

# 一类具有吸收效应和阶段结构的时滞病原体免疫模型\*

朱晶<sup>1</sup>, 文卜玉<sup>2,3</sup>

(1. 鞍山师范学院 数学与信息科学学院, 辽宁 鞍山 114005; 2. 辽东学院 信息工程学院, 辽宁 丹东 118003;  
3. 新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830046)

**摘要:** 本文研究了一类具有吸收效应和被感染细胞具有潜伏与活性两阶段的病原体免疫模型. 通过建立适当的Lyapunov泛函, 使用LaSalle不变集原理, 分别当 $\sigma \leq 1, \omega \leq \sigma < 1 < S$ 和 $1 < \omega < \sigma < L\omega$ 时, 证明了对应的未感染平衡点 $P$ , 体液免疫功能未激活的感染平衡点 $M$ 和体液免疫功能已激活的感染平衡点 $N$ 的全局渐近稳定性. 所获得结果推广了王霞和宋强(2013)的工作, 得到了一些新结果.

**关键词:** 病原体免疫模型; 吸收效应; 阶段结构; 平衡点; 全局稳定性

**DOI:** 10.13568/j.cnki.651094.651316.2020.07.05.0001

**中图分类号:** O175.26 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2021)05-0533-07

**引文格式:** 朱晶, 文卜玉. 一类具有吸收效应和阶段结构的时滞病原体免疫模型[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2021, 38(5): 533-539.

**英文引文格式:** ZHU J, WEN B Y. A delayed pathogen immune model with absorption effect and stage structure[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2021, 38(5): 533-539.

## A Delayed Pathogen Immune Model with Absorption Effect and Stage Structure

ZHU Jing<sup>1</sup>, WEN Buyu<sup>2,3</sup>

(1. Academy of Mathematics and Information, Anshan Normal University, Anshan Liaoning 114005, China;  
2. School of Information Engineering, Eastern Liaoning University, Dandong Liaoning 118003, China;  
3. School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830046, China)

**Abstract:** In this paper, a delayed pathogen-immune model with absorption, latently and actively infected cells and immune response is studied. By constructing suitable Lyapunov functionals, using the LaSalle invariance principle, the globally asymptotically stability of the infection-free equilibrium  $P$ , the humoral immunity functional-absent infection equilibrium  $M$  and humoral immunity functional-present infection equilibrium  $N$  are proved, when  $\sigma \leq 1, \omega \leq \sigma < 1 < S$  and  $1 < \omega < \sigma < L\omega$ , respectively. The result we obtained here generalized the result of Wang Xia and Song Qiang(2013), some new results are obtained.

**Key words:** pathogen-immune model; absorption; stage structure; equilibrium; global stability

## 0 引言

1997年, Bonhoeffer和Nowak根据病毒感染的动力学特征, 建立了如下非线性的病毒动力学模型:

$$\begin{cases} x' = \lambda - mx - \beta xv, \\ y' = \beta xv - dy, \\ v' = cy - bv. \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x, y, v$  分别表示  $t$  时刻宿主体内正常细胞、被感染细胞和游离病毒的数量, 各参数的生物学意义详见文献[1-2]. 依据这一建模机理, 文献[3]研究了具有吸收效应的时滞病原体免疫模型:

\* 收稿日期: 2020-07-05

基金项目: 辽东学院博士科研启动基金项目(2019BS023).

作者简介: 朱晶(1964-), 女, 硕士, 教授, 主要从事经济数学与生物数学研究, E-mail: zhujingzzz@163.com.

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda - dx(t) - \beta x(t)\nu(t), \\ y'(t) = \beta x(t-\tau)\nu(t-\tau) - ay(t), \\ \nu'(t) = ray(t) - b\nu(t) - u\beta x(t)\nu(t) - p\nu(t)z(t), \\ z'(t) = q\nu(t)z(t) - ez(t). \end{cases} \quad (2)$$

其中:  $x(t), y(t), \nu(t), z(t)$  分别表示  $t$  时刻宿主体内正常细胞、被感染细胞、游离病毒和体液免疫细胞的数量(详见文献[3]), 运用 Lyapunov 泛函方法, 获得了无病平衡点、无免疫平衡点和地方病平衡点全局渐近稳定的充分条件.

近年来, 关于病毒动力学模型研究已有了重要进展(见文献[4-13]). 已有研究表明(见文献[14-16]): 在正常细胞、被感染细胞和游离病毒相互作用过程中, 有一些被感染细胞需要较长时间产生病毒, 将被感染细胞分为潜伏和活性两个阶段是必要的. 同时, 在病毒感染过程中宿主体内的抗体(免疫应答和吸收效应)作用不可忽视, 它具有抑制和清除病毒的特殊功能(见[3, 17]). 基于以上工作, 本文考虑如下具有阶段结构和吸收效应的时滞病原体免疫模型:

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda - d_1 x(t) - \beta x(t)\nu(t), \\ y_1'(t) = p\beta x(t-\tau)\nu(t-\tau) - (d_1 + \eta)y_1(t), \\ y_2'(t) = q\beta x(t-\tau)\nu(t-\tau) + \eta y_1(t) - d_2 y_2(t), \\ \nu'(t) = rd_2 y_2(t) - d_3 \nu(t) - u\beta x(t)\nu(t) - k\nu(t)z(t), \\ z'(t) = h\nu(t)z(t) - d_4 z(t). \end{cases} \quad (3)$$

其中:  $x(t), y_1(t), y_2(t), \nu(t), z(t), d_i (i=1, 2, 3, 4)$  分别表示  $t$  时刻宿主体内正常细胞、潜伏性被感染细胞、活性被感染细胞, 游离病毒和体液免疫细胞的数量和死亡率.  $\lambda$  为单位时间产生正常细胞的速率,  $\beta x(t)\nu(t)$  为双线性感染率,  $\beta$  为正常细胞被病毒感染的速率. 假设病毒以时滞  $\tau$  侵入宿主体内, 在  $t$  时刻产生潜伏性被感染细胞的概率为  $p$ , 潜伏性被感染细胞的数量为  $p\beta x(t-\tau)\nu(t-\tau)$ ; 在  $t$  时刻产生活性被感染细胞的概率为  $q$ , 活性被感染细胞的数量为  $q\beta x(t-\tau)\nu(t-\tau)$  且  $p+q=1$ ,  $\eta$  表示潜伏性被感染细胞转化为活性被感染细胞的速率.  $r$  为活性被感染细胞死亡后释放病毒的速率,  $u\beta x(t)\nu(t)$  表示正常细胞清除游离病毒的吸收效应,  $k\nu(t)z(t)$  表示体液免疫功能反应,  $u$  和  $k$  为清除游离病毒的强度,  $h$  为游离病毒激发宿主体内产生体液免疫的速率, 并且假定  $r(d_1 q + \eta) > u(d_1 + \eta)$ .

由于  $q, \eta, r$  分别为正常细胞、潜伏性被感染细胞和感染细胞的生长速率, 所以本文总是假定  $r\eta q > k(d_1 + \eta)$ . 令  $C = C([- \tau, 0], R^5)$  是从  $[- \tau, 0]$  到  $R^5$  上的连续映射全体组成的 Banach 空间.  $\forall \phi \in C$  定义  $|\phi| = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|$  以及系统(2)的初始条件为

$$\begin{aligned} x(\theta) \geq 0, y_1(\theta) \geq 0, y_2(\theta) \geq 0, \nu(\theta) \geq 0, z(\theta) \geq 0, \theta \in [- \tau, 0], \\ x(0) > 0, y_1(0) > 0, y_2(0) > 0, \nu(0) > 0, z(0) > 0. \end{aligned} \quad (4)$$

且设  $(x(t), y_1(t), y_2(t), \nu(t), z(t))$  为系统(3)满足初始条件(4)的解.

近年来, 关于具有 CTL 免疫反应的病毒动力学模型研究现已有了大量报道(见文献[9-14]). 本文主要研究系统(3)的无病平衡点、无免疫平衡点和地方病平衡点的全局渐近稳定性, 其结论可视为 Nowak(1996) 和 Bonhoffer(1997) 所获结果的推广. 关于系统(2)的动力学性质, 目前尚未见有研究结果发表. 为方便起见, 本文采用记号:

$$S = \frac{r(d_1 q + \eta)}{u(d_1 + \eta)}, L = \frac{(d_1 h + d_4 \beta)\rho}{\beta d_4 u(d_1 + \eta)}, \rho = r(d_1 q + \eta) - u(d_1 + \eta), R_+ = (0, +\infty).$$

定义基本再生数和免疫再生数为

$$\sigma = \frac{\lambda \beta \rho}{d_1 d_3 (d_1 + \eta)}, \omega = \frac{h \lambda \beta \rho}{d_1 d_3 (d_1 + \eta) h + d_3 d_4 \beta (d_1 + \eta)} = \frac{\sigma d_1 h}{d_1 h + d_4 \beta} < \sigma.$$

本文主要研究模型(3)的未感染平衡点、体液免疫功能未激活的感染平衡点和体液免疫功能已激活的感染平衡点的全局渐近稳定性, 其模型及研究结果推广了文献[3]所做的工作.

### 1 平衡点的存在性

由模型 (3) 和基本再生数以及免疫再生数, 易得下面的定理.

**定理 1** 模型 (3) 总存在未感染平衡点  $P = (x_0, 0, 0, 0, 0)$ ; 当  $\sigma > 1$  时, 存在体液免疫功能未激活的感染平衡点  $M = (x^\Delta, y_1^\Delta, y_2^\Delta, \nu^\Delta, 0)$ ; 当  $\sigma > \omega > 1$  时, 还存在体液免疫功能已激活的感染毒平衡点  $N = (x^*, y_1^*, y_2^*, \nu^*, z^*)$ , 其中

$$x_0 = \frac{\lambda}{d_1}, x^\Delta = \frac{d_3(d_1 + \eta)}{\beta\rho}, y_1^\Delta = \frac{p\beta x^\Delta \nu^\Delta}{d_1 + \eta}, y_2^\Delta = \frac{(d_1 q + \eta)\beta x^\Delta \nu^\Delta}{d_2(d_1 + \eta)}, \nu^\Delta = \frac{d_1(\sigma - 1)}{\beta},$$

$$x^* = \frac{\lambda h}{d_1 h + d_4 \beta}, y_1^* = \frac{p\beta x^* \nu^*}{d_1 + \eta}, y_2^* = \frac{(d_1 q + \eta)\beta x^* \nu^*}{d_2(d_1 + \eta)}, \nu^* = \frac{d_4}{h}, z^* = \frac{d_3(\omega - 1)}{k}.$$

注意到  $\omega \leq 1$  等价于

$$\frac{\lambda\rho}{d_3(d_1 + \eta)} - \frac{d_1}{\beta} \leq \frac{d_4}{h}.$$

由定理 1 知, 基本再生数  $\sigma$  是病毒流行的阈值条件, 免疫再生数  $\omega$  则是体液免疫功能是否激活的开关.

### 2 平衡点的稳定性

**定理 2** 如果  $\sigma \leq 1$ , 那么模型 (3) 的未感染平衡点是全局渐近稳定的.

**证明** 将模型 (3) 改写为如下等价系统:

$$\begin{cases} x'(t) = -d_1(x(t) - x_0) - \beta x(t)\nu(t), \\ y_1'(t) = p\beta x(t - \tau)\nu(t - \tau) - (d_1 + \eta)y_1(t), \\ y_2'(t) = q\beta x(t - \tau)\nu(t - \tau) + \eta y_1(t) - d_2 y_2(t), \\ \nu'(t) = r d_2 y_2(t) - d_3 \nu(t) - u\beta x(t)\nu(t) - k\nu(t)z(t), \\ z'(t) = h\nu(t)z(t) - d_4 z(t). \end{cases} \tag{5}$$

设  $(x(t), y_1(t), y_2(t), \nu(t), z(t))$  是系统 (5) 任意正解, 由函数  $F(\xi) = \xi - 1 - \ln \xi$  在  $\xi \in R_+$  内存在唯一最小值点  $\xi = 1$  且  $F(\xi) \geq F(1) = 0$  的特性, 构造 Lyapunov 泛函:

$$V_0(t) = \rho x_0 F\left(\frac{x(t)}{x_0}\right) + r\eta y_1(t) + r(d_1 + \eta)y_2(t) + r(d_1 + \eta)\nu(t) + \frac{k(d_1 + \eta)}{h}z(t) + r(d_1 q + \eta)\beta \int_{t-\tau}^t x(\theta)\nu(\theta) d\theta$$

可见  $V_0(t)$  在点  $P$  处的唯一最小值为零. 直接沿着系统 (5) 轨线计算  $V_0(t)$  的全导数得

$$V_0'(t) = -\frac{d_1\rho}{x(t)}(x(t) - x_0)^2 + d_3(d_1 + \eta)(\sigma - 1)\nu(t) - \frac{d_4 k(d_1 + \eta)}{h}z(t),$$

由此可见, 当  $\sigma \leq 1$  时, 对任意正解  $(x(t), y_1(t), y_2(t), \nu(t), z(t))$  均有  $V_0'(t) \leq 0$ , 当且仅当  $(x(t), y_1(t), y_2(t), \nu(t), z(t)) = (x_0, 0, 0, 0, 0)$  有  $V_0'(t) = 0$ . 由 LaSalle 不变集原理 (见[18]) 知, 模型 (3) 的未感染平衡点  $P$  是全局渐近稳定的.

**定理 3** 如果  $\omega \leq 1 < \sigma < S$ , 那么模型 (3) 体液免疫功能未激活的感染平衡点  $M$  是全局渐近稳定的.

**证明** 将模型 (3) 改写为如下等价系统:

$$\begin{cases} x'(t) = -d_1(x(t) - x^\Delta) - \beta x(t)\nu(t) + \beta x^\Delta \nu^\Delta, \\ y_1'(t) = p\beta x(t - \tau)\nu(t - \tau) - p\beta x^\Delta \nu^\Delta - (d_1 + \eta)(y_1(t) - y_1^\Delta), \\ y_2'(t) = q\beta x(t - \tau)\nu(t - \tau) - q\beta x^\Delta \nu^\Delta + \eta(y_1(t) - y_1^\Delta) - d_2(y_2(t) - y_2^\Delta), \\ \nu'(t) = r d_2(y_2(t) - y_2^\Delta) - d_3(\nu(t) - \nu^\Delta) - u\beta x(t)\nu(t) + u\beta x^\Delta \nu^\Delta - k\nu(t)z(t), \\ z'(t) = h\nu(t)z(t) - d_4 z(t). \end{cases} \tag{6}$$

设  $(x(t), y_1(t), y_2(t), \nu(t), z(t))$  是系统 (6) 任意正解, 由函数  $F(\xi) = \xi - 1 - \ln \xi$  在  $\xi \in R_+$  内的非负特性, 构造 Lyapunov 泛函:

$$V_{\Delta}(t) = \frac{\rho x^{\Delta}}{r\eta} F\left(\frac{x(t)}{x^{\Delta}}\right) + y_1^{\Delta} F\left(\frac{y_1(t)}{y_1^{\Delta}}\right) + \frac{d_1 + \eta}{\eta} y_2^{\Delta} F\left(\frac{y_2(t)}{y_2^{\Delta}}\right) \\ + \frac{d_1 + \eta}{r\eta} \nu^{\Delta} F\left(\frac{\nu(t)}{\nu^{\Delta}}\right) + \frac{k(d_1 + \eta)}{rh\eta} z(t) + \frac{(d_1 q + \eta)\beta \nu^{\Delta} x^{\Delta}}{\eta} \int_{t-\tau}^t F\left(\frac{x(\theta)\nu(\theta)}{x^{\Delta}\nu^{\Delta}}\right) d\theta.$$

可知  $V_{\Delta}(t)$  在点  $M$  处的唯一最小值为零. 当  $\omega \leq 1 < \sigma < S$  时, 体液免疫功能未激活且

$$\nu^{\Delta} = \frac{\lambda\rho}{d_3(d_1 + \eta)} - \frac{d_1}{\beta} \leq \frac{d_4}{h}.$$

直接沿着系统 (6) 轨线计算  $V_{\Delta}(t)$  的全导数得

$$V'_{\Delta}(t) = -\frac{d_1 u(d_1 + \eta)}{r\eta x(t)} \left( \frac{r(d_1 q + \eta)}{u(d_1 + \eta)} - \sigma \right) (x(t) - x^{\Delta})^2 + \frac{r(d_1 q + \eta)\beta \nu^{\Delta} x^{\Delta}}{\eta} F\left(\frac{x^{\Delta}}{x(t)}\right) \\ - p\beta x^{\Delta} \nu^{\Delta} F\left(\frac{x(t-\tau)\nu(t-\tau)y_1^{\Delta}}{x^{\Delta}\nu^{\Delta}y_1(t)}\right) - \frac{(d_1 + \eta)q\beta x^{\Delta} \nu^{\Delta}}{\eta} F\left(\frac{x(t-\tau)\nu(t-\tau)y_2^{\Delta}}{x^{\Delta}\nu^{\Delta}y_2(t)}\right) \\ - (d_1 + \eta)y_1^{\Delta} F\left(\frac{y_2^{\Delta}y_2(t)}{y_1^{\Delta}y_2(t)}\right) - \frac{(d_1 + \eta)d_2 y_2^{\Delta}}{\eta} F\left(\frac{y_2(t)\nu^{\Delta}}{y_2^{\Delta}\nu(t)}\right) + \frac{k(d_1 + \eta)}{r\eta} (\nu^{\Delta} - \frac{d_4}{h}) z(t) \leq 0.$$

由此可见, 当  $\sigma \leq 1$  时, 对任意正解  $(x(t), y_1(t), y_2(t), \nu(t), z(t))$  均有  $V'_{\Delta}(t) \leq 0$ , 当且仅当  $(x(t), y_1(t), y_2(t), \nu(t), z(t)) = (x^{\Delta}, y_1^{\Delta}, y_2^{\Delta}, \nu^{\Delta}, 0)$  有  $V'_{\Delta}(t) = 0$ . 由 LaSalle 不变集原理 (见[18]) 知, 模型 (3) 体液免疫功能未激活的感染平衡点是全局渐近稳定.

**定理 4** 如果  $1 < \omega < \sigma < L\omega$ , 那么模型 (3) 体液免疫功能已激活的感染平衡点  $N$  是全局渐近稳定的.

**证明** 将模型 (3) 改写为如下等价系统:

$$\begin{cases} x'(t) = -d_1(x(t) - x^*)\beta x(t)\nu(t) + \beta x^* \nu^*, \\ y_1'(t) = p\beta x(t-\tau)\nu(t-\tau) - p\beta x^* \nu^* - (d_1 + \eta)(y_1(t) - y_1^*), \\ y_2'(t) = q\beta x(t-\tau)\nu(t-\tau) - q\beta x^* \nu^* + \eta(y_1(t) - y_1^*) - d_2(y_2(t) - y_2^*), \\ \nu'(t) = rd_2(y_2(t) - y_2^*) - d_3(\nu(t) - \nu^*) - u\beta x(t)\nu(t) + u\beta x^* \nu^* - k\nu(t)z(t) + k\nu^* z^*, \\ z'(t) = h\nu(t)z(t) - h\nu^* z^* - d_4(z(t) - z^*). \end{cases} \quad (7)$$

设  $(x(t), y_1(t), y_2(t), \nu(t), z(t))$  是系统 (7) 任意正解, 由函数  $F(\xi) = \xi - 1 - \ln \xi$  在  $\xi \in R_+$  内的非负特性, 构造 Lyapunov 泛函:

$$V_*(t) = \frac{\rho x^*}{r\eta} F\left(\frac{x(t)}{x^*}\right) + y_1^* F\left(\frac{y_1(t)}{y_1^*}\right) + \frac{d_1 + \eta}{\eta} y_2^* F\left(\frac{y_2(t)}{y_2^*}\right) + \frac{d_1 + \eta}{r\eta} \nu^* F\left(\frac{\nu(t)}{\nu^*}\right) \\ + \frac{k(d_1 + \eta)}{rh\eta} z^* F\left(\frac{z(t)}{z^*}\right) + \frac{(d_1 q + \eta)\beta \nu^* x^*}{\eta} \int_{t-\tau}^t F\left(\frac{x(\theta)\nu(\theta)}{x^*\nu^*}\right) d\theta.$$

易知  $V_*(t)$  在点  $N$  处的唯一最小值为零. 当  $1 < \omega < \sigma < L\omega$  时, 体液免疫功能已激活, 直接沿着系统 (7) 轨线计算  $V_*(t)$  的全导数得

$$V'_*(t) = -\frac{u\beta d_4(d_1 + \eta)(L\omega - \sigma)}{r\eta h\sigma x(t)} (x(t) - x^*)^2 + \frac{(d_1 q + \eta)\beta \nu^* x^*}{\eta} F\left(\frac{x^*}{x(t)}\right) - p\beta x^* \nu^* F\left(\frac{x(t-\tau)\nu(t-\tau)y_1^*}{x^*\nu^*y_1(t)}\right) \\ - \frac{(d_1 + \eta)q\beta x^* \nu^*}{\eta} F\left(\frac{x(t-\tau)\nu(t-\tau)y_2^*}{x^*\nu^*y_2(t)}\right) - (d_1 + \eta)y_1^* F\left(\frac{y_2^{\Delta}y_2(t)}{y_1^{\Delta}y_2(t)}\right) - \frac{(d_1 + \eta)d_2 y_2^*}{\eta} F\left(\frac{y_2(t)\nu^*}{y_2^*\nu(t)}\right) \leq 0.$$

显然, 当且仅当  $(x(t), y_1(t), y_2(t), \nu(t), z(t)) = (x^*, y_1^*, y_2^*, \nu^*, z^*)$  时有  $V'_*(t) = 0$ . 由 LaSalle 不变集原理 (见[18]) 知, 模型 (3) 体液免疫功能已激活的感染平衡点  $N$  是全局渐近稳定的.

### 3 数值模拟

在这一节, 将提供一些数值算例来说明模型 (3) 中正平衡点的全局渐近稳定性. 算例中模型 (3) 的初始条件满足  $(x(0), y_1(0), y_2(0), \nu(0), z(0)) = (0.8, 0.03, 0.05, 0.05, 0.05), (8, 0.04, 0.1, 0.1, 0.3), (1, 0.02, 0.3, 0.02, 0.1)$ , 参数选取为  $p = 0.4, q = 0.6, d_1 = 0.1, r = 0.5, u = 0.1, d_3 = 0.2, d_2 = 0.2, k = 0.3, h = 0.2, d_4 = 0.1$  和时滞  $\tau = 1$ .

**算例 1** 选取参数  $\eta = 0.4, \lambda = 0.5, \beta = 0.1$ , 通过计算, 得到平衡点  $P = (5, 0, 0, 0, 0)$ , 并且得到  $\rho = r(d_1q + \eta) - u(d_1 + \eta) = 0.18 > 0, S (= 4.6) > 1 > \sigma (= 0.9) > \omega (= 0.6)$ , 满足定理 2 的条件. 因此, 图 1 的数值模拟说明平衡点  $P$  全局渐近稳定.

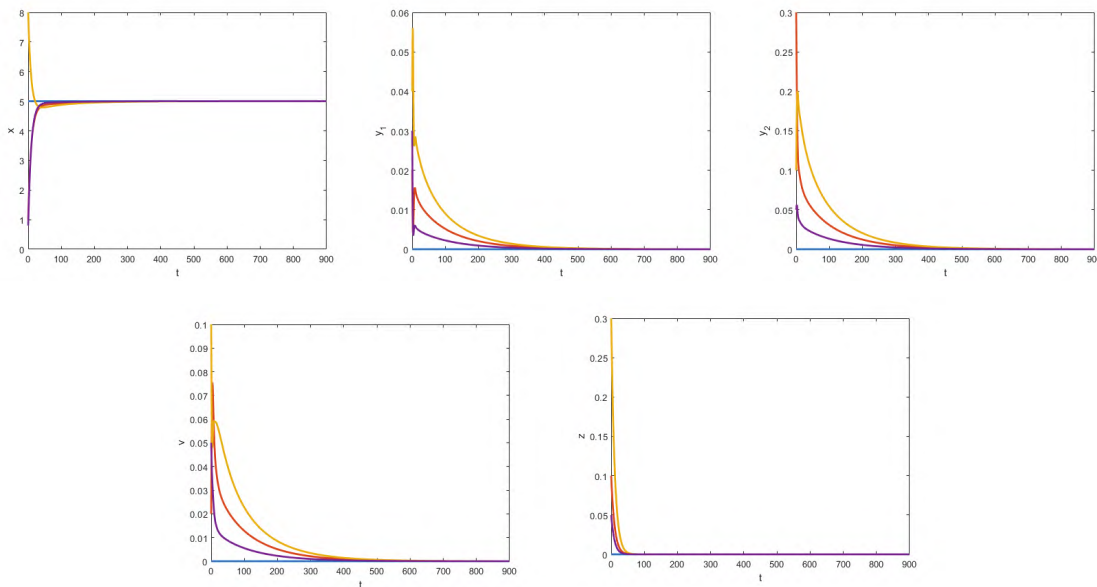


图 1 模型 (3) 的解  $(x(t), y_1(t), y_2(t), \nu(t), z(t))$  的轨线

Fig 1 The trajectories of solutions  $(x(t), y_1(t), y_2(t), \nu(t), z(t))$  of model (3)

**算例 2** 选取参数  $\eta = 0.5, \lambda = 0.6, \beta = 0.1$ , 通过计算, 得到平衡点  $M \approx (5.454\ 5, 0.036\ 4, 0.254\ 5, 0.1, 0)$ , 并且得到  $\rho = r(d_1q + \eta) - u(d_1 + \eta) = 0.22 > 0, S (\approx 4.666\ 7) > \sigma (= 1.1) > 1 > \omega (\approx 0.733\ 3)$ , 满足定理 3 的条件. 因此, 图 2 的数值模拟说明平衡点  $M$  全局渐近稳定.

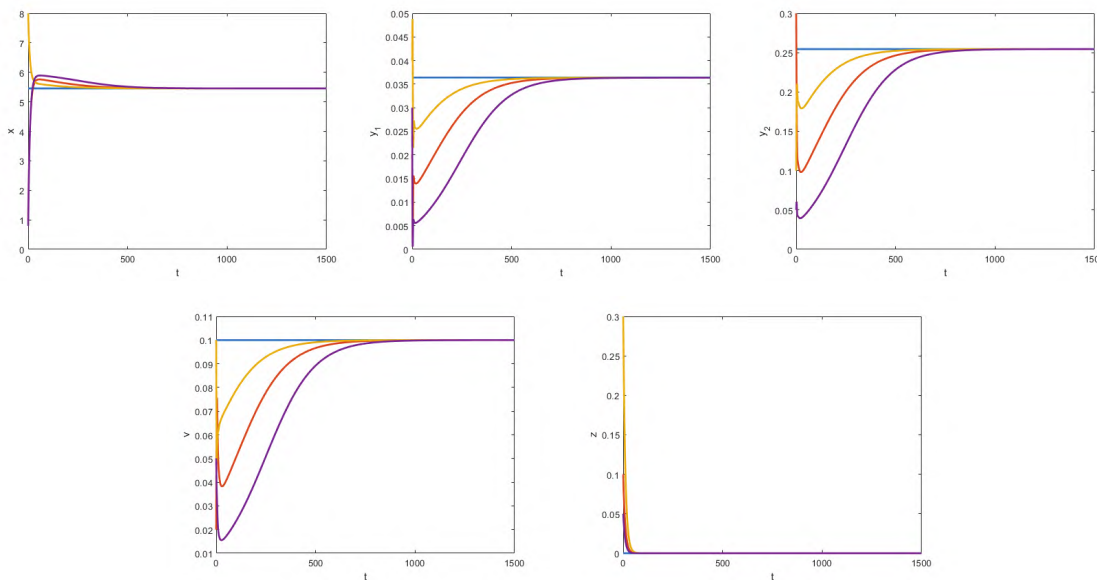


图 2 模型 (3) 具有初值  $(x(0), y_1(0), y_2(0), \nu(0), z(0))$  的解轨线

Fig 2 The trajectories of solutions with initial value  $(x(0), y_1(0), y_2(0), \nu(0), z(0))$  of model (3)

**算例 3** 选取参数  $\eta=0.5, \lambda=0.7, \beta=0.12$ , 通过计算, 得到平衡点  $N \approx (6.6038, 0.0264, 0.1849, 0.05, 0.3019)$  并且得到  $\rho=r(d_1q+\eta)-u(d_1+\eta)=0.22>0, L\omega(\approx 92.5711)>\sigma(=1.54)>\omega(\approx 1.4528)>1$ , 满足定理 4 的条件. 因此, 图 3 的数值模拟说明平衡点  $N$  全局渐近稳定.

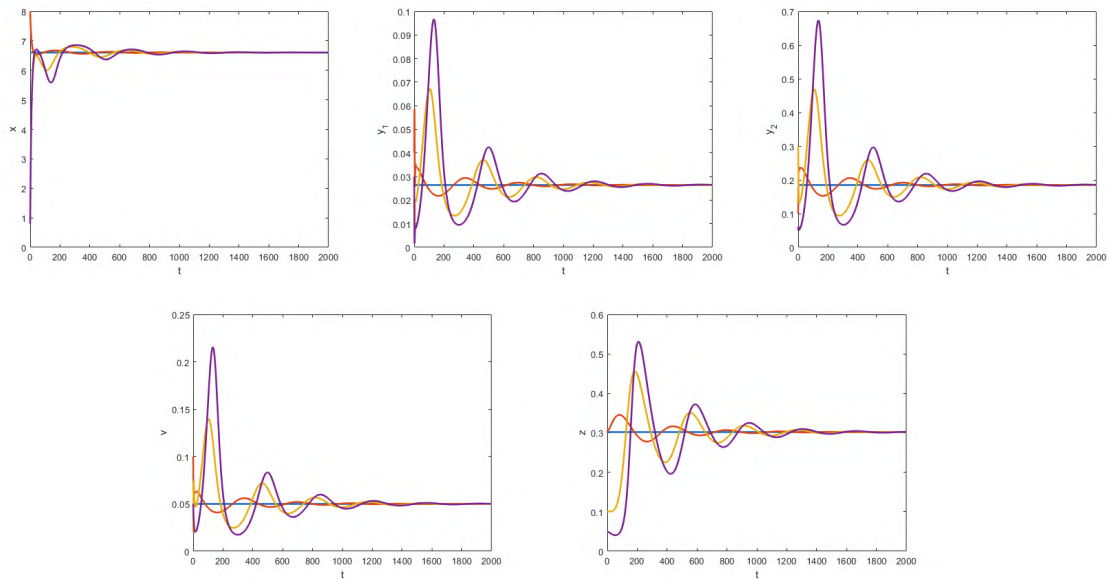


图 3 模型 (3) 的解轨线

Fig 3 The trajectories of solutions of model (3)

## 4 结论

综上所述, 当  $\sigma \leq 1$  时, 由定理 2 知病毒最终将被清除; 当  $\omega \leq \sigma < 1 < S$  时, 存在于宿主体内的病毒尚不足以激活体液免疫功能, 由定理 3 知体液免疫功能未激活的感染平衡点随着时间的变化, 最终将稳定在一组定值上; 当  $1 < \omega < \sigma < L\omega$  时, 存在于宿主体内的病毒已激活了体液免疫功能, 由定理 4 知体液免疫功能已激活的感染平衡点随着时间的变化, 也将最终稳定在一组定值上. 总之, 基本再生数  $\sigma$  是病毒流行与否的控制参数, 免疫再生数  $\omega$  是体液免疫功能是否激活的开关, 它们是预防和控制病毒传播流行的两个关键参数.

## 参考文献:

- [1] BONHOEGGER S, MAY RM, SHAW GM, et al. Virus dynamics and drug therapy[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1997, 94(13): 6971-6976.
- [2] NOWAK MA, MAY RM. Virus dynamics: Mathematical principles of immunology and virology[M]. New York: Oxford University Press, 2000.
- [3] WANG X, SONG Q. A delayed pathogen-immune model with absorption[J]. Journal of Xinyang Normal University(Natural Science Edition), 2013, 26(1): 12-16.
- [4] 庞海燕, 王稳地, 王开发. 考虑 CTL 免疫反应的病毒动力学模型的全局稳定性分析[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2005, 30(5): 796-799.  
PANG H Y, WANG W D, WANG K F. Global properties of virus dynamics with CTL immune response[J]. Journal of Southwest China Normal University(Natural Science), 2005, 30(5): 796-799. (in Chinese)
- [5] 艾合麦提·麦麦提阿吉. 具有授粉互惠关系的非自治周期植物传粉系统的持久性[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2020, 37(2): 127-133.  
MUHAMMADHAI A. Permanence of a non-autonomous periodic plant-pollinator system with pollination mutualism[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2020, 37(2): 127-133. (in Chinese)
- [6] 艾合麦提·麦麦提阿吉. 时滞非线性扩散合作系统的正周期解存在性与分段吸引性[J]. 新疆大学学报(自然科学版), 2019, 36(1): 1-10.

- MUHAMMADHAJI A. On the existence and global attractivity of positive periodic solution for a cooperative system with nonlinear diffusion and delays[J]. *Journal of Xinjiang University(Natural Science)*, 2019, 36(1): 1-10.(in Chinese)
- [7] 曼合布拜·热合木, 李晓娜. 释放毒素的浮游植物与浮游动物相互作用时滞模型分析[J]. *新疆大学学报(自然科学版)*, 2019, 36(3): 303-311.
- MEHBUBA R, LI X N. Analysis of a toxic producing phytoplankton-zooplankton interaction with delay[J]. *Journal of Xinjiang University(Natural Science)*, 2019, 36(3): 303-311.(in Chinese)
- [8] 杨茂, 王开发. 一类具非线性感染率病毒动力学模型分析[J]. *四川师范大学学报(自然科学版)*, 2009, 32(3): 304-306.
- YANG M, WANG K F. Study on a viral infection model with nonlinear infection rate[J]. *Journal of Sichuan Normal University(Natural Science)*, 2009, 32(3): 304-306. (in Chinese)
- [9] 侯博阳, 马万彪. 一类具有 Beddington-DaAngelis 型功能性反应函数的 HIV 病毒动力学模型的稳定性[J]. *数学的实践与认识*, 2009, 39(12): 71-78.
- HOU B Y, MA W B. Stability analysis of an HIV infection model with Beddington-DeAngelis functional response[J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2009, 39(12): 71-78. (in Chinese)
- [10] 毕勇, 肖湘萍. 一类考虑抗体免疫反应具有标准传染率的病毒动力学模型[J]. *陕西科技大学学报*, 2011, 29(2): 161-164.
- BI Y, XIAO X P. Discuss of virus which have normal infections dynamics model with immune response[J]. *Journal of Shanxi University of Science & Technology*, 2011, 29(2): 161-164.(in Chinese)
- [11] 郑重武, 张凤琴. 一类具有免疫时滞的病毒动力学模型的稳定性分析[J]. *纯粹数学与应用数学*, 2011, 27(1): 37-44.
- ZHENG C W, ZHANG F Q. Stability analysis of a viral dynamic model with immune time delay[J]. *Pure and Applied Mathematics*, 2011, 27(1): 37-44. (in Chinese)
- [12] 田晓红, 徐瑞. 一类具有时滞和免疫反应的病毒感染模型的稳定性和 Hopf 分支[J]. *北华大学学报(自然科学版)*, 2011, 12(4): 373-378.
- TIAN X H, XU R. Stability and Hopf bifurcation of a virus infection model with time delay and immune response[J]. *Journal of Beihua University(Natural Science Edition)*, 2011, 12(4): 373-378. (in Chinese)
- [13] 李祺, 窦雯虹, 石金喜. 一类具有时滞的 CTL 免疫反应的病毒动力学模型的稳定性分析[J]. *纺织高校基础科学学报*, 2013, 26(1): 32-35.
- LI Q, DOU J H, SHI J X. Stability analysis of basic virus dynamics model with time delays[J]. *Basic Sciences Journal of Textile University*, 2013, 26(1): 32-35. (in Chinese)
- [14] MCLEAN AR, EMERY VC, WEBSTER A, et al. Population dynamics of HIV within an individual after treatment with zidovudine[J]. *AIDS*, 1991, 5(3): 485-459.
- [15] WANG X, TAO Y, SONG X. Global stability of the mathematical model for HBV treatment[J]. *Journal of Biomathematics*, 2009, 24(1): 1-8.
- [16] 查淑玲. 具有阶段结构病毒动力学模型的稳定性分析[J]. *渭南师范学院学报*, 2012, 27(10): 5-10.
- ZHA S L. Stability analysis for a viral dynamic model with stage structure[J]. *Journal of Weinan Normal University*, 2012, 27(10): 5-10. (in Chinese)
- [17] WANG X, XIE Y, SONG X. A delayed virus dynamics model with Cell-mediated immunity and absorption[J]. *Mathematica Applicata*, 2012, 25(2): 375-381.
- [18] 马知恩, 周义仓. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- MA Z E, ZHOU Y C. *Mathematics modeling and research of infectious disease dynamics*[M]. Beijing: Science Publishing Company, 2004. (in Chinese)

责任编辑: 赵新科