

# 具有脉冲效应和随机扰动的 Markov 跳跃主从 多智能体系统固定时间一致\*

夏孟瑶, 蒋海军<sup>†</sup>, 于志永

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

**摘要:** 本文研究了一类具有脉冲效应和随机扰动的 Markov 跳跃主从多智能体系统固定时间一致性问题. 首先, 提出了一种具有脉冲效应的切换状态反馈非线性控制协议, 以实现多智能体系统达成一致; 其次, 通过利用随机分析理论, Lyapunov 稳定性理论, 得到了保证主从多智能体系统在固定时间内达到一致的充分条件; 最后, 数值算例验证了理论结果的正确性.

**关键词:** 主从多智能体系统; 一致性; 脉冲效应; 固定时间

**DOI:** 10.13568/j.cnki.651094.651316.2021.02.24.0001

**中图分类号:** O231.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2022)02-0144-07

**引文格式:** 夏孟瑶, 蒋海军, 于志永. 具有脉冲效应和随机扰动的 Markov 跳跃主从多智能体系统固定时间一致[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2022, 39(2): 144-150+196.

**英文引文格式:** XIA Mengyao, JIANG Haijun, YU Zhiyong. Fixed-time consensus Markovian jumping stochastic leader-following multi-agent systems with impulsive effects[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2022, 39(2): 144-150+196.

## Fixed-Time Consensus Markovian Jumping Stochastic Leader-Following Multi-Agent Systems with Impulsive Effects

XIA Mengyao, JIANG Haijun, YU Zhiyong

(School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China)

**Abstract:** This paper proposes a theoretical framework to study the fixed-time leader-following consensus problem for a class of Markovian jumping stochastic multi-agent systems (MASs). State feedback switching nonlinear control protocols with impulsive effects is presented to achieve the leader-following MASs consensus. And by employing stochastic analysis theory, Lyapunov stability theory, the sufficient criterion is derived to guaranteed fixed-time leader-following consensus. Moreover, the settling time is calculated as well. Finally, one example is provided to show the effectiveness of the theoretical analysis.

**Key words:** leader-following multi-agent systems; consensus; impulsive effects; fixed-time

### 0 引言

近几十年来, 多智能体系统的协同控制因其在无人机、航天器姿态协调、电网电源管理<sup>[1-3]</sup>等领域的广泛应用而引起了人们的广泛关注. 一致性行为是一种合作控制行为, 其目的是使智能体之间通过信息交换从而达到某种统一的协议. 到目前为止, 为了解决多智能体系统一致性问题, 学者们从不同的方面提出了不同的有效的

\* 收稿日期: 2021-02-24

基金项目: 天山青年项目(2018Q068); 天山雪松项目(2018XS02).

作者简介: 夏孟瑶(1996-), 女, 硕士生, 从事多智能体系统分布式协同控制的研究, E-mail: 1519692673@qq.com.

<sup>†</sup> 通讯作者: 蒋海军(1968-), 男, 博士, 教授, E-mail: jianghaijunxj@126.com.

控制协议,如事件触发控制、滑模控制等<sup>[4-5]</sup>.

在实际环境中,像物理系统、机械设备系统等网络系统往往会受到不确定性环境的影响,这种干扰可以称为随机干扰.文献[6]为了处理未知和时变问题提出了时变一致性方案,解决了一类不确定随机非线性多智能体系统的时变一致性问题.在另一个学术领域,Markov 跳跃系统受到了广泛的关注,因为它是一种混合系统,具有描述大多数物理系统结构突变的优势,如意外事件和不受控制的结构型变化.它是在不同时间从一种模式切换到另一种模式的切换系统,不同模式之间的切换可以通过 Markov 链来实现.文献[7]研究了一类具有 Markov 特征的二阶多智能体系统的一致性问题,其中随机切换拓扑和随机通信时滞由两个相互独立的 Markov 链所控制.直到现在,研究 Markov 跳跃的随机多智能体系统较少.因此,本文考虑了具有 Markov 跳跃的随机主从多智能体系统.

在动力系统的演化过程中,由于受外部环境干扰或者机器发生故障,系统在某一时刻发生的突然变化称为脉冲效应<sup>[8-10]</sup>.脉冲效应作为一种普遍存在的现象,有很多优点和缺点,它的优点是提高数据安全性,降低控制成本.缺点是它会破坏系统的性能.文献[10]设计了一种混合有限时间稳定控制器,利用 Lyapunov 函数给出了脉冲动力系统的有限时间稳定条件.

与现有的研究相比,本文的主要贡献如下:(1)本文考虑了具有脉冲效应的 Markov 跳跃和随机扰动的主从多智能体系统;(2)Markov 跳跃函数不仅存在于系统中,而且应用于所设计的控制器中.同时,本文还考虑了脉冲效应.从而使得系统在固定时间内达到一致.

## 1 模型建立及预备知识

首先,给出本文所用到的记号.其中  $R^n$  表示  $n$  维欧几里得空间.  $\|\cdot\|$  表示欧几里得范数.  $I_N$  表示  $N$  维单位矩阵.对于矩阵  $A$ ,  $A^T$ ,  $\lambda_{\max}(A)$  和  $\lambda_{\min}(A)$  分别代表矩阵  $A$  的转置、最大特征值和最小特征值.  $A > 0$  表示矩阵  $A$  是一个正定矩阵.  $\text{diag}(\cdot)$  表示对角矩阵.  $\text{sign}(\cdot)$  代表符号函数.  $E\{\cdot\}$  表示数学期望.

考虑由  $N$  个智能体所组成的网络,网络拓扑图由图  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  表示,其中  $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$  表示节点集,  $\mathcal{E} = \{(i, j) | i, j \in \mathcal{V}\}$  表示边集,记智能体  $i$  的邻居节点集为  $\mathcal{N}_i = \{j | (i, j) \in \mathcal{E}\}$ .  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$  是图  $\mathcal{G}$  的邻接矩阵,若  $(i, j) \in \mathcal{E}$ ,则  $a_{ij} > 0$ ,否则,  $a_{ij} = 0$ .对于无向图  $\mathcal{G}$  来说,  $a_{ij} = a_{ji}$ .记节点的度矩阵为  $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_N\}$ ,其中  $d_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}$ .则图  $\mathcal{G}$  的拉普拉斯矩阵定义为  $\mathcal{L} = D - A$ .令矩阵  $H = \mathcal{L} + B$ ,其中  $B = \text{diag}\{b_1, b_2, \dots, b_N\}$ ,如果智能体  $i$  能够接收到领导者的信息,则  $b_i = 1$ ,否则,  $b_i = 0$ .

Markov 链  $r(t)$  ( $t \geq 0$ ) 在概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{t \geq 0}, \mathcal{P})$  上是右连续的,它在有限集  $S = \{1, 2, \dots, s\}$  上取值且算子  $\theta = [\theta_{d\rho}]_{s \times s}$  ( $d, \rho \in S$ ) 满足

$$\mathcal{P}\{r(t + \Delta t) = \rho | r(t) = d\} = \begin{cases} \theta_{d\rho} \Delta t + o(\Delta t), & d \neq \rho \\ 1 + \theta_{dd} \Delta t + o(\Delta t), & d = \rho \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\Delta t > 0$  满足  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ .  $\theta_{d\rho}$  表示从状态  $d$  到状态  $\rho$  的转移概率,如果  $d \neq \rho$ ,则  $\theta_{d\rho} \geq 0$ ,如果  $\theta_{d\rho} < 0$ ,有

$$\theta_{dd} = - \sum_{\rho=1, d \neq \rho}^N \theta_{d\rho}.$$

第  $i$  个跟随者智能体的随机动力系统描述为

$$dx_i(t) = [A(r(t))x_i(t) + B(r(t))f(x_i(t), t) + u_i(r(t))]dt + g(x_i(t), t)dw(t) \quad (2)$$

其中  $r(t), t \geq 0$  表示在  $t$  时刻马尔可夫过程的模态演变过程.  $A(r(t)), B(r(t)) \in R^{n \times n}$  表示模态为  $r(t)$  的常数矩阵.  $x_i(t) \in R^n, (i = 1, \dots, N)$  表示第  $i$  个智能体的状态,  $u_i(r(t)) \in R^n$  代表第  $i$  个智能体的控制输入向量.  $f(\cdot) \in R^n$  表示  $i$  个智能体的连续函数.  $g(\cdot) \in R^{n \times n}$  为跟随者智能体的噪声强度函数.  $w(t) \in R^n$  表示布朗运动,并且满足  $E\{dw(t)\} = 0$  和  $E\{[dw(t)]^2\} = dt$ ,假设 Markov 链  $r(\cdot)$  与布朗运动  $w(\cdot)$  是相互独立的.

领导者  $x_0(t)$  的随机动力系统描述为

$$dx_0(t) = [A(r(t))x_0(t) + B(r(t))f(x_0(t), t)]dt + g(x_0(t), t)dw(t) \quad (3)$$

其中  $x_0(t) \in R^n$  表示领导者的状态,  $f(x_0(t), t) \in R^n$  表示领导者的连续函数,  $g(x_0(t), t) \in R^{n \times n}$  表示领导者的噪声强度函数.

下面给出一些假设、引理和定义.

**假设 1** 对于任意的向量  $x \in R^n, y \in R^n$ , 假设函数  $f(\cdot)$  是 Lipschitz 连续的, 则存在一个常数  $k_1 > 0$  使得

$$\|f(x(t), t) - f(y(t), t)\| \leq k_1 \|x(t) - y(t)\|.$$

**假设 2** 对于噪声强度函数  $g(x_i(t), t), x_i(t) \in R^n$  满足以下 Lipschitz 条件

$$\text{trace}[g(x_i(t), t)^T g(x_i(t), t)] \leq k_2 x_i^T(t) x_i(t),$$

其中  $k_2 > 0$ .

**引理 1**<sup>[11]</sup> 如果存在  $\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, \xi_3 \geq 0, \dots, \xi_N \geq 0$  以及  $0 < p \leq 1, q > 1$ , 则有

$$\left(\sum_{i=1}^N \xi_i\right)^p \leq \sum_{i=1}^N \left(\xi_i\right)^p, \quad \sum_{i=1}^N \xi_i^q \geq N^{1-q} \left(\sum_{i=1}^N \xi_i\right)^q.$$

**引理 2**<sup>[8]</sup> 令  $V(t)$  是连续非负函数, 假设其满足以下条件

$$\begin{cases} \dot{V}(t) \leq -\alpha V^\mu(t) - \eta V^\vartheta(t), & t \neq t_k, \\ V(t_k^+) \leq \rho V(t_k^-), \end{cases}$$

其中  $\alpha, \eta > 0, 0 < \rho \leq 1, 0 < \mu \leq 1, \vartheta > 1$ , 则称  $V(t)$  在固定时间  $T$  内趋于 0, 其中  $T$  满足

$$T \leq T_{\max} = \frac{1}{\alpha(1-\mu)} + \frac{1}{\eta(\vartheta-1)}.$$

**定义 1** 对于一个时间  $T(0)$  不依赖于系统初值  $x_i(0), x_0(0)$ , 如果说系统 (2) 和系统 (3) 在固定时间内达到一致, 则有  $\lim_{t \rightarrow T} E\{\|x_i(t) - x_0(t)\|\} = 0$  和  $E\{\|x_i(t) - x_0(t)\|\} \equiv 0, t \geq T$  成立. 其中  $T$  为停息时间.

## 2 主要结论

为了实现固定时间一致, 设计以下切换反馈控制器

$$u_i(r(t)) = u_{1i}(r(t)) + u_{2i}(r(t)) \quad (4)$$

其中

$$\begin{cases} u_{1i}(r(t)) = -\alpha_1(r(t))e_i(t) - \beta_1(r(t))\text{diag}(\text{sign}(e_i(t)))|e_i(t)|^\nu - \beta_2(r(t))\text{diag}(\text{sign}(e_i(t)))|e_i(t)|^u, \\ u_{2i}(r(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} \Upsilon_{ik}^2(r(t))e_i(t)\delta(t-t_k), \end{cases}$$

其中  $e_i(t) = x_i(t) - x_0(t)$ .

第  $i$  个智能体的误差动力学行为  $e_i(t)$  描述如下

$$\begin{cases} \text{de}_i(t) = [A(r(t))e_i(t) + B(r(t))f_{1i}(e_i(t), t) - \alpha_1(r(t))e_i(t) - \beta_1(r(t)) \\ \quad \text{diag}(\text{sign}(e_i(t)))|e_i(t)|^\nu - \beta_2(r(t))\text{diag}(\text{sign}(e_i(t)))|e_i(t)|^u]dt + g_{1i}(e_i(t), t)dw(t), & t \neq t_k \\ \Delta e_i(t_k) = e_i(t_k^+) - e_i(t_k^-) = \Upsilon_{ik}^2(r(t))e_i(t_k^-), & t = t_k \end{cases} \quad (5)$$

其中  $f_{1i}(e_i(t), t) = f(x_i(t), t) - f(x_0(t), t), g_{1i}(e_i(t), t) = g(x_i(t), t) - g(x_0(t), t)$ .

**定理 1** 若假设 1、假设 2 成立, 如果存在  $\bar{\theta}$  满足  $0 < \bar{\theta} < 1$ , 并且有

$$\alpha_1(r(t)) > \lambda_{\max}(A(r(t))) + \varepsilon_1^{-1} \lambda_{\max}(B(r(t))B(r(t))^T) + \varepsilon_1 k_1 + k_2,$$

和

$$\begin{cases} q_\rho - a_d \leq 0, & d \neq \rho (d, \rho \in S), \\ q_\rho - a_d > 0, & d = \rho (d, \rho \in S). \end{cases}$$

成立, 则主从随机多智能体系统 (2) 和 (3) 在控制协议 (4) 下在固定时间内达到一致, 其中, 停息时间  $T$  为

$$T = \frac{1}{\bar{\beta}_1(1-\bar{\nu})} + \frac{1}{\bar{\beta}_2(\bar{u}-1)},$$

其中  $\bar{\theta} = \lambda_{\max} \left( (I + \Upsilon_{ik}^2(r(t)))^T (I + \Upsilon_{ik}^2(r(t))) \right)$ ,  $\bar{\beta}_1 = 2\beta_{\min}^1$ ,  $\bar{\beta}_2 = \frac{2N^{\frac{1-u}{2}} \beta_{\min}^2}{q_d^{\frac{1+u}{2}}}$ ,  $\bar{\nu} = \frac{\nu+1}{2} \in (0, 1)$ ,  $\bar{u} = \frac{u+1}{2} > 1$ .

**证明** 定义如下 Lyapunov 函数

$$V(t) = q_d \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t),$$

其中  $q_d > 1$ . 当  $t \neq t_k$  时,  $V(t)$  关于  $t$  沿着系统 (5) 随机微分可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(t) = & 2q_d \sum_{i=1}^N e_i^T(t) [A(r(t))e_i(t) + B(r(t))f_{1i}(e_i(t), t) - \alpha_1(r(t))e_i(t) \\ & - \beta_1(r(t))\text{diag}(\text{sign}(e_i(t)))|e_i(t)|^\nu - \beta_2(r(t))\text{diag}(\text{sign}(e_i(t)))]|e_i(t)|^u \\ & + q_d \sum_{i=1}^N \text{trace}[g_{1i}^T(e_i(t), t)g_{1i}(e_i(t), t)] + \sum_{\rho=1}^s q_\rho \theta_{d\rho} \left( \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) \right) \end{aligned} \quad (6)$$

根据假设 1 和假设 2 可得

$$2e_i^T(t)B(r(t))f_{1i}(e_i(t), t) \leq \varepsilon_1^{-1}e_i^T(t)B(r(t))B^T(r(t))e_i(t) + \varepsilon_1 k_1 e_i^T(t)e_i(t) \quad (7)$$

和

$$\text{trace}[g_{1i}^T(e_i(t), t)g_{1i}(e_i(t), t)] \leq k_2 e_i^T(t)e_i(t) \quad (8)$$

根据  $\theta_{ij}$  的定义, 其满足  $\sum_{\rho=1}^s \theta_{d\rho} = 0$ , 对于  $\forall a_d > 0 (d \in S)$  有

$$\left( \sum_{\rho=1}^s \theta_{d\rho} \right) a_d = 0 \quad (9)$$

将式(7)~(9)代入(6)可得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(t) \leq & 2q_d \sum_{i=1}^N e_i^T(t)A(r(t))e_i(t) + q_d \sum_{i=1}^N \varepsilon_1^{-1}e_i^T(t)B(r(t))B^T(r(t))e_i(t) \\ & + q_d \sum_{i=1}^N \varepsilon_1 k_1 e_i^T(t)e_i(t) - 2q_d \sum_{i=1}^N \alpha_1(r(t))e_i^T(t)e_i(t) - 2q_d \sum_{i=1}^N \beta_1(r(t))e_i^T(t)\text{diag}(\text{sign}(e_i(t)))|e_i(t)|^\nu \\ & - 2q_d \sum_{i=1}^N \beta_2(r(t))e_i^T(t)\text{diag}(\text{sign}(e_i(t)))|e_i(t)|^u + q_d \sum_{i=1}^N k_2 e_i^T(t)e_i(t) + \sum_{\rho=1}^s \theta_{d\rho} (q_\rho - a_d) \left( \sum_{i=1}^N e_i^T(t)e_i(t) \right) \\ = & \sum_{i=1}^N q_d e_i^T(t) \left( 2A(r(t)) + \varepsilon_1^{-1}B(r(t))B^T(r(t)) + \varepsilon_1 k_1 I_n + k_2 I_n \right. \\ & \left. - 2\alpha_1(r(t))I_n \right) e_i(t) + \sum_{\rho=1}^s \theta_{d\rho} (q_\rho - a_d) \left( \sum_{i=1}^N e_i^T(t)e_i(t) \right) \\ & - 2q_d \sum_{i=1}^N \beta_1(r(t))\text{diag}(\text{sign}(e_i(t)))|e_i(t)|^\nu - 2q_d \sum_{i=1}^N \beta_2(r(t))\text{diag}(\text{sign}(e_i(t)))|e_i(t)|^u. \end{aligned}$$

令  $\beta_{\min}^i = \min(\beta_i(r(t)))(i=1,2)$ , 根据定理 1 中的条件有

$$\begin{aligned} \mathcal{LV}(t) &\leq -2q_d \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \beta_1(r(t)) |e_{ij}(t)|^{\nu+1} - 2q_d \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \beta_2(r(t)) |e_{ij}(t)|^{u+1} \\ &\leq -2\beta_{\min}^1 q_d \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n |e_{ij}(t)|^{\nu+1} - 2\beta_{\min}^2 q_d \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n |e_{ij}(t)|^{u+1} \end{aligned} \tag{10}$$

由引理 1 可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n |e_{ij}(t)|^{\nu+1} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \left( (e_{ij}(t))^2 \right)^{\frac{\nu+1}{2}} \geq \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n (e_{ij}(t))^2 \right)^{\frac{\nu+1}{2}}, \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n |e_{ij}(t)|^{u+1} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \left( (e_{ij}(t))^2 \right)^{\frac{u+1}{2}} \geq N^{1-\frac{1+u}{2}} \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n (e_{ij}(t))^2 \right)^{\frac{1+u}{2}}, \end{aligned}$$

和

$$q_d \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n \left( (e_{ij}(t))^2 \right)^{\frac{\nu+1}{2}} \geq (q_d)^{\frac{\nu+1}{2}} \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n (e_{ij}(t))^2 \right)^{\frac{\nu+1}{2}}.$$

将上述不等式带入到式 (10) 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{LV} &\leq -2\beta_{\min}^1 (q_d)^{\frac{\nu+1}{2}} \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n (e_{ij}(t))^2 \right)^{\frac{\nu+1}{2}} - 2(N)^{\frac{1-u}{2}} \beta_{\min}^2 q_d \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n (e_{ij}(t))^2 \right)^{\frac{u+1}{2}} \\ &\leq -2\beta_{\min}^1 (q_d)^{\frac{\nu+1}{2}} \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n (e_{ij}(t))^2 \right)^{\frac{\nu+1}{2}} - 2 \frac{\left( (N)^{\frac{1-u}{2}} \beta_{\min}^2 \right)}{q_d^{\frac{1+u}{2}}} q_d^{\frac{1+u}{2}} \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^n (e_{ij}(t))^2 \right)^{\frac{u+1}{2}} \\ &= -\bar{\beta}_1 (V(t))^{\frac{\nu+1}{2}} - \bar{\beta}_2 (V(t))^{\frac{u+1}{2}} \end{aligned} \tag{11}$$

其中  $\bar{\beta}_1 = 2\beta_{\min}^1, \bar{\beta}_2 = 2 \frac{\left( (N)^{\frac{1-u}{2}} \beta_{\min}^2 \right)}{q_d^{\frac{1+u}{2}}}$ .

因此我们有

$$E[\mathcal{LV}(t)] \leq -\bar{\beta}_1 E[V(t)]^{\frac{\nu+1}{2}} - \bar{\beta}_2 E[V(t)]^{\frac{u+1}{2}} \tag{12}$$

当  $t = t_k$  时, 根据系统 (5) 第二个式子可得

$$\begin{aligned} V(t_k^+) &= q_d \sum_{i=1}^N e_i^T(t_k^+) e_i(t_k^+) \\ &= q_d \sum_{i=1}^N e_i^T(t_k^-) (I + \Upsilon_{ik}^2(r(t)))^T (I + \Upsilon_{ik}^2(r(t))) e_i(t_k^-) \\ &\leq \bar{\theta} q_d \sum_{i=1}^N e_i^T(t_k^-) e_i(t_k^-) \\ &= \bar{\theta} V(t_k^-) \end{aligned} \tag{13}$$

其中  $\bar{\theta} = \lambda_{\max} \left( (I + \Upsilon_{ik}^2(r(t)))^T (I + \Upsilon_{ik}^2(r(t))) \right) < 1$ .

对于  $\bar{\nu} = \frac{\nu+1}{2} \in (0,1), \bar{u} = \frac{u+1}{2} > 1$  以及结合式 (12) 和式 (13) 可得

$$\begin{cases} E[\mathcal{LV}(t)] \leq -\bar{\beta}_1 E[V(t)]^{\bar{\nu}} - \bar{\beta}_2 E[V(t)]^{\bar{u}}, & t \neq t_k, \\ E[V(t_k^+)] \leq \bar{\theta} E[V(t_k^-)], & t = t_k. \end{cases}$$

则根据引理 2 得到停息时间  $T$  为

$$T = \frac{1}{\beta_1(1-\bar{\nu})} + \frac{1}{\beta_2(\bar{u}-1)}.$$

根据以上分析, 存在一个与智能体的初值状态无关的时间  $T$ , 使得  $\lim_{t \rightarrow T} E\{\|x_i(t) - x_0(t)\|\} = 0, i = 1, 2, \dots, N$ . 根据定义 1 可得随机多智能体系统 (2) 和 (3) 在控制协议 (4) 下能够在固定时间内达到一致.

当系统不带有随机干扰时, 则可以将系统 (2) 和 (3) 改写为以下模型

$$\dot{x}_{ri}(t) = A(r(t))x_{ri}(t) + B(r(t))f(x_{ri}(t), t) + u_i(r(t)) \quad (14)$$

$$\dot{x}_{r0}(t) = A(r(t))x_{r0}(t) + B(r(t))f(x_{r0}(t), t) \quad (15)$$

设计如下控制器  $u_i(t) = u_{i1}(t) + u_{i2}(t)$

$$\begin{cases} u_{i1}(r(t)) = -\alpha_1(r(t))\sigma_i(t) - \beta_1(r(t))\text{diag}(\text{sign}(\sigma_i(t)))|\sigma_i(t)|^\nu \\ \quad -\beta_2(r(t))\text{diag}(\text{sign}(\sigma_i(t)))|\sigma_i(t)|^u \\ u_{i2}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Upsilon_{ik}^2(r(t))\sigma_i(t)\delta(t-t_k) \end{cases} \quad (16)$$

其中  $\sigma_i(t) = x_{ri}(t) - x_{r0}(t)$  表示跟踪误差.

具有脉冲效应的误差系统  $\sigma_i(t)$  描述为

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_i(t) = A(r(t))\sigma_i(t) + B(r(t))f_{1i}(\sigma_i(t), t) - \alpha_1(r(t))\sigma_i(t) \\ \quad -\beta_1(r(t))\text{diag}(\text{sign}(\sigma_i(t)))|\sigma_i(t)|^\nu \\ \quad -\beta_2(r(t))\text{diag}(\text{sign}(\sigma_i(t)))|\sigma_i(t)|^u, \quad t \neq t_k \\ \Delta\sigma_i(t_k) = \sigma_i(t_k^+) - \sigma_i(t_k^-) = \Upsilon_{ik}^2(r(t))\sigma_i(t_k^-), \quad t = t_k \end{cases} \quad (17)$$

其中  $f_{1i}(\sigma_i(t), t) = f(x_i(t), t) - f(x_0(t), t)$ ,  $g_{1i}(\sigma_i(t), t) = g(x_i(t), t) - g(x_0(t), t)$ .

**推论 1** 若假设 1、假设 2 成立, 以及存在一个常数  $\alpha_1(r(t))$  满足  $\alpha_1(r(t)) > \lambda_{\max}A(r(t)) + \frac{1}{2}\varepsilon_1^{-1}\lambda_{\max}(B(r(t))B^T(r(t))) + \frac{1}{2}\varepsilon_1 k_1$ , 则系统 (14) 和 (15) 在控制协议 (16) 下能够在固定时间内达到一致. 根据引理 2 可得停息时间  $T_1$  为

$$T_1 = \frac{1}{\beta_1(1-\bar{\nu})} + \frac{1}{\beta_2(\bar{u}-1)}.$$

**注 1** 推论 1 的证明与定理 1 的证明相同, 但是  $\alpha_1(r(t))$  的取值范围不同. 因为系统 (2)和(3) 中存在随机干扰, 所以定理 1 中的  $\alpha_1(r(t))$  取值与  $k_2$  有关. 而推论 1 中的  $\alpha_1(r(t))$  取值与  $k_2$  无关, 所以在随机系统 (1)和(2) 中  $\alpha_1(r(t))$  的取值范围比系统 (14)和(15) 中的更为严格.

### 3 数值模拟

在本节将以数值模拟来验证本文所提出的控制算法的正确性.

考虑具有 Markov 跳跃的主从随机多智能体系统, 令  $n = 2, N = 5$ , 并选取如下的转移概率矩阵  $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix},$$

选取矩阵参数如下

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.1 \\ 0.2 & 0.12 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.25 & 0.13 \end{pmatrix}.$$

脉冲增益矩阵选取为

$$\Upsilon_{i1}^2 = \begin{pmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{pmatrix}, \Upsilon_{i2}^2 = \begin{pmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & -0.3 \end{pmatrix},$$

非线性函数  $f_i(x_i(t), t)$  选取为

$$f_i(x_i(t), t) = \tanh(x_i(t)), i = 0, 1, 2, 3, 4,$$

噪声强度函数  $g(x_i(t), t)$  为

$$g(x_i(t), t) = 0.3\text{diag}\{x_{i1}(t), x_{i2}(t)\}, i = 0, 1, 2, 3, 4,$$

令智能体的初值状态为  $x_0 = (-30, 12)^T, x_1 = (25, -20)^T, x_2 = (14, -23)^T, x_3 = (-10, -5)^T, x_4 = (-40, -6)^T$ .

图 1 表示系统维纳过程. 图 2 表示定理 1 中的 Markov 切换过程. 图 3 和图 4 描述了在系统不受控制的条件下智能体的状态轨迹图.

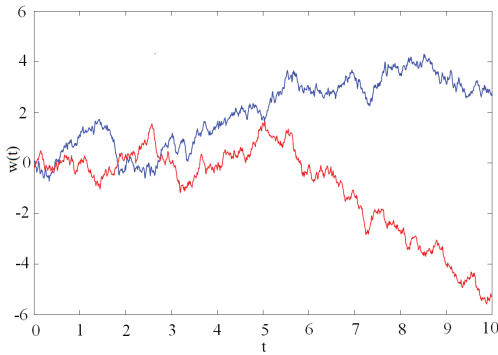


图 1 维纳过程

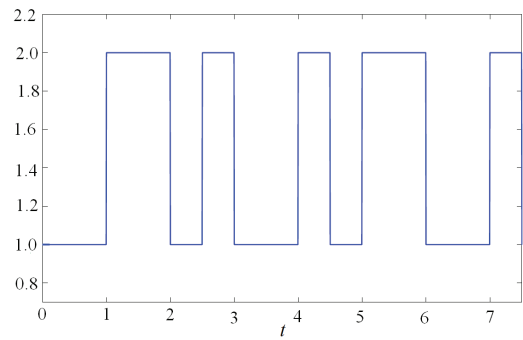


图 2 Markov 切换过程

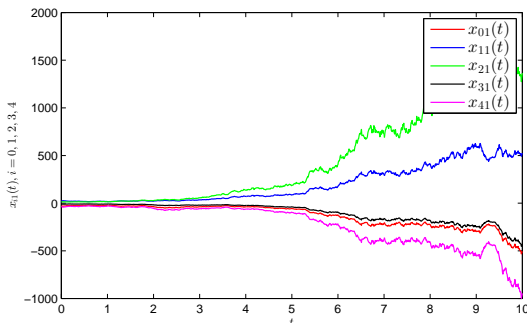


图 3 无控制下的智能体  $x_{i1}(t)$  状态轨迹

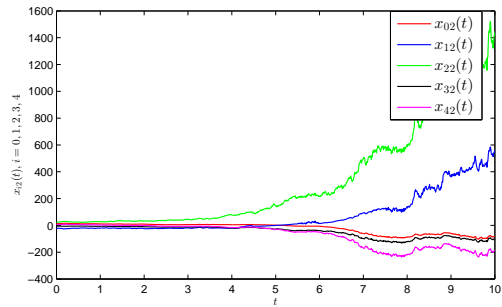


图 4 无控制下的智能体  $x_{i2}(t)$  状态轨迹

通过选取满足假设定理的合适参数  $k_1 = 1, k_2 = 2, \alpha_1(1) = 0.73, \alpha_1(2) = 0.69, \beta_1(1) = 0.9, \beta_1(2) = 1.15, \beta_2(1) = 1.2, \beta_2(2) = 0.8, q_d = 1.02$ , 并令  $\nu = 0.4, u = 1.2$ , 得到了固定时间一致的图, 其中图 5 和图 6 表示控制下的智能体的状态轨迹. 从数值模拟中可以看到本文所设计的控制器的有效性.

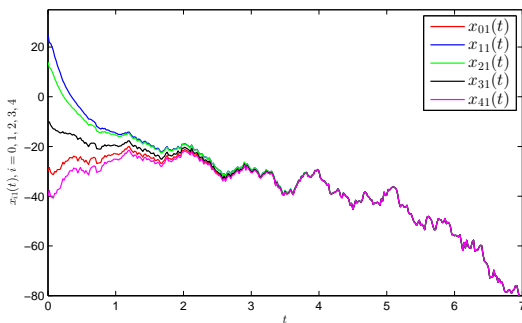


图 5 控制下的智能体  $x_{i1}(t)$  状态轨迹

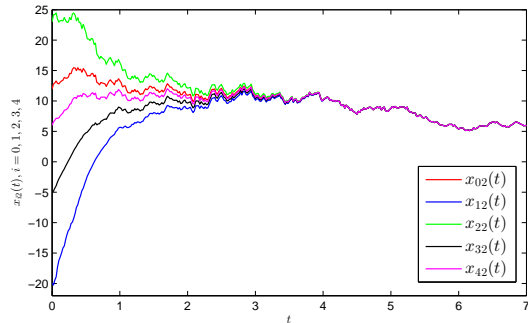


图 6 控制下的智能体  $x_{i2}(t)$  状态轨迹