

每个点的度数被3整除的生成母图*

熊玮, 张启慧

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830046)

摘要: 对于一个简单图 G , 如果 $V(G') = V(G)$, $E(G') \supseteq E(G)$, 就称 G' 是 G 的生成母图. 顶点 $v \in V(G)$, 图 G 中与点 v 关联的边数称为点 v 的度. 本文主要研究简单图 G 是否存在度能被3整除的生成母图, 完全刻画了路图、星图和双星图度能被3整除的生成母图, 对于一般图和树图讨论了其有度能被3整除的生成母图的充分条件.

关键词: 生成母图; 度能被3整除; 树图

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2021.01.04.0002

中图分类号: O157.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2021)06-0665-05

引文格式: 熊玮, 张启慧. 每个点的度数被3整除的生成母图[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2021, 38(6): 665-669.

英文引文格式: XIONG W, ZHANG Q H. The spanning supergraphs with the degree of each vertex divisible by 3[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2021, 38(6): 665-669.

The Spanning Supergraphs with the Degree of Each Vertex Divisible by 3

XIONG Wei, ZHANG Qihui

(School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830046, China)

Abstract: For a simple graph G , a graph G' is a spanning supergraph of G , if $V(G') = V(G)$, $E(G') \supseteq E(G)$. The degree $d_G(v)$ of a vertex v in G is the number of edges of G incident with v . In this paper, we study the problem that simple graphs have spanning supergraphs with the degree of each vertex divisible by 3. We completely characterize the spanning supergraphs of path graphs, star graphs and binary star graphs whose degree can be divided by 3. For general graph and tree graph, we give the sufficient conditions for the spanning supergraphs in which the degree of each vertex can be divided by 3.

Key words: spanning supergraph; degree divided by 3; tree graph

0 引言

令 G 是一个简单无向图, 用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集. 经过 G 的每条边的迹称为 G 的Euler迹, G 的环游是指经过 G 的每条边至少一次的闭途径. 欧拉环游是指经过每条边恰好一次的环游, 包含欧拉环游的图称为欧拉图, 欧拉图的度能被2整除. 包含所有点的欧拉子图称为欧拉生成子图. 例如文献[1]研究了Hamilton图的生成子图问题. 若一个图不是欧拉的, 也不含有生成欧拉子图, 则考虑它是否可以加边成欧拉图, 即欧拉生成母图. 例如文献[2]研究了欧拉母图的树数条件. 类似于欧拉生成母图的研究, 我们首次研究度能被3整除的生成母图.

本文研究的内容是一般图以及树图是否存在度能被3整除的生成母图. 随着图阶数的增加, 每个图的度能被3整除的生成母图不唯一, 所以研究增加边数最少满足要求的生成母图很有意义, 即最优生成母图的构造.

1 各图类度能被3整除的生成母图

图 G 的顶点 v 的度记为 $d_G(v)$. 称 G' 是 G 的生成母图, 如果 $V(G') = V(G)$, $E(G') \supseteq E(G)$. 若 H 是 G 的子图, G

* 收稿日期: 2021-01-04

基金项目: 国家自然科学基金项目(11861066; 11961067; 12001465; 61963033).

作者简介: 熊玮(1985-), 女, 博士, 讲师, 从事图论及其应用的研究, E-mail: xingheng-1985@163.com.

中H的补图是指子图G - E(H), 记为H(G). 包含G的每个顶点的路称为G的Hamilton路, G的Hamilton圈是指包含G的每个顶点的圈, 包含Hamilton圈的图称为Hamilton图. 未给出的术语见文献[3].

定义 1 一个图G的能被3整除的最优生成母图是指图G加最少的边得到的度能被3整除的生成母图, 以下简称为最优母图.

定义 2 定义符号[d(v)]₃, 用来表示将顶点v的度增加至和d(v)最相近且大于d(v)的3的倍数.

定理^[3] 1 设G为任意无向图, |E(G)| = ε, 则 ∑_{v∈G} d(v) = 2ε.

命题^[3] 1 树T_n至少有两个一度顶点.

Dirac's定理^[3] 若G是简单图且|V(G)| ≥ 3, δ(G) ≥ $\frac{|V(G)|}{2}$, 则G是哈密尔顿的.

Tutte's定理^[3] 记O(G)为G的奇分支的个数, G有完美匹配, 当且仅当O(G - S) ≤ |S|, ∀S ∈ V(G).

图G的阶数n < 4时, ∀v ∈ G, max d_G(v) < 3, 所以没有度能被3整除的生成母图. 因此本文只考虑图的阶数n ≥ 4的情形.

图G增加最少的边得到度能被3整除的生成母图, 即每个顶点增加最少的度. 在构造图G的度能被3整除的生成母图时, 设v ∈ V(G), 将顶点v的度增加至和d(v)最相近且大于d(v)的3的倍数, 记为[d(v)]₃, 若此时能生成度能被3整除的生成母图, 该母图是图G的最优母图; 若此时不存在度能被3整除的生成母图, 考虑将其中一个顶点增加至[d(v)]₃ + 3度时是否存在满足要求的生成母图, 若不存在就按上述方法继续进行构造.

图的每个顶点v的度增加至3度时存在生成母图, 则该生成母图是3正则图, 显然3正则图是最优母图.

1.1 一般图度能被3整除的生成母图

命题 2 设G'为G的度能被3整除的生成母图, 则G到G'需增加的度和为偶数.

证明 由定理1知任意图G所有顶点的度和为偶数, G'所有顶点的度和也为偶数, 所以 ∑_{v∈G'} d(v) - ∑_{v∈G} d(v) 是偶数, 故命题成立.

定理 2 设G为简单图, 如果|V(G)| = 3k + 1 (k = 1, 2, ...), 则G存在度能被3整除的生成母图.

证明 阶为3k + 1的简单图其最大度为3k, 故只要将每个顶点与其余顶点均相连, 所得生成母图每个顶点的度都是3k且为完全图, 即为度能被3整除的生成母图.

定理 3 若|V(G)| = 3k (k = 1, 2, ...), Δ(G) ≤ $\frac{n}{2} - 1$, 则G存在度能被3整除的生成母图.

证明 设G是G的补图, 由Δ(G) ≤ $\frac{n}{2} - 1$, 得δ(G) ≥ n - 1 - Δ(G) = $\frac{n}{2}$. 由Dirac's定理, G中有Hamilton圈C. 将G加边至完全图K_n, 设v ∈ V(K_n), 则d_{K_n}(v) = 3k - 1, 则K_n - C, 即为G的度能被3整除的生成母图.

定理 4 设|V(G)| = 3k + 2, 且k为偶数. 若G有完美匹配M, 则G存在度能被3整除的生成母图.

证明 将G加边至完全图K_n, 设v ∈ V(K_n), 则d_{K_n}(v) = 3k + 1, 则K_n - M为G的度能被3整除的生成母图.

1.2 特殊图类度能被3整除的生成母图的构造

具有n个顶点的路为P_n, 记P_n = v₁v₂...v_n. 称二部图K_{1,n-1}是n阶星图, 记为S_n, S_n中与其余顶点都相邻的点称为中心点, 记为s. 将n阶星图S_n的1度顶点连成圈, 所得图称为n阶轮图, 记为W_n. 两个星图的中心点用一条边相连, 所得的图称为双星图S_{m,n}, 两个中心点分别记为s₁, s₂, 与s₁相邻的点记为u_i (i = 1, 2, ..., m), 与s₂相邻的点记为v_i (i = 1, 2, ..., n). 下面给出了路图、星图和双星图度能被3整除的生成母图的完全刻画.

定理 5 对于路P_n, 当n = 4或n ≥ 6时P_n存在度能被3整除的生成母图; 当n = 5时P_n没有度能被3整除的生成母图.

证明 设路P_n = v₁v₂...v_n, 其度能被3整除的生成母图记为P'_n, 下面按P_n的阶数分类讨论.

情形 1 当n = 4时, 由定理2知P_n存在度能被3整除的生成母图K₄, 且K₄是P₄的最优母图.

情形 2 当n = 5时, 若P₅存在度能被3整除的生成母图P'₅, 而max d_{P'₅}(v) ≤ 4, 则P'₅中所有顶点的度只能为3, 此时需为两端点各加2度, 中间3个顶点各加1度, 共增加7度, 由命题1知P₅没有度能被3整除的生成母图.

情形 3.1 当n ≥ 6时且n为偶数时, 将P_n加边使其有度能被3整除的生成母图, 先考虑将两端点各增加2度, 其余顶点各增加1度, 共增加n + 2度, 由命题1知可能存在度能被3整除的生成母图, 下证其存在性. 由n ≥ 6, v₁与v₂是不同的两顶点, v $\frac{n}{2}+1$ 与v_n是不同的两顶点, 加边v₁v $\frac{n}{2}$, v $\frac{n}{2}+1$ v_n, 则每个顶点都只需1度即可被3整除, n是偶数, 增加边集E₁ = {v_iv_j | i + j = n + 1}, 生成母图P'_n的边集E'(P'_n) = E(P_n) ∪ E₁, 所得生成母图是3正则

图,见图1(左),故路 P_n 在 $n \geq 6$ 时且 n 为偶数时存在度能被3整除.

情形 3.2 当 $n \geq 6$ 时且 n 为奇数时,将 P_n 加边使其有度能被3整除的生成母图,先考虑将两端点各增加2度,其余顶点各增加1度,共增加 $n+2$ 度,由命题1知不存在度能被3整除的生成母图,所以在此基础上给一个顶点再增加3度,即将一个顶点加边至6度,此时需增加 $n+5$ 度,由命题1知 P_n 可能存在度能被3整除的生成母图,下证其存在性.不妨设6度顶点为 $v_{\frac{n+1}{2}}$, P_n 加边 $v_{\frac{n+1}{2}}v_n, v_{\frac{n+1}{2}}v_1, v_{\frac{n+1}{2}}v_2$,由 $n \geq 6$,增加的边不是重边.边集 $E_2 = \{v_1v_n \cup v_iv_j | i+j = n+1\}$,生成母图 P'_n 的边集为 $E'(P'_n) = E(P_n) \cup E_2$,所得生成母图除点 $v_{\frac{n+1}{2}}$ 外均为3度点,见图1(右),故路 P_n 在 $n \geq 6$ 时且 n 为奇数时存在度能被3整除.



图 1 情形3.1、3.2图示

Fig 1 Figures of subcases 3.1 and 3.2

现已证明路图 P_n 在当 $n=4$ 或 $n \geq 6$ 时 P_n 存在度能被3整除的生成母图,下面构造出增加边数最少生成的度能被3整除的生成母图,即最优母图.对于路图,若将所有顶点加边至3度时存在生成母图,则该母图就是最优母图;若将所有顶点加边至3度时不存在生成母图,考虑将其中一个顶点加边至6度,其余顶点仍加边至3度时是否存在生成母图,以此类推构造路图的最优母图.

推论 1 定理5的证明中构造出的母图是最优母图.

证明 将 P_n 加边使其有度能被3整除的生成母图且增加的边数最少,即每个顶点增加最少的度,只要将每个顶点的度都增加至 $[d(v)]_3$,如果存在每个顶点的度为 $[d(v)]_3$ 的生成母图,则为最优母图.当增加的度和为奇数时由命题1知不存在最优母图,在此基础上给任一顶点再增加3度由命题1知可能存在最优母图,其存在性证明同定理5;当增加的度和为偶数时由定理1知可能存在最优母图,其存在性证明同定理5.

定理 6 星图 S_n ,当 $n=3k+1$ ($k=1,2,\dots$)时,存在度能被3整除的生成母图;当 $n=3k+2$ 或 $n=3k$ ($k=1,2,\dots$)时不存在度能被3整除的生成母图.

证明 在星图 S_n 中, $d(s)=n-1$.当 $n=3k+1$ ($k=1,2,\dots$)时,由定理1知存在度能被3整除的生成母图且是完全图 K_n .

当 $n=3k+2$ 或 $n=3k$ ($k=1,2,\dots$)时,有 $d(s)=3k+1$ 或 $d(s)=3k-1$,不能被3整除,且 s 已与其余所有的点相连,所以 $d(s)$ 不能加边至 $[d(v)]_3$ 度,故 S_n 不存在度能被3整除的生成母图.

推论 2 星图 S_n ,当 $n=3k+1$ ($k=1,2,\dots$)时的最优母图为 W_n .

证明 当 $n=3k+1$ ($k=1,2,\dots$)时, $d(s)=3k$.由定理1知存在度能被3整除的生成母图且是完全图 K_n .但 K_n 不是 S_n 的最优母图,中心点 s 的度已被3整除,其余点均为2度,只要将1度顶点连成圈,所得的生成母图是轮图 W_n 的度能被3整除且是最优母图.

定理 7 双星图 $S_{m,n}$ 存在度能被3整除的生成母图.

证明 对于双星图 $S_{m,n}$,我们分以下7种情况讨论:

情形 1 当 $m=2, n=2$ 时,显然有度能被3整除的生成母图且是3正则图.当 $m=2, n=3$ 时, $d(s_2)=4$,设 v 是 $S_{m,n}$ 的生成母图的顶点,则 $\max d(v)=6$,为得到 $S_{2,3}$ 的度能被3整除的生成母图, S_1 已满足要求, S_2 必须加相联的边至6度,且只能与 u_1 和 u_2 分别相连,再将 u_1 和 u_2 相连, v_1, v_2, v_3 连成圈,所得生成母图的度能被3整除.

情形 2 当 $m=3k_1, n=3k_2$ ($k_1, k_2=1,2,\dots$)时,有 $d(s_1)=3k_1+1, d(s_2)=3k_2+1$,设 $v \in S_{m,n}$,将 v 加边至 $[d(v)]_3$ 度,所有的顶点都只需2度,其度即可被3整除,需增加的度和为 $6k_1+6k_2+4$,由命题1知 $S_{m,n}$ 可能存在度能被3整除的生成母图,下证其存在性. s_1 只能与 $N = \{v_i | i=1,2,\dots,n\}$ 中的任意两个顶点相连,不妨设为 v_1 和 v_n , s_2 只能与 $M = \{u_i | i=1,2,\dots,m\}$ 中的任意两个顶点相连,不妨设为 u_1 和 u_m ,再将 u_1, u_2, \dots, u_m 和 v_1, v_2, \dots, v_n 分别连成路,所得的生成母图就是度能被3整除的生成母图.

情形 3 当 $m = 3k_1$, $n = 3k_2 + 1$ ($k_1, k_2 = 1, 2, \dots$)时, $d(s_1) = 3k_1 + 1$, $d(s_2) = 3k_2 + 1$, 设 $v \in S_{m,n}$, 将 v 加边至 $[d(v)]_3$ 度, 需增加 $6k_1 + 6k_2 + 5$ 度, 由命题1知不存在度能被3整除的生成母图, 现考虑在此基础上将其中任意一个顶点再增加3度, 此时需增加 $6k_1 + 6k_2 + 8$ 度, 由命题1知可能存在度能被3整除的生成母图, 下证其存在性. s_1 只能与 $N = \{v_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ 中的任意两个顶点相连, 不妨设为 v_1 和 v_n , s_2 只能与 $M = \{u_i | i = 1, 2, \dots, m\}$ 中的任一顶点相连, 不妨设为 u_1 , 经验证再增加3度的顶点的选取不影响构造满足要求的生成母图, 不妨将顶点 v_1 增加至6度, 将 v_1 与 u_1, u_2, u_m, v_1 分别相连, 将 u_2, u_3, \dots, u_m 和 v_1, v_2, \dots, v_n 分别连成路, 所得的生成母图就是度能被3整除的生成母图.

情形 4 当 $m = 3k_1$, $n = 3k_2 + 2$ ($k_1, k_2 = 1, 2, \dots$)时, $d(s_1) = 3k_1 + 1$, $d(s_2) = 3k_2 + 3$, 设 $v \in S_{m,n}$, 将 v 加边至 $[d(v)]_3$ 度, s_2 已满足要求, 其余所有的顶点均只需2度即可被3整除, 需增加的度和为 $6k_1 + 6k_2 + 6$, 由命题1知 $S_{m,n}$ 可能存在度能被3整除的生成母图, 下证其存在性. s_1 只能与 $N = \{v_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ 中的任意两顶点相连, 不妨设为 v_1 和 v_n , 将 $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$ 连成圈, 将 v_1, v_2, \dots, v_n 连成路, 所得的生成母图就是度能被3整除的生成母图.

图2从左到右分别表示当 $m = 3k_1$, $n = 3k_2$; $m = 3k_1$, $n = 3k_2 + 1$; $m = 3k_1$, $n = 3k_2 + 2$ 时 $S_{m,n}$ 的度能被3整除的生成母图的一种情况.

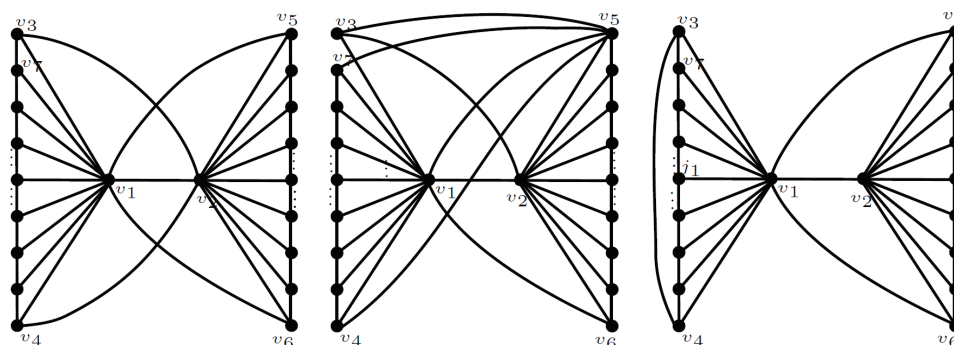


图 2 情形2、3和4的图示

Fig 2 Figures of subcases 2, 3 and 4

情形 5 $m = 3k_1 + 1$, $n = 3k_2 + 1$ ($k_1, k_2 = 1, 2, \dots$)时, $d(s_1) = 3k_1 + 2$, $d(s_2) = 3k_2 + 2$, 设 $v \in S_{m,n}$, 将 v 加边至 $[d(v)]_3$ 度, s_1 和 s_2 需增加1度, 其余所有的顶点均需2度即可被3整除, 需增加的度和为 $6k_1 + 6k_2 + 6$, 由命题1知 $S_{m,n}$ 可能存在度能被3整除的生成母图, 下证其存在性. s_1 只能与 $N = \{v_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ 中的任一顶点相连, 不妨设为 v_1 , s_2 只能与 $M = \{u_i | i = 1, 2, \dots, m\}$ 中的任一顶点相连, 不妨设为 u_1 , 连接 u_m 和 v_n , 将 $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$ 连成路, 将 v_1, v_2, \dots, v_n 连成路, 所得的生成母图就是度能被3整除的生成母图.

情形 6 $m = 3k_1 + 1$, $n = 3k_2 + 2$ ($k_1, k_2 = 1, 2, \dots$)时, $d(s_1) = 3k_1 + 2$, $d(s_2) = 3k_2 + 3$, 设 $v \in S_{m,n}$, 将 v 加边至 $[d(v)]_3$ 度, 需增加 $6k_1 + 6k_2 + 7$ 度, 由命题1知不存在度能被3整除的生成母图, 现考虑在此基础上将其中任意一个顶点再增加3度, 此时需增加 $6k_1 + 6k_2 + 10$ 度, 由命题1知可能存在度能被3整除的生成母图, 下证其存在性. s_1 只能与 $N = \{v_i | i = 1, 2, \dots, n\}$ 中的任一顶点相连, 不妨设为 v_1 , s_2 已满足要求, 经验证再增加3度的顶点的选取不影响构造满足要求的生成母图, 不妨将顶点 v_1 增加至6度, 将 v_1 与 u_1, u_2, u_m, v_2 分别相连, 将 $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$ 和 v_1, v_2, \dots, v_n 分别连成路, 所得的生成母图就是度能被3整除的生成母图.

情形 7 $m = 3k_1 + 2$, $n = 3k_2 + 2$ ($k_1, k_2 = 1, 2, \dots$)时, $d(s_1) = 3k_1 + 3$, $d(s_2) = 3k_2 + 3$, 设 $v \in S_{m,n}$, 将 v 加边至 $v \in [d(v)]_3$ 度, s_1 和 s_2 已满足要求, 其余所有的顶点均需2度即可被3整除, 需增加的度和为 $6k_1 + 6k_2 + 8$, 由命题1知 $S_{m,n}$ 可能存在度能被3整除的生成母图, 下证其存在性. 将 $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$ 连成圈, v_1, v_2, \dots, v_n 连成圈, 所得的生成母图就是度能被3整除的生成母图.

图3从左到右依次是当 $m = 3k_1 + 1$, $n = 3k_2 + 1$; $m = 3k_1 + 1$, $n = 3k_2 + 2$ 和 $m = 3k_1 + 2$, $n = 3k_2 + 2$ 时 $S_{m,n}$ 的度能被3整除的生成母图的一种情况.

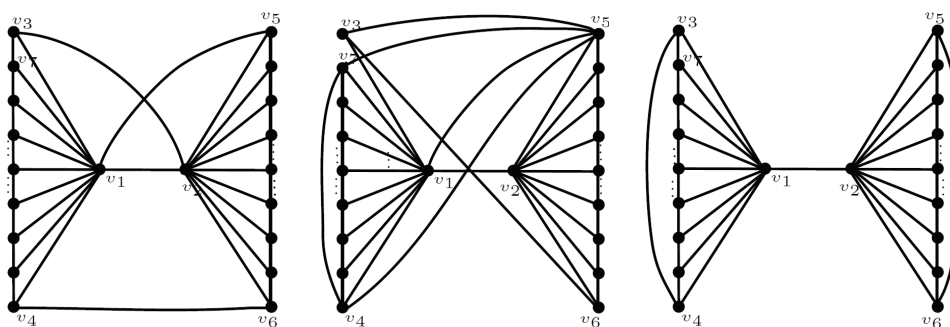


图 3 情形5、6和7的图示

Fig 3 Figures of subcases 5, 6 and 7

1.3 树图度能被3整除的生成母图

命题 3 设 T 为树图, $\forall S \subseteq V, \omega(\bar{T} - S) \leq 2$.

证明 反证, 假设 $\omega(\bar{T} - S) \geq 3$, 设 C_1, C_2, C_3 为 $\bar{T} - S$ 的 3 个连通分支, 则分别在 C_1, C_2, C_3 中任取一点 v_1, v_2, v_3 , 由于在 \bar{T} 中 v_1, v_2, v_3 之间无边, 因此在 T 中, $v_1 v_2 v_3$ 形成一个 3 圈, 与树无圈矛盾, 故 $\omega(\bar{T} - S) \leq 2$.

命题 4 若树图 T 不是星, 则 $\omega(\bar{T}) = 1$.

证明 反证, 设 \bar{T} 有两个连通分支 C_1, C_2 , 若 $|C_1| \geq 2, |C_2| \geq 2$, 则在 T 中 C_1, C_2 中的点构成一个长度大于等于 4 的圈, 矛盾. 故 $|C_1| = 1$ 或 $|C_2| = 1$, 则 T 是星, 矛盾.

定理 8 树图 T 不为星图, 树图 T 的顶点数 $n = 3k + 2$, 且 n 为偶数, 则 T 有度能被 3 整除的生成母图.

证明 由定理 4, 只需证 \bar{T} 有完美匹配. 由 Tutte's 定理, 只需证 $O(\bar{T} - S) \leq |S|, \forall S \subseteq V$. 下证 $O(\bar{T} - S) \leq |S|, \forall S \subseteq V$.

情形 1 $S = \emptyset$, 由于 T 不是星图, 由命题 4 知, $\omega(\bar{T}) = 1$. 由 n 为偶数, $O(\bar{T}) = 0$, 故 $O(\bar{T} - S) \leq 0$.

情形 2 $|S| = 1$, 由命题 3 知, $\omega(\bar{T} - S) \leq 2$, 由于 n 是偶数, 故 $O(\bar{T} - S) \leq 1$.

情形 3 $|S| \geq 2$, 由命题 3 知, $\omega(\bar{T} - S) \leq 2$.

故树 T 不为星图, 树 T 的顶点数 $n = 3k + 2$, 且 n 为偶数时, T 有度能被 3 整除的生成母图.

2 结论

树图 T_n , 由定理 2 知, 当 $n = 3k + 1$ 时存在度能被 3 整除的生成母图; 由定理 8 知, 当树 T_n 不为星图, 顶点数 $n = 3k + 2$, 且 n 为偶数时, T 有度能被 3 整除的生成母图; 由定理 3 知, 当 $n = 3k$ 且 $\Delta(T) \leq \frac{n}{2} - 1$ 时存在度能被 3 整除的生成母图. 对于顶点数 $n = 3k + 2$, 且 n 为奇数的情况尚未讨论, 推测同样存在.

参考文献:

[1] 孙建新. Hamilton图的特定生成子图问题的一般反例[J]. 新疆大学学报(自然科学版), 1996, 13(2): 45-48.
 SUN J X. General counterexamples about problem of special generating subgraph of Hamiltonian graph[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition), 1996, 13(2): 45-48. (in Chinese)

[2] 韩贞耀. 欧拉母图的树数条件[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 1993, 16(3): 180-182.
 HAN Z Y. An aborcicity condition for supereulerian graphs[J]. Journal of Liaoning Normal University(Natural Science Edition), 1993, 16(3): 180-182. (in Chinese)

[3] BONDY B A, MURTY U S R. Graph theory[M]. London: Springer, 2008.

责任编辑: 赵新科