, 以说明所提方法的有效性.

**例 1** 在球面上考虑问题(12).

球面隐函数为:

$$\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

对流项为:

$$\alpha(x, y, z) = (-y\sqrt{1-z^2}, x\sqrt{1-z^2}, 0)^T \tag{37}$$

我们选择连续的精确解如下, 右端项  $f$  由精确解给出

$$p(x, y, z) = \left(\frac{xy}{\pi}\right) \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

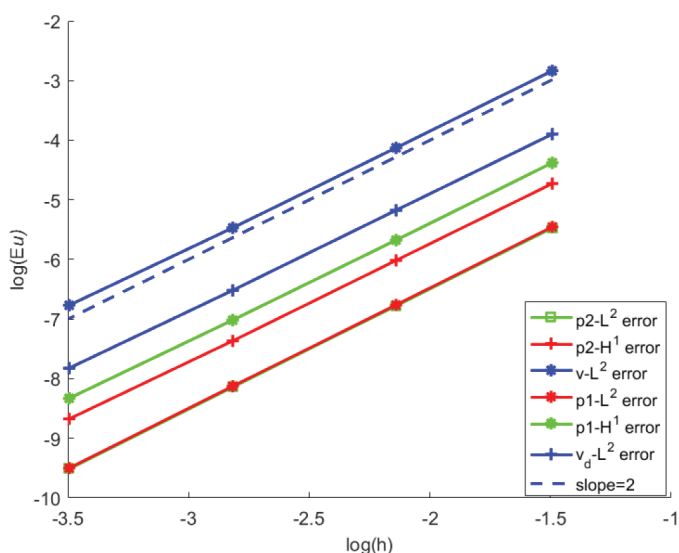


图 1 比较两种方法中  $p$  和  $v$  的误差阶

这个实验的目的是检验方法的有效性. 我们将取扩散系数  $\varepsilon$  和反应系数  $c$  等于1. 为了计算误差阶, 我们取网格剖分和自由度分别为  $h = 0.2, 0.1, 0.05, 0.025$  和  $447, 1703, 6718, 26562$ , 所得到的结果如图1所示. 从图1中, 我们可以看到变量的  $L^2$  范数的收敛阶是2阶, 我们分别运用中间变量的定义将  $p$  的  $H^1$  范数的收敛阶提升到2阶, 所得到的结果如图1所示, 这些结果与我们所做的理论分析一致.

**例 2** 在流行上, 对方程(12), 考虑扩散系数是  $\varepsilon = 10^{-3}$  的解间断问题.

曲面隐函数表达式为:

$$\phi(x, y, z) = (1 + 4x^2)(1 + 4y^2)(1 + 4z^2) + 64xyz + 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 3,$$

在这个实验中, 我们所采用的精确解和对流项与例1相同, 测试两种混合形式的对流占优问题. 我们发现当  $\varepsilon$  较大时, 对流-扩散-反应方程具有光滑的精确解. 然而, 当  $\varepsilon$  取值较小时, 精确解的函数值是具有大梯度变化的对流占优问题.

我们在三角曲面网格上求解这个问题, 图2是所得到的数值模拟结果. 从图2中可以发现当  $\varepsilon = 10^{-3}$  时, 其解在心型区域的中心上有非物理震荡现象. 由于曲面的曲率不一样, 在曲率大的地方模拟的效果比曲率小的部分差一些, 且误差也较大. 在这个数值实验中, 我们将  $\delta$  设为1, 并且采用相同的自由度求解此问题. 由实验结果可知, 我们的方法可以成功地捕获解的大跳跃, 模拟效果较好. 对比这两种方法可知算法二 (运用全局中间变量) 较好.

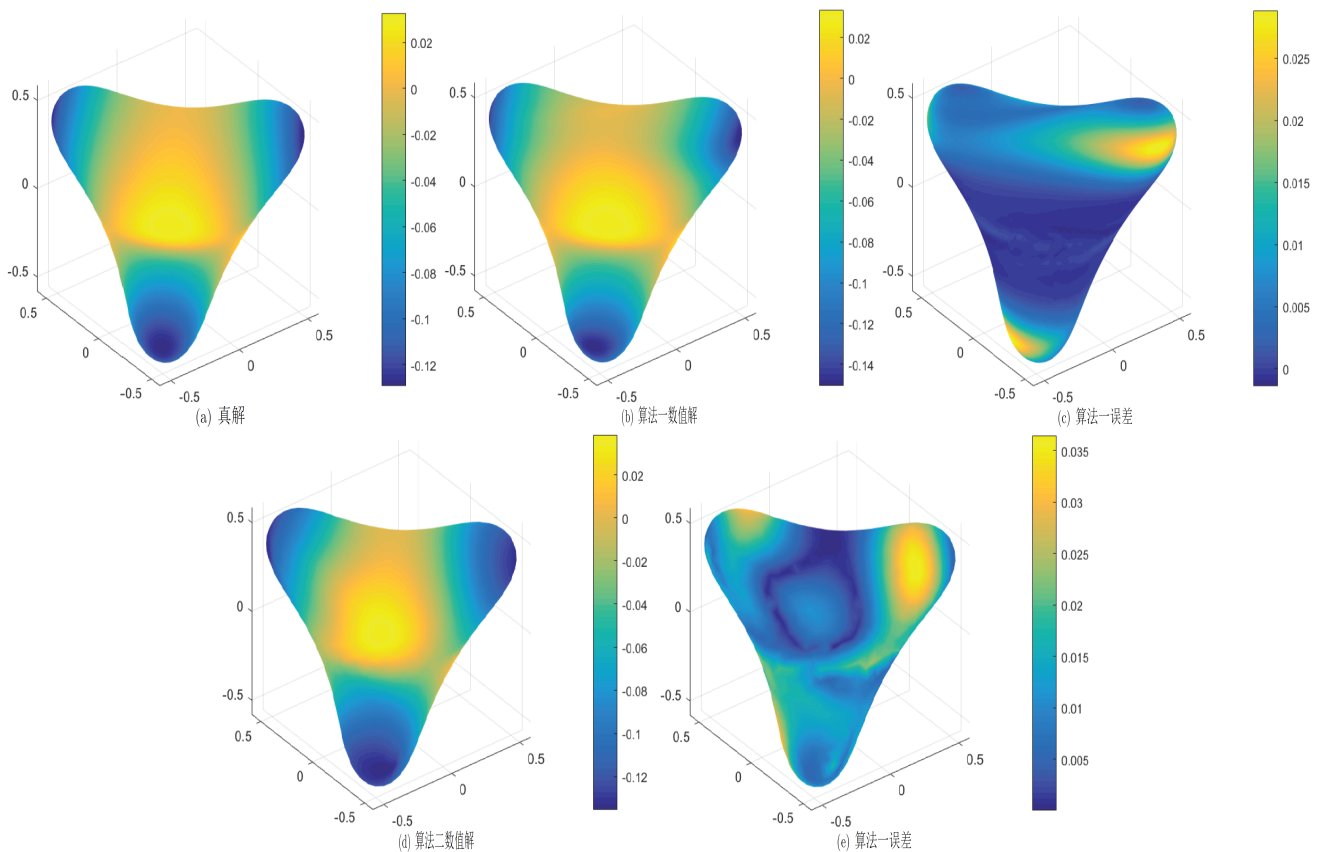


图 2 当 $\varepsilon = 10^{-3}$ 时, 心型区域上两种混合形式的比较

## 4 结论

本文拓展并分析了两种稳定的混合有限元方法来求解曲面对流-扩散-反应方程. 在给出稳定性分析外, 还给出了一些数值实例, 验证了已知理论的结果. 采用这两种方法不仅可以有效地避免非物理震荡问题, 而且提高了 $\nabla_{\Gamma} p$ 的精度. 在文中还可以探讨高斯曲率、平均曲率等对其方程求解时的影响, 今后将是我们的研究重点.

### 参考文献:

- [1] ELMAN H C, SILVESTER D J, WATHEN A J. Finite elements and fast iterative solvers: with applications in incompressible fluid dynamics[J]. *Mathematics of Computation*, 2006, 75(255): 1595-1596.
- [2] ROOS H G, STYNES M, TOBISKA L. Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations: convection-diffusion-reaction and flow problems[M]. Berlin, Heidelberg: Springer Science and Business Media, 2008.
- [3] DZIUK G. Finite elements for the Beltrami operator on arbitrary surfaces[J]. *Lecture Notes in Mathematics*, 1988, 1357: 142-155.
- [4] WANG X, DU Q. Modelling and simulations of multi-component lipid membranes and open membranes via diffuse interface approaches[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2008, 56: 347-371.
- [5] ELLIOT C M, STINNER B. A surface phase field model for two-phase biological membranes[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2010, 70(8): 2904-2928.
- [6] BARREIRA R, ELLIOTT C M, MADZVAMUSE A. The surface finite element method for pattern formation on evolving biological surfaces[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2011, 63(6): 1095-1119.
- [7] LACITIGNOLA D, BOZZINI B, FRITTELLI M. Turing pattern formation on the sphere for a morphochemical reaction-diffusion model for electrodeposition[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2017, 48: 484-508.
- [8] FRANCA L P, FARHAT C. Bubble functions prompt unusual stabilized finite element methods[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1995, 123: 299-308.
- [9] FRANCA L P, FREY S L, HUGHES T J R. Stabilized finite element methods: application to the advective-diffusive model[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1992, 95: 253-276.

(下转第 282 页)