具有饱和发生率的两毒株时滞 HIV 感染模型的阈值动力学*

陈 伟, 张 龙†
(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

摘 要: 建立了一类包含药物敏感型和耐药型毒株的 HIV 感染模型, 并且研究了具有饱和发生率和分布潜伏时滞感染模型的动力学行为. 得到了模型解的非负性和有界性, 以及平衡点的存在性. 通过使用线性化方法, 构造 Lyapunov 函数和运用动力系统持续性理论, 建立平衡点的局部和全局稳定性, 以及模型一致持续性的阈值准则. 进一步, 数值模拟表明正平衡点全局渐近稳定.

关键词: HIV 感染模型; 敏感型和耐药型毒株; 分布潜伏时滞; 局部和全局稳定; 一致持续性
DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316. 2021.09.28.0005
中图分类号: O175.13 **文献标识码**: A **文章编号**: 2096-7675(2022)04-0401-011
引文格式: 陈伟, 张龙. 具有饱和发生率的两毒株时滞 HIV 感染模型的阈值动力学[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2022, 39(4): 401-411+420.
英文引文格式: CHEN Wei, ZHANG Long. Threshold dynamics in two-strain delayed HIV infection model with saturated incidence[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2022, 39(4): 401-411+420.

Threshold Dynamics in Two-Strain Delayed HIV Infection Model with Saturated Incidence

CHEN Wei, ZHANG Long

(*School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China*)

Abstract: This paper establishes an HIV infection model, which includes wild-type and drug-resistant strains, and the dynamic behavior of infection model with saturated incidence and distributed delays is investigated. The nonnegativity and boundedness of solutions, and the existence of equilibria are obtained. The threshold criteria for the local and global asymptotic stability of equilibria and the uniform persistence of the model are established by using the linearization method, constructing Lyapunov functions and applying the theory of persistence in dynamical systems. Moreover, the numerical examples illustrate that the positive equilibrium may be globally asymptotically stable.

Key words: HIV infection model; wild-type and drug-resistant drugs; distributed delays; local and global stability; uniform persistence

0 引 言

HIV, 人类免疫缺陷病毒, 一直是人类社会生命健康的主要威胁之一. 因此, 生物数学学者越来越重视对病毒动力学的研究[1−2], 并且多种 HIV 感染模型对理解病毒感染机理方面发挥着重要作用[3−5]. 在 1996 年, Perelson 等构造了一种模型, 其已被广泛应用于模拟 HIV 感染患者的血浆病毒载量[6]. 但是在实际治疗 HIV 感染患者的过程中, Ribeiro 和 Bonhoeffer 发现在 HAART (高效抗逆转录病毒疗法)中出现了一种不良现象, 即在开始治疗之前, HIV 毒株的单一突变(或多突变组合)也可能导致耐药性[7]. 为了更深入研究耐药型毒株的演变, Rong 等提出了一类包含敏感型毒株和耐药型毒株的病毒动力学模型[8]:

∗ **收稿日期**: 2021-09-28
基金项目: 国家自然科学基金(11861065); 新疆维吾尔自治区自然科学基金(2019D01C076); 新疆维吾尔自治区高校科研重点项目(XJEDU2021I002); 新疆维吾尔自治区应用数学重点实验室开放课题(2021D04014).
作者简介: 陈伟(1995-), 男, 博士生, 从事传染病动力学行为的研究.
† **通讯作者**: 张龙(1977-), 男, 博士, 教授, 主要从事微分方程和生物数学的研究, E-mail: longzhang_xj@sohu.com.

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda-dT-k_sV_sT-k_rV_rT\\
\dfrac{\mathrm{d}T_s(t)}{\mathrm{d}t}=(1-u)k_sV_sT-\delta T_s\\
\dfrac{\mathrm{d}V_s(t)}{\mathrm{d}t}=N_s\delta T_s-cV_s\\
\dfrac{\mathrm{d}T_r(t)}{\mathrm{d}t}=uk_sV_sT+k_rV_rT-\delta T_r\\
\dfrac{\mathrm{d}V_r(t)}{\mathrm{d}t}=N_r\delta T_r-cV_r
\end{cases}
\tag{1}
$$

其中: $T(t), T_s(t), V_s(t), T_r(t)$ 和 $V_r(t)$ 分别是易感细胞, 敏感型感染细胞, 敏感型毒株, 耐药型感染细胞, 耐药型毒株在时刻 t 的浓度. λ 和 d 分别为易感细胞的补充率和死亡率, k_s 和 k_r 分别为敏感型感染细胞和耐药型感染细胞的感染率, N_s 和 N_r 分别是敏感型毒株和耐药型毒株的释放率, δ 和 c 分别为感染细胞的死亡率和游离病毒的清除率. 参数 $u\,(0\le u<1)$ 是 T_s 到 T_r 的转化率, 也就是在逆转录过程中, 敏感型毒株发生突变, 变成耐药型毒株, 使得感染细胞转化的比例(简称 SR 转换). 目前, 已有学者研究了一些关于模型 (1) 全局动力学包括平衡点全局稳定性和模型一致持续性的有趣结论[9].

在易感细胞和游离病毒间的非线性发生率函数有多种具体形式, 例如, 双线性发生率, 饱和发生率, $B-D$ 发生率等, 值得注意的是, $B-D$ 发生率函数可以更客观地描述易感细胞和游离病毒的动态演化过程[10]. $B-D$ 发生率函数可表示为 $\frac{kTV}{1+aT+bV}$, $(a,b>0)$, 特别的, 当 $a=0$, $b>0$ 时, 该发生率函数可退化为饱和发生率函数. 因此 Chen 等扩展了上述模型, 并且建立了全局动力学的阈值准则[11]. 时滞在许多病毒感染模型中得到了广泛的应用, 对研究实际生物过程起决定性作用[12−14], 很容易注意到, 相比于离散时滞, 分布潜伏时滞更适用于实际情况. 受此启发, 建立了一类具有饱和发生率和分布潜伏时滞的敏感型和耐药型毒株 HIV 感染模型:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}=\lambda-dT(t)-\dfrac{k_sV_s(t)T(t)}{1+\omega_1V_s(t)}-\dfrac{k_rV_r(t)T(t)}{1+\alpha_1V_r(t)}\\
\dfrac{\mathrm{d}T_s(t)}{\mathrm{d}t}=(1-u)\displaystyle\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)\frac{V_s(t-\eta)T(t-\eta)}{1+\omega_1V_s(t-\eta)}\mathrm{d}\eta-\delta T_s(t)\\
\dfrac{\mathrm{d}V_s(t)}{\mathrm{d}t}=N_s\delta T_s(t)-cV_s(t)\\
\dfrac{\mathrm{d}T_r(t)}{\mathrm{d}t}=u\displaystyle\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)\frac{V_s(t-\eta)T(t-\eta)}{1+\omega_1V_s(t-\eta)}\mathrm{d}\eta+\int_0^{\tau_r}h_r(\eta)\frac{V_r(t-\eta)T(t-\eta)}{1+\alpha_1V_r(t-\eta)}\mathrm{d}\eta-\delta T_r(t)\\
\dfrac{\mathrm{d}V_r(t)}{\mathrm{d}t}=N_r\delta T_r(t)-cV_r(t)
\end{cases}
\tag{2}
$$

在本文中, ω_1, α_1, τ_s, τ_r 都是非负常数, 且均为有限值. 当 $\omega_1=0$ 或 $\alpha_1=0$ 时, 对 V_s 或 V_r 相应的发生率退化成双线性发生率. 这里假设 $\omega_1+\alpha_1>0$, 以及 $h_i(\eta)\ (i=s,r)$ 在 $[0,\tau_i]$ 上是非负连续函数, 并且同样定义 $\int_0^{\tau_i}h_i(\eta)\mathrm{d}\eta=k_i\ (i=s,r)$.

本文首先根据泛函微分方程理论方法建立了模型解的正性和有界性, 得到了平衡点的存在性, 进一步利用下代矩阵算法定义了基本再生数. 其次对具有 SR 转换的模型 (2), 分别通过线性化方法和构造 Lyapunov 泛函方法, 建立并证明了无病平衡点及耐药型感染平衡点局部和全局稳定性的阈值准则. 然后运用动力系统持续性理论, 研究了模型 (2) 所有正解的一致持续性. 最后, 在数值模拟中, 三维相图验证了满足地方病平衡点存在的条件, 其也是全局渐近稳定.

1 预备知识

定义 $\tau=\max\{\tau_s,\tau_r\}$ 以及 $R_+^5=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5):x_i\ge 0, i=1,2,3,4,5\}$. 令 $C=C([-\tau,0],R^5)$ 表示从 $[-\tau,0]$ 到 R^5 的全体连续函数所构成的 Banach 空间, 并且对任意 $\varphi\in C$, 有 $\|\varphi\|=\max_{-\tau\le\theta\le 0}|\varphi(\theta)|$. 在这里, $\varphi(\theta)=(\varphi_1(\theta),\varphi_2(\theta),\varphi_3(\theta),\varphi_4(\theta),\varphi_5(\theta))$ 并且 $|\varphi(\theta)|=\sum_{i=1}^5|\varphi_i(\theta)|$. 定义 $C_+=C([-\tau,0],R_+^5)$ 是 C 的正锥. 则模型

(2) 的初始条件可表示为

$$(T(\theta),T_s(\theta),V_s(\theta),T_r(\theta),V_r(\theta))=(\varphi_1(\theta),\varphi_2(\theta),\varphi_3(\theta),\varphi_4(\theta),\varphi_5(\theta)) \tag{3}$$

这里 $\theta\in[-\tau,0]$ 以及 $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5)\in C_+$.

首先, 关于模型 (2) 解的非负性和有界性, 有如下结论.

定理 1　任意初始函数 $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5)\in C_+$, 模型 (2) 具有初始条件 (3) 的解 $(T(t),T_s(t),V_s(t),T_r(t),V_r(t))$ 在 $t\in[0,\infty)$ 上有定义, 非负且最终有界.

证明　根据泛函微分方程基本理论[15], 容易得知模型 (2) 有唯一的解 $(T(t),T_s(t),V_s(t),T_r(t),V_r(t))$ 满足初始条件 (3), 并且在 $t\in[0,t_0)$ 上有定义, 其中 $t_0<\infty$ 或 $t_0=\infty$. 为了得到解 $(T(t),T_s(t),V_s(t),T_r(t),V_r(t))$ 的非负性, 根据解对初始函数的连续依赖性, 仅需要证明当 $\varphi_i(0)>0$ $(i=1,2,3,4,5)$ 时, 对所有 $t\in[0,t_0)$ 有 $(T(t),T_s(t),V_s(t),T_r(t),V_r(t))>0$. 由模型 (2) 的第一个方程有:

$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}>-(d+\frac{k_sV_s(t)}{1+\omega_1V_s(t)}+\frac{k_rV_r(t)}{1+\alpha_1V_r(t)})T(t),$$

因此, 对所有 $t\in[0,t_0)$, 当 $\varphi_1(0)>0$ 时, 直接有 $T(t)>0$.

定义 $m(t)=\min\{T_s(t),V_s(t),T_r(t),V_r(t)\}$, 则 $m(t)$ 是连续函数, 从 $\varphi_i(0)>0$, $(i=2,3,4,5)$ 可知 $m(0)>0$. 接下来仅需证明对所有 $t\in[0,t_0)$ 有 $m(t)>0$. 假设存在 $t^*\in[0,t_0)$, 使得 $m(t^*)=0$, 且对所有 $t\in[0,t^*)$, 有 $m(t)>0$, 则有以下情形:

$$(1)\ m(t^*)=T_s(t^*);\ (2)\ m(t^*)=V_s(t^*);\ (3)\ m(t^*)=T_r(t^*);\ (4)\ m(t^*)=V_r(t^*),$$

对于情形 (1), 由于当 $t\in[0,t^*)$ 时, 有 $m(t)>0$, 则由模型 (2) 的第二个方程可知 $\frac{\mathrm{d}T_s(t)}{\mathrm{d}t}>-\delta T_s(t)$. 因此, 对任意 $t\in[0,t^*)$ 有 $T_s(t)>T_s(0)e^{-\delta t}$. 当 $t\to t^*$ 时, 可得 $0=T_s(t^*)\geq T_s(0)e^{-\delta t^*}>0$, 矛盾. 类似于上述论证, 可得情形 (2), (3) 和 (4) 矛盾, 因此, 对任意 $t\in[0,t_0)$, 解 $(T(t),T_s(t),V_s(t),T_r(t),V_r(t))$ 是非负的.

接下来, 证明解 $(T(t),T_s(t),V_s(t),T_r(t),V_r(t))$ 的有界性, 由模型 (2) 的第一个方程有 $\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}\leq\lambda-dT(t)$. 通过比较原理和常数变易法, 可知

$$T(t)\leq T(0)e^{-dt}+\frac{\lambda}{d}(1-e^{-dt}),\ t\in[0,t_0) \tag{4}$$

因此, 对 $t\in[0,t_0)$ 可知 $T(t)$ 是有界的.

定义如下形式函数:

$$W(t)=k_r(\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)T(t-\eta)\mathrm{d}\eta+k_sT_s(t))+k_s(\int_0^{\tau_r}h_r(\eta)T(t-\eta)\mathrm{d}\eta+k_rT_r(t)).$$

则有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}=&k_r(\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)(\lambda-dT(t-\eta)-\frac{k_sV_s(t-\eta)T(t-\eta)}{1+\omega_1V_s(t-\eta)}-\frac{k_rV_r(t-\eta)T(t-\eta)}{1+\alpha_1V_r(t-\eta)})\mathrm{d}\eta\\&+k_s(1-u)\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)\frac{V_s(t-\eta)T(t-\eta)}{1+\omega_1V_s(t-\eta)}\mathrm{d}\eta-k_s\delta T_s(t))+k_s(\int_0^{\tau_r}h_r(\eta)(\lambda-dT(t-\eta)\\&-\frac{k_sV_s(t-\eta)T(t-\eta)}{1+\omega_1V_s(t-\eta)}-\frac{k_rV_r(t-\eta)T(t-\eta)}{1+\alpha_1V_r(t-\eta)})\mathrm{d}\eta+k_ru\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)\frac{V_s(t-\eta)T(t-\eta)}{1+\omega_1V_s(t-\eta)}\mathrm{d}\eta\\&+k_r\int_0^{\tau_r}h_r(\eta)\frac{V_r(t-\eta)T(t-\eta)}{1+\alpha_1V_r(t-\eta)}\mathrm{d}\eta-k_r\delta T_r(t))\\\leq&2\lambda k_sk_r-dk_r\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)T(t-\eta)\mathrm{d}\eta-k_rk_s\delta T_s(t)-dk_s\int_0^{\tau_r}h_r(\eta)T(t-\eta)\mathrm{d}\eta-k_sk_r\delta T_r(t)\\\leq&2\lambda k_sk_r-nW(t).\end{aligned}$$

其中: $n=\min\{d,\delta\}$. 根据比较原理和常数变易法, 有

$$W(t)\leq W(0)e^{-nt}+\frac{2\lambda k_sk_r}{n}(1-e^{-nt}),\ t\in[0,t_0) \tag{5}$$

这表明, 对 $t\in[0,t_0)$, $W(t)$ 是有界的, 具体地说, $T_s(t)$ 和 $T_r(t)$ 同样也是有界的.

进一步, 利用比较原理从模型 (2) 的第三个和第五个方程可知对 $t\in[0,t_0)$, $V_s(t)$ 和 $V_r(t)$ 是有界的. 综上所述, 对任意 $t\in[0,t_0)$, 解 $(T(t),T_s(t),V_s(t),T_r(t),V_r(t))$ 是有界的. 根据解的延拓性, 可进一步得知解对任意 $t\in[0,\infty)$ 都有定义, 也就是 $t_0=\infty$. 由 (4) 可知 $\limsup_{t\to\infty}T(t)\le\frac{\lambda}{d}$. 由 (5) 进一步有 $\limsup_{t\to\infty}W(t)\le\frac{2\lambda k_sk_r}{n}$, 因此可知 $\limsup_{t\to\infty}T_i(t)\le\frac{2\lambda}{n}$, $i=s,r$. 由模型 (2) 的第三个和第五个方程同样可以得到 $\limsup_{t\to\infty}V_i(t)\le\frac{2N_i\delta\lambda}{nc}$, $i=s,r$. 这表明解 $(T(t),T_s(t),V_s(t),T_r(t),V_r(t))$ 最终有界.

根据最近的研究[11], 定义如下敏感型毒株感染再生数和耐药型毒株感染再生数

$$R_s=\frac{k_sN_s\lambda}{dc},\quad R_r=\frac{k_rN_r\lambda}{dc}.$$

关于模型 (2) 平衡点的存在性, 可以得到如下结论.

定理 2 (i) 模型 (2) 总有无病平衡点 $E_0=(T_0,0,0,0,0)$, 且 $T_0=\frac{\lambda}{d}$;

(ii) 如果 $R_r>\max\{1,(1-u)R_s+((1-u)R_s-1)\alpha_1\frac{\lambda}{c}N_r\}$, 则模型 (2) 仅有平衡点 E_0 和 $E_r=(T_1,0,0,T_{r1},V_{r1})$, 其中

$$T_1=\frac{\lambda(k_r+d\alpha_1R_r)}{dR_r(k_r+d\alpha_1)},T_{r1}=\frac{dc(R_r-1)}{N_r\delta(k_r+d\alpha_1)},V_{r1}=\frac{d(R_r-1)}{k_r+d\alpha_1};$$

(iii) 如果 $(1-u)R_s>1\ge R_r$, 则模型 (2) 仅有 E_0, $E_c=(T_c,T_{sc},V_{sc},T_{rc},V_{rc})$, 其中 (T_{sc},T_{rc}) 是如下方程组的唯一正解

$$\begin{cases}T_{rc}=\dfrac{\lambda}{\delta}-T_{sc}-\dfrac{\lambda(1+\omega_1\frac{\delta}{c}N_sT_{sc})}{\delta(1-u)R_s},\\ T_{sc}=\dfrac{\frac{\lambda}{\delta}((1-u)R_s-1)+(((1-u)R_s-1)\alpha_1\frac{\lambda}{c}N_r-R_r)T_{rc}}{R_s+\omega_1\frac{\lambda}{c}N_s+((R_s+\omega_1\frac{\lambda}{c}N_s)\alpha_1\frac{\delta}{c}N_r+\omega_1\frac{\delta}{c}N_sR_r)T_{rc}},\end{cases}$$

$V_{sc}=\frac{\delta}{c}N_sT_{sc}$, $V_{rc}=\frac{\delta}{c}N_rT_{rc}$ 且 $T_c=\frac{\lambda}{d+\frac{k_sV_{sc}}{1+\omega_1V_{sc}}+\frac{k_rV_{rc}}{1+\omega_1V_{rc}}}$;

(iv) 如果 $(1-u)R_s+((1-u)R_s-1)\alpha_1\frac{\lambda}{c}N_r>R_r>1$, 则模型 (2) 存在三个平衡点 E_0, E_r 和 E_c.

2 模型（2）的稳定性

运用线性化方法和构造适当的李雅普诺夫泛函方法, 考虑平衡点的局部和全局稳定性, 定义函数 $g(x)=x-1-\ln x$. 令 $E_1=(T^*,T_s^*,V_s^*,T_r^*,V_r^*)$ 是 (2) 的任意平衡点, 则可得如下线性系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}T_1(t)}{\mathrm{d}t}=-(d+\dfrac{k_sV_s^*}{1+\omega_1V_s^*}+\dfrac{k_rV_r^*}{1+\alpha_1V_r^*})T_1(t)-\dfrac{k_sT^*}{(1+\omega_1V_s^*)^2}V_{s1}(t)-\dfrac{k_rT^*}{(1+\alpha_1V_r^*)^2}V_{r1}(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}T_{s1}(t)}{\mathrm{d}t}=(1-u)\dfrac{V_s^*}{1+\omega_1V_s^*}\displaystyle\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)T_1(t-\eta)\mathrm{d}\eta-\delta T_{s1}(t)+(1-u)\dfrac{T^*}{(1+\omega_1V_s^*)^2}\displaystyle\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)V_{s1}(t-\eta)\mathrm{d}\eta\\ \dfrac{\mathrm{d}V_{s1}(t)}{\mathrm{d}t}=N_s\delta T_{s1}(t)-cV_{s1}(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}T_{r1}(t)}{\mathrm{d}t}=u\dfrac{V_s^*}{1+\omega_1V_s^*}\displaystyle\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)T_1(t-\eta)\mathrm{d}\eta+\dfrac{V_r^*}{1+\alpha_1V_r^*}\displaystyle\int_0^{\tau_r}h_r(\eta)T_1(t-\eta)\mathrm{d}\eta\\ \qquad+u\dfrac{T^*}{(1+\omega_1V_s^*)^2}\displaystyle\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)V_{s1}(t-\eta)\mathrm{d}\eta+\dfrac{T^*}{(1+\alpha_1V_r^*)^2}\displaystyle\int_0^{\tau_r}h_r(\eta)V_{r1}(t-\eta)\mathrm{d}\eta-\delta T_{r1}(t)\\ \dfrac{\mathrm{d}V_{r1}(t)}{\mathrm{d}t}=N_r\delta T_{r1}(t)-cV_{r1}(t)\end{cases}\tag{6}$$

令 $X(t)=(T_1(t),T_{s1}(t),V_{s1}(t),T_{r1}(t),V_{r1}(t))^T$, 则模型 (6) 可被写为

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}=AX(t)+B\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)X(t-\eta)\mathrm{d}\eta+C\int_0^{\tau_r}h_r(\eta)X(t-\eta)\mathrm{d}\eta.$$

其中: $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$, $i,j=1,2,3,4,5$. $a_{11}=-d-\frac{k_sV_s^*}{1+\omega_1V_s^*}-\frac{k_rV_r^*}{1+\alpha_1V_r^*}$, $a_{13}=-\frac{k_sT^*}{(1+\omega_1V_s^*)^2}$, $a_{15}=-\frac{k_rT^*}{(1+\alpha_1V_r^*)^2}$, $a_{22}=a_{44}=-\delta$, $a_{33}=a_{55}=-c$, $a_{32}=N_s\delta$, $a_{54}=N_r\delta$, $b_{21}=\frac{(1-u)V_s^*}{1+\omega_1V_s^*}$, $b_{23}=\frac{(1-u)T^*}{(1+\omega_1V_s^*)^2}$, $b_{41}=\frac{uV_s^*}{1+\omega_1V_s^*}$, $b_{43}=\frac{uT^*}{(1+\omega_1V_s^*)^2}$, $c_{41}=\frac{V_r^*}{1+\alpha_1V_r^*}$, $c_{45}=\frac{T^*}{(1+\alpha_1V_r^*)^2}$. 其余位置元素均为零.

进一步, 设 $X(t)=ce^{\lambda_0 t}$, 其中 c 是特征值 λ_0 对应的特征向量. 则

$$c(\lambda_0 E-A-B\int_0^{\tau_s} h_s(\eta)e^{-\lambda_0\eta}\mathrm{d}\eta-C\int_0^{\tau_r} h_r(\eta)e^{-\lambda_0\eta}\mathrm{d}\eta)=0.$$

从而在任意平衡点 E_1 处的特征方程为

$$\begin{aligned}f(\lambda_0)=&det(\lambda_0 E-A-B\int_0^{\tau_s} h_s(\eta)e^{-\lambda_0\eta}\mathrm{d}\eta-C\int_0^{\tau_r} h_r(\eta)e^{-\lambda_0\eta}\mathrm{d}\eta)\\=&(\lambda_0+d)((\lambda_0+\delta)(\lambda_0+c)-\frac{(1-u)T^*N_s\delta}{(1+\omega_1V_s^*)^2}\int_0^{\tau_s} h_s(\eta)e^{-\lambda_0\eta}\mathrm{d}\eta)((\lambda_0+\delta)(\lambda_0+c)\\&-\frac{T^*N_r\delta}{(1+\alpha_1V_r^*)^2}\int_0^{\tau_r} h_r(\eta)e^{-\lambda_0\eta}\mathrm{d}\eta)+(\lambda_0+\delta)(\lambda_0+c)(\frac{k_sV_s^*}{1+\omega_1V_s^*}((\lambda_0+\delta)(\lambda_0+c)\\&-\frac{T^*N_r\delta}{(1+\alpha_1V_r^*)^2}\int_0^{\tau_r} h_r(\eta)e^{-\lambda_0\eta}\mathrm{d}\eta)+\frac{k_rV_r^*}{1+\alpha_1V_r^*}((\lambda_0+\delta)(\lambda_0+c)\\&-\frac{(1-u)T^*N_s\delta}{(1+\omega_1V_s^*)^2}\int_0^{\tau_s} h_s(\eta)e^{-\lambda_0\eta}\mathrm{d}\eta)+\frac{uV_s^*}{1+\omega_1V_s^*}\frac{k_rN_r\delta T^*}{(1+\alpha_1V_r^*)^2}\int_0^{\tau_s} h_s(\eta)e^{-\lambda_0\eta}\mathrm{d}\eta)=0\end{aligned}\tag{7}$$

首先, 关于无病平衡点 E_0 的稳定性, 有如下定理.

定理 3　(i) 如果 $(1-u)R_s<1$ 且 $R_r<1$, 则无病平衡点 E_0 局部渐近稳定;

(ii) 如果 $R_s\le 1$ 且 $R_r\le 1$, 则 E_0 全局渐近稳定;

(iii) 如果 $(1-u)R_s>1$ 或 $R_r>1$, 则 E_0 不稳定.

证明　由 (7) 可知在平衡点 E_0 处的特征方程为

$$\begin{aligned}f(\lambda_0)=&(\lambda_0+d)((\lambda_0+\delta)(\lambda_0+c)-N_r\delta T_0\int_0^{\tau_r} h_r(\eta)e^{-\lambda_0\eta}\mathrm{d}\eta)((\lambda_0+\delta)(\lambda_0+c)\\&-(1-u)N_s\delta T_0\int_0^{\tau_s} h_s(\eta)e^{-\lambda_0\eta}\mathrm{d}\eta)=0\end{aligned}\tag{8}$$

显然 (8) 式的一个根为 $\lambda_0=-d<0$. 剩余的根满足下列方程

$$\begin{aligned}f_1(\lambda_0)&=(\lambda_0+\delta)(\lambda_0+c)-(1-u)N_s\delta T_0\int_0^{\tau_s} h_s(\eta)e^{-\lambda_0\eta}\mathrm{d}\eta=0\\f_2(\lambda_0)&=(\lambda_0+\delta)(\lambda_0+c)-N_r\delta T_0\int_0^{\tau_r} h_r(\eta)e^{-\lambda_0\eta}\mathrm{d}\eta=0\end{aligned}\tag{9}$$

假设 λ_0^* 是方程 (8) 的一个根, 且 $Re\lambda_0^*\ge 0$, 使得对任意 $\eta>0$ 有 $|e^{-\lambda_0^*\eta}|\le 1$. 故从 (9) 中很容易可以得到如下不等式

$$\begin{aligned}&|(1-u)N_s\delta\frac{\lambda}{d}\int_0^{\tau_s} h_s(\eta)e^{-\lambda_0^*\eta}\mathrm{d}\eta|\le(1-u)N_s\delta\frac{\lambda}{d}k_s=(1-u)\delta cR_s\\&|N_r\delta\frac{\lambda}{d}\int_0^{\tau_r} h_r(\eta)e^{-\lambda_0^*\eta}\mathrm{d}\eta|\le N_r\delta\frac{\lambda}{d}k_r=\delta cR_r,\ \delta\le|\lambda_0^*+\delta|,\ c\le|\lambda_0^*+c|\end{aligned}\tag{10}$$

当 $(1-u)R_s<1$ 且 $R_r<1$ 时, 由 (9) 和 (10) 分别可得

$$\delta c\le|\lambda_0^*+\delta||\lambda_0^*+c|=|(1-u)N_s\delta\frac{\lambda}{d}\int_0^{\tau_s} h_s(\eta)e^{-\lambda_0^*\eta}\mathrm{d}\eta|\le(1-u)\delta cR_s,$$

或

$$\delta c\le|\lambda_0^*+\delta||\lambda_0^*+c|=|N_r\delta\frac{\lambda}{d}\int_0^{\tau_r} h_r(\eta)e^{-\lambda_0^*\eta}\mathrm{d}\eta|\le\delta cR_r,$$

矛盾. 因此如果 $(1-u)R_s<1$ 且 $R_r<1$, 则方程 (8) 的所有根均具有负实部. 故无病平衡点 E_0 局部渐近稳定.

如果 $(1-u)R_s>1$ 或 $R_r>1$, 直接计算有 $f_1(0)=\delta c(1-(1-u)R_s)<0$, $f_1(+\infty)=+\infty$ 或 $f_2(0)=\delta c(1-R_r)<0$, $f_2(+\infty)=+\infty$. 因此, 特征方程 (8) 至少有一个根具有正实部. 故 E_0 不稳定.

为了证明 E_0 的全局稳定性, 定义如下李雅普诺夫函数 $H_1(t)$

$$H_1(t)=T_0g(\frac{T}{T_0})+T_s+\frac{1}{N_s}V_s+T_r+\frac{1}{N_r}V_r+\int_0^{\tau_s} h_s(\eta)\int_{t-\eta}^{t}\frac{V_s(u)T(u)}{1+\omega_1V_s(u)}\mathrm{d}u\mathrm{d}\eta+\int_0^{\tau_r} h_r(\eta)\int_{t-\eta}^{t}\frac{V_r(u)T(u)}{1+\alpha_1V_r(u)}\mathrm{d}u\mathrm{d}\eta.$$

则有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}H_1(t)}{\mathrm{d}t}=&(1-\frac{T_0}{T})(\lambda-dT-\frac{k_sV_sT}{1+\omega_1V_s}-\frac{k_rV_rT}{1+\alpha_1V_r})+(1-u)\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)\frac{V_s(t-\eta)T(t-\eta)}{1+\omega_1V_s(t-\eta)}\mathrm{d}\eta-\delta T_s\\&+\frac{1}{N_s}(N_s\delta T_s-cV_s)+(u\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)\frac{V_s(t-\eta)T(t-\eta)}{1+\omega_1V_s(t-\eta)}\mathrm{d}\eta+\int_0^{\tau_r}h_r(\eta)\frac{V_r(t-\eta)T(t-\eta)}{1+\alpha_1V_r(t-\eta)}\mathrm{d}\eta\\&-\delta T_r)+\frac{1}{N_r}(N_r\delta T_r-cV_r)+\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)\frac{V_s(t)T(t)}{1+\omega_1V_s(t)}\mathrm{d}\eta-\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)\frac{V_s(t-\eta)T(t-\eta)}{1+\omega_1V_s(t-\eta)}\mathrm{d}\eta\\&+\int_0^{\tau_r}h_r(\eta)\frac{V_r(t)T(t)}{1+\alpha_1V_r(t)}\mathrm{d}\eta-\int_0^{\tau_r}h_r(\eta)\frac{V_r(t-\eta)T(t-\eta)}{1+\alpha_1V_r(t-\eta)}\mathrm{d}\eta\\=&dT_0(2-\frac{T}{T_0}-\frac{T_0}{T})+\frac{c(R_s-1)}{(1+\omega_1V_s)N_s}V_s-\frac{c\omega_1V_s^2}{(1+\omega_1V_s)N_s}+\frac{c(R_r-1)}{(1+\alpha_1V_r)N_r}V_r-\frac{c\alpha_1V_r^2}{(1+\alpha_1V_r)N_r}.\end{aligned}$$

当 $R_s\le 1$ 且 $R_r\le 1$ 时, 有 $\frac{\mathrm{d}H_1(t)}{\mathrm{d}t}\le 0$ 以及集合 $M=\{(T,T_s,V_s,T_r,V_r):\frac{\mathrm{d}H_1(t)}{\mathrm{d}t}=0\}\subset\{(T,T_s,V_s,T_r,V_r):T=T_0,T_s\ge 0,V_s\ge 0,T_r\ge 0,V_r\ge 0\}$. 对任意解轨迹 $\{(T(t),T_s(t),V_s(t),T_r(t),V_r(t)):t\ge 0\}\subset M$, 则有 $T(t)\equiv T_0$. 从模型 (2) 的第一个方程 $\frac{k_sV_s(t)T_0}{1+\omega_1V_s(t)}+\frac{k_rV_r(t)T_0}{1+\alpha_1V_r(t)}\equiv 0$, 这意味着 $V_s(t)=V_r(t)\equiv 0$. 进一步由第三个和第五个方程分别可得 $N_s\delta T_s(t)-cV_s(t)=0$ 和 $N_r\delta T_r(t)-cV_r(t)=0$, 则有 $T_s(t)=T_r(t)\equiv 0$. 因此, $(T(t),T_s(t),V_s(t),T_r(t),V_r(t))\equiv E_0$, 由 LaSalle 不变原理[16]可知无病平衡点 E_0 全局渐近稳定.

注 1 在定理 3 中, 我们仅得到了在条件 $R_s\le 1$ 和 $R_r\le 1$ 下, E_0 全局渐近稳定. 然而, 基于定理 3 的结论 (i), 一个有趣的问题是: 当条件 $(1-u)R_s\le 1$ 且 $R_r\le 1$ 成立时, E_0 是否全局渐近稳定.

接下来, 关于平衡点 E_r 的稳定性, 有如下结论.

定理 4 (i) 如果 $R_r>\max\{1,(1-u)R_s+((1-u)R_s-1)\alpha_1\frac{\lambda}{c}N_r\}$, 则平衡点 E_r 局部渐近稳定;

(ii) 如果 $R_r>\max\{1,R_s+(R_s-1)\alpha_1\frac{\lambda}{c}N_r\}$, 则 E_r 全局渐近稳定;

(iii) 如果 $R_r>1$ 且 $R_r<(1-u)R_s+((1-u)R_s-1)\alpha_1\frac{\lambda}{c}N_r$, 则 E_r 不稳定.

证明 由 (7) 可知在平衡点 E_r 处的特征方程为

$$\begin{aligned}f(\lambda_0)=&((\lambda_0+\delta)(\lambda_0+c)(\lambda_0+d+\frac{k_rV_{r1}}{1+\alpha_1V_{r1}})-(\lambda_0+d)\frac{N_r\delta T_1}{(1+\alpha_1V_{r1})^2}\int_0^{\tau_r}h_r(\eta)e^{-\lambda_0\eta}\mathrm{d}\eta)\\&((\lambda_0+\delta)(\lambda_0+c)-(1-u)N_s\delta T_1\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)e^{-\lambda_0\eta}\mathrm{d}\eta)=0\end{aligned}\tag{11}$$

计算可得

$$\frac{1}{1+\alpha_1V_{r1}}=\frac{k_r+d\alpha_1}{k_r+d\alpha_1R_r},\ \frac{V_{r1}}{1+\alpha_1V_{r1}}=\frac{d(R_r-1)}{k_r+d\alpha_1R_r},\ \frac{T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}=\frac{\lambda}{dR_r}.$$

方程 (11) 的所有根满足以下方程

$$\begin{aligned}f_1(\lambda_0)=&(\lambda_0+\delta)(\lambda_0+c)-(1-u)N_s\delta T_1\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)e^{-\lambda_0\eta}\mathrm{d}\eta=0,\\f_2(\lambda_0)=&(\lambda_0+\delta)(\lambda_0+c)(\lambda_0+d+\frac{dk_r(R_r-1)}{k_r+d\alpha_1R_r})-(\lambda_0+d)\frac{N_r\delta\lambda}{dR_r}\frac{k_r+d\alpha_1}{k_r+d\alpha_1R_r}\int_0^{\tau_r}h_r(\eta)e^{-\lambda_0\eta}\mathrm{d}\eta=0.\end{aligned}$$

$f_1(\lambda_0)=0$ 也可表示为

$$(\lambda_0+\delta)(\lambda_0+c)=(1-u)N_s\delta T_1\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)e^{-\lambda_0\eta}\mathrm{d}\eta\tag{12}$$

假设方程 (12) 有一个具有正实部的根 λ_0^*, 使得对任意 $\eta>0$ 都有 $|e^{-\lambda_0^*\eta}|\le 1$, 则很容易得到如下不等式.

$$|(1-u)N_s\delta T_1\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)e^{-\lambda_0^*\eta}\mathrm{d}\eta|\le(1-u)\delta c\frac{R_s(k_r+d\alpha_1R_r)}{R_r(k_r+d\alpha_1)},\ \delta\le|\lambda_0^*+\delta|,\ c\le|\lambda_0^*+c|\tag{13}$$

由 (12) 和 (13) 可得

$$\delta c\le|\lambda_0^*+\delta||\lambda_0^*+c|=|(1-u)N_s\delta T_1\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)e^{-\lambda_0^*\eta}\mathrm{d}\eta|\le(1-u)\delta c\frac{R_s}{R_r}\frac{k_r+d\alpha_1R_r}{k_r+d\alpha_1}.$$

因此, 当 $R_r>1$ 且 $R_r>(1-u)R_s+((1-u)R_s-1)\alpha_1\frac{\lambda}{c}N_r$ 时, 由 $1\leq(1-u)\frac{R_s}{R_r}\frac{k_r+d\alpha_1R_r}{k_r+d\alpha_1}$, 可得

$$k_r(R_r-(1-u)R_s-((1-u)R_s-1)\alpha_1\frac{\lambda}{c}N_r)\leq 0,$$

矛盾. 因此方程 (12) 的所有根均具有负实部.

由 $f_2(\lambda_0)=0$ 可知

$$(\lambda_0+d+\frac{dk_r(R_r-1)}{k_r+d\alpha_1R_r})(\lambda_0+\delta)(\lambda_0+c)=(\lambda_0+d)\frac{N_r\delta\lambda}{dR_r}\frac{k_r+d\alpha_1}{k_r+d\alpha_1R_r}\int_0^{\tau_r}h_r(\eta)e^{-\lambda_0\eta}\mathrm{d}\eta \tag{14}$$

现在只需证明方程 (14) 的根均具有负实部即可. 定义

$$LHS=\frac{(\lambda_0+d+\frac{dk_r(R_r-1)}{k_r+d\alpha_1R_r})(\lambda_0+\delta)(\lambda_0+c)}{(\lambda_0+d)},\ RHS=\frac{N_r\delta\lambda}{dR_r}\frac{k_r+d\alpha_1}{k_r+d\alpha_1R_r}\int_0^{\tau_r}h_r(\eta)e^{-\lambda_0\eta}\mathrm{d}\eta \tag{15}$$

假设 λ_0^* 是方程 (14) 的一个根, 且 $Re\lambda_0^*\geq 0$, 使得对任意 $\eta>0$, 都有 $|e^{-\lambda_0^*\eta}|\leq 1$. 则从 (15) 可知

$$\begin{aligned}|LHS|&=|\frac{(\lambda_0^*+d+\frac{dk_r(R_r-1)}{k_r+d\alpha_1R_r})(\lambda_0^*+\delta)(\lambda_0^*+c)}{(\lambda_0^*+d)}|>|(\lambda_0^*+c)||(\lambda_0^*+d)|\geq\delta c,\\|RHS|&=|\frac{N_r\delta\lambda}{dR_r}\frac{k_r+d\alpha_1}{k_r+d\alpha_1R_r}\int_0^{\tau_r}h_r(\eta)e^{-\lambda_0^*\eta}\mathrm{d}\eta|\leq\delta c\frac{k_r+d\alpha_1+d\alpha_1R_r-d\alpha_1R_r}{k_r+d\alpha_1R_r}=\delta c(1-\frac{d\alpha_1(R_r-1)}{k_r+d\alpha_1R_r})<\delta c.\end{aligned}$$

故 $|LHS|>\delta c>|RHS|$, 矛盾. 因此方程 (14) 的所有根均具有负实部. 综上所述, 如果 $R_r>\max\{1,(1-u)R_s+((1-u)R_s-1)\alpha_1\frac{\lambda}{c}N_r\}$, 则平衡点 E_r 局部渐近稳定.

当 $R_r>1$ 且 $R_r<(1-u)R_s+((1-u)R_s-1)\alpha_1\frac{\lambda}{c}N_r$ 时, 通过计算有

$$\begin{aligned}f(0)=&(\delta c-(1-u)N_s\delta T_1k_s)(d\delta c-d\frac{N_r\delta T_1k_r}{(1+\alpha_1V_{r1})^2}+\delta c\frac{k_rV_{r1}}{1+\alpha_1V_{r1}})\\=&\frac{\delta ck_rd\delta c(R_r-1)}{R_r(k_r+d\alpha_1R_r)}(R_r-(1-u)R_s-((1-u)R_s-1)\alpha_1\frac{\lambda}{c}N_r)<0.\end{aligned}$$

且 $\lim_{\lambda_0\to+\infty}f(\lambda_0)=+\infty$, 则方程 (11) 至少有一个根具有正实部. 故 E_r 不稳定.

关于平衡点 E_r 的全局稳定性, 定义如下李雅普诺夫函数 $H_2(t)$

$$\begin{aligned}H_2(t)=&T_1g(\frac{T}{T_1})+T_s+\frac{1}{N_s}V_s+\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)\int_{t-\eta}^t\frac{V_s(u)T(u)}{1+\omega_1V_s(u)}\mathrm{d}u\mathrm{d}\eta\\&+T_{r1}g(\frac{T_r}{T_{r1}})+\frac{1}{N_r}V_{r1}g(\frac{V_r}{V_{r1}})+\int_0^{\tau_r}h_r(\eta)\int_{t-\eta}^t\frac{V_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}g(\frac{\frac{V_r(u)T(u)}{1+\alpha_1V_r(u)}}{\frac{V_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}})\mathrm{d}u\mathrm{d}\eta.\end{aligned}$$

由模型 (2) 可知平衡点 E_r 满足如下方程 $\lambda=dT_1+\frac{k_rV_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}$, $\delta T_{r1}=\int_0^{\tau_r}h_r(\eta)\frac{V_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}\mathrm{d}\eta=\frac{k_rV_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}$, $N_r\delta T_{r1}=cV_{r1}$. 显然对任意 $t>0$, 有 $H_2(t)>0$. 则对 $H_2(t)$ 沿着模型 (2) 的任意正解求时间导数.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}H_2(t)}{\mathrm{d}t}=&(1-\frac{T_1}{T})(\lambda-dT-\frac{k_sV_sT}{1+\omega_1V_s}-\frac{k_rV_rT}{1+\alpha_1V_r})+(1-u)\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)\frac{V_s(t-\eta)T(t-\eta)}{1+\omega_1V_s(t-\eta)}\mathrm{d}\eta\\&-\delta T_s+\delta T_s-\frac{c}{N_s}V_s+(1-\frac{T_{r1}}{T_r})(u\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)\frac{V_s(t-\eta)T(t-\eta)}{1+\omega_1V_s(t-\eta)}\mathrm{d}\eta\\&+\int_0^{\tau_r}h_r(\eta)\frac{V_r(t-\eta)T(t-\eta)}{1+\alpha_1V_r(t-\eta)}\mathrm{d}\eta-\delta T_r)+\frac{1}{N_r}(1-\frac{V_{r1}}{V_r})(N_r\delta T_r-cV_r)\\&+\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)\frac{V_s(t)T(t)}{1+\omega_1V_s(t)}\mathrm{d}\eta-\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)\frac{V_s(t-\eta)T(t-\eta)}{1+\omega_1V_s(t-\eta)}\mathrm{d}\eta\\&+\int_0^{\tau_r}h_r(\eta)\frac{V_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}(\frac{\frac{V_r(t)T(t)}{1+\alpha_1V_r(t)}}{\frac{V_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}}-\ln\frac{\frac{V_r(t)T(t)}{1+\alpha_1V_r(t)}}{\frac{V_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}}-\frac{\frac{V_r(t-\eta)T(t-\eta)}{1+\alpha_1V_r(t-\eta)}}{\frac{V_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}}+\ln\frac{\frac{V_r(t-\eta)T(t-\eta)}{1+\alpha_1V_r(t-\eta)}}{\frac{V_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}})\mathrm{d}\eta\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&dT_1(2-\frac{T}{T_1}-\frac{T_1}{T})+\int_0^{\tau_r}h_r(\eta)\frac{V_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}(-g(\frac{T_1}{T})-g(\frac{T_rV_{r1}}{T_{r1}V_r})-g(\frac{T_{r1}\frac{V_r(t-\eta)T(t-\eta)}{1+\alpha_1V_r(t-\eta)}}{T_r\frac{V_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}})\\
&-g(\frac{1+\alpha_1V_r}{1+\alpha_1V_{r1}}))\mathrm{d}\eta-u\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)\frac{V_s(t-\eta)T(t-\eta)}{1+\omega_1V_s(t-\eta)}\mathrm{d}\eta\frac{T_{r1}}{T_r}+\frac{k_rV_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}\frac{1+\alpha_1V_{r1}}{1+\alpha_1V_r}\frac{V_r}{V_{r1}}\\
&-\frac{k_rV_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}\frac{V_r}{V_{r1}}-\frac{k_rV_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}+\frac{k_rV_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}\frac{1+\alpha_1V_r}{1+\alpha_1V_{r1}}+\frac{k_sN_sT_1-c}{(1+\omega_1V_s)N_s}V_s-\frac{c\omega_1}{(1+\omega_1V_s)N_s}V_s^2.
\end{aligned}
$$

这里,

$$
\begin{aligned}
&\frac{k_rV_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}\frac{1+\alpha_1V_{r1}}{1+\alpha_1V_r}\frac{V_r}{V_{r1}}-\frac{k_rV_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}\frac{V_r}{V_{r1}}-\frac{k_rV_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}+\frac{k_rV_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}\frac{1+\alpha_1V_r}{1+\alpha_1V_{r1}}\\
=&\frac{k_rV_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}\frac{-\alpha_1(V_r-V_{r1})^2}{V_{r1}(1+\alpha_1V_r)(1+\alpha_1V_{r1})}\le 0.
\end{aligned}
$$

并且

$$
k_sN_sT_1-c=c(\frac{R_s}{R_r}\frac{k_r+d\alpha_1R_r}{k_r+d\alpha_1}-1)=\frac{-ck_r}{R_r(k_r+d\alpha_1)}(R_r-R_s-(R_s-1)\alpha_1\frac{\lambda}{c}N_r)\le 0.
$$

显然当 $R_r>\max\{1,R_s+(R_s-1)\alpha_1\frac{\lambda}{c}N_r\}$ 时, 有 $\frac{\mathrm{d}H_2(t)}{\mathrm{d}t}\le 0$, 并且集合 $M=\{(T,T_s,V_s,T_r,V_r):\frac{\mathrm{d}H_2(t)}{\mathrm{d}t}=0\}\subset\{(T,T_s,V_s,T_r,V_r):T=T_1,T_s\ge 0,V_s\ge 0,T_r=T_{r1},V_r=V_{r1}\}$. 当 $T(t)\equiv T_1$, $T_r(t)\equiv T_{r1}$ 和 $V_r(t)\equiv V_{r1}$ 时, 由模型 (2) 第一个方程可知 $\lambda-dT_1-\frac{k_sV_s(t)T_1}{1+\omega_1V_s(t)}-\frac{k_rV_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}\equiv 0$, 这表明 $V_s(t)\equiv 0$. 进一步由第三个方程得 $N_s\delta T_s(t)-cV_s(t)\equiv 0$, 即有 $T_s(t)\equiv 0$. 因此, 最终有 $(T(t),T_s(t),V_s(t),T_r(t),V_r(t))\equiv E_r$. 所以, 由 LaSalle 不变原理[16]可得边界平衡点 E_r 全局渐近稳定, 故定理得证.

注 2 在定理 4 中, 我们仅得到了当 $R_r>\max\{1,R_s+(R_s-1)\alpha_1\frac{\lambda}{c}N_r\}$ 时, E_r 全局渐近稳定. 然而, 结合定理 4 的结论 (i), 一个有趣的问题是: 当 $R_r>\max\{1,(1-u)R_s+((1-u)R_s-1)\alpha_1\frac{\lambda}{c}N_r\}$ 时, E_r 是否全局渐近稳定.

注 3 很遗憾没能建立模型 (2) 正平衡点 E_c 局部和全局稳定性的阈值条件. 原因是很难分析在 E_c 处的特征方程, 且很难构造适当的李雅普诺夫函数. 故在下节中, 当正平衡点 E_c 存在时, 建立了模型 (2) 的一致持续性.

3 一致持续性

在本节中, 建立了模型 (2) 正解的一致持续性, 定义 $(T(t,\varphi),T_s(t,\varphi),V_s(t,\varphi),T_r(t,\varphi),V_r(t,\varphi))$ 是模型 (2) 具有初始函数 $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5)\in C([-\tau,0],R_+^5)$ 在 $t=0$ 时的解. 对任意 $t>0$ 且对所有 $\theta\in[-\tau,0]$, 定义 $(T_t(\varphi),T_{st}(\varphi),V_{st}(\varphi),T_{rt}(\varphi),V_{rt}(\varphi))=(T(t+\theta,\varphi),T_s(t+\theta,\varphi),V_s(t+\theta,\varphi),T_r(t+\theta,\varphi),V_r(t+\theta,\varphi))$. 则有如下结论.

定理 5 如果 $(1-u)R_s>1\ge R_r$ 或 $(1-u)R_s+((1-u)R_s-1)\alpha_1\frac{\lambda}{c}N_r>R_r>1$, 则模型 (2) 是一致持续的. 即存在一个正常数 δ, 使得对模型 (2) 任意满足初始函数 $\varphi\in C([-\tau,0],R_+^5)$ 的正解 $(T(t,\varphi),T_s(t,\varphi),V_s(t,\varphi),T_r(t,\varphi),V_r(t,\varphi))$, 有

$$
\liminf_{t\to\infty}T(t,\varphi)\ge\delta,\quad \liminf_{t\to\infty}T_s(t,\varphi)\ge\delta,\quad \liminf_{t\to\infty}V_s(t,\varphi)\ge\delta,\quad \liminf_{t\to\infty}T_r(t,\varphi)\ge\delta,\quad \liminf_{t\to\infty}V_r(t,\varphi)\ge\delta.
$$

证明 令 $u(t,\varphi)=(T(t,\varphi),T_s(t,\varphi),V_s(t,\varphi),T_r(t,\varphi),V_r(t,\varphi))$ 是模型 (2) 具有初始条件 (3) 的解. 由定理 1 可知存在一个常数 $N>0$, 使得对任意 $\epsilon>0$ 都有一个 $T_0>0$, 并且当 $t\ge T_0$ 时, 总有 $T(t,\varphi)<N+\epsilon$, $T_s(t,\varphi)<N+\epsilon$, $T_r(t,\varphi)<N+\epsilon$, $V_s(t,\varphi)<N+\epsilon$ 和 $V_r(t,\varphi)<N+\epsilon$ 成立. 则由模型 (2) 的第一个方程可知

$$
\frac{\mathrm{d}T(t,\varphi)}{\mathrm{d}t}\ge\lambda-dT-k_sV_sT-k_rV_rT\ge\lambda-(d+(k_s+k_r)(N+\epsilon))T(t,\varphi).
$$

根据比较原理和 ϵ 的任意性, 可知 $\liminf_{t\to\infty}T(t,\varphi)\ge\frac{\lambda}{d+(k_s+k_r)N}$. 这表明 $T(t,\varphi)$ 一致持续.

定义

$$
X=\{(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5)\in C([-\tau,0],R_+^5):\varphi_1\ge 0,\varphi_2\ne 0,\varphi_3\ne 0,\varphi_4\ne 0,\varphi_5\ne 0\}.
$$

X 的边界为

$$
\partial X=C([-\tau,0],R_+^5)/X=\{(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5)\in C([-\tau,0],R_+^5):\varphi_1\ge 0,\varphi_2\equiv 0\text{或}\varphi_3\equiv 0\text{或}\varphi_4\equiv 0\text{或}\varphi_5\equiv 0\}.
$$

定义

$$M_\partial=\{\varphi\in C([-\tau,0],R_+^5):u(t,\varphi)\in\partial X,\ \forall t\geq 0\}.$$

令 $\omega(\varphi)$ 是解 $u(t,\varphi)$ 的 ω -极限集. 则从以下两种情形给出证明.

情形 (1): $(1-u)R_s>1\geq R_r$. 由定理 2 可知, 模型 (2) 仅有两个平衡点 E_0 和 E_c. 令 $M_0=\{E_0\}$, 显然有 $M_0\subset\cup_{\varphi\in M_\partial}\omega(\varphi)$. 对任意的 $\varphi\in M_\partial$, 有 $u(t,\varphi)\in\partial X$, 故当 $t\geq 0$ 时, $T_s(t,\varphi)\equiv 0$ 或 $V_s(t,\varphi)\equiv 0$ 或 $T_r(t,\varphi)\equiv 0$ 或 $V_r(t,\varphi)\equiv 0$. 如果 $T_s(t,\varphi)\equiv 0$, 则由模型 (2) 的第二个方程可知 $V_s(t,\varphi)\equiv 0$. 由此, 模型 (2) 可退化为下列形式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}T(t,\varphi)}{\mathrm{d}t}=\lambda-dT(t,\varphi)-\dfrac{k_rV_r(t,\varphi)T(t,\varphi)}{1+\alpha_1V_r(t,\varphi)}\\ \dfrac{\mathrm{d}T_r(t,\varphi)}{\mathrm{d}t}=\displaystyle\int_0^{\tau_r}h_r(\eta)\dfrac{V_r(t-\eta,\varphi)T(t-\eta,\varphi)}{1+\alpha_1V_r(t-\eta,\varphi)}\mathrm{d}\eta-\delta T_r(t,\varphi)\\ \dfrac{\mathrm{d}V_r(t,\varphi)}{\mathrm{d}t}=N_r\delta T_r(t,\varphi)-cV_r(t,\varphi)\end{cases}\tag{16}$$

若 $\varphi_4+\varphi_5=0$, 则由模型 (16) 可以得到 $T_r(t,\varphi)=V_r(t,\varphi)\equiv 0$, 故 (16) 进一步退化为

$$\frac{\mathrm{d}T(t,\varphi)}{\mathrm{d}t}=\lambda-dT(t,\varphi).$$

由此可以得到 $\lim_{t\to\infty}T(t,\varphi)=\frac{\lambda}{d}=T_0$, 这表明 $\omega(\varphi)=E_0\subset M_0$.

若 $\varphi_4+\varphi_5>0$, 不失一般性, 假设 $\varphi_4>0$ 和 $\varphi_5\geq 0$, 由模型 (16) 的第二个方程可知对任意 $t\geq 0$ 有 $T_r(t,\varphi)\geq T_r(0)e^{-\delta t}>0$, 进一步由第三个方程可知对任意 $t>0$ 有 $V_r(t,\varphi)>V_r(0)e^{-ct}\geq 0$. 选取如下形式李雅普诺夫函数

$$U_0(t)=T_0(\frac{T(t)}{T_0}-\ln\frac{T(t)}{T_0}-1)+T_r(t)+\frac{1}{N_r}V_r(t)+\int_0^{\tau_r}h_r(\eta)\int_{t-\eta}^{t}\frac{V_r(u)T(u)}{1+\alpha_1V_r(u)}\mathrm{d}u\mathrm{d}\eta.$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}U_0(t)}{\mathrm{d}t}=dT_0(2-\frac{T_0}{T}-\frac{T}{T_0})+\frac{c(R_r-1)}{(1+\alpha_1V_r)N_r}V_r-\frac{c\alpha_1V_r^2}{(1+\alpha_1V_r)N_r}\leq 0,$$

且集合 $\{(T,T_r,V_r):\frac{\mathrm{d}U_0(t)}{\mathrm{d}t}=0\}\subset\{(T,T_r,V_r):T=T_0\}$. 如果 $T(t,\varphi)\equiv T_0$, 则由模型 (16) 的第一个方程可知 $V_r(t,\varphi)\equiv 0$, 进一步由第三个方程有 $T_r(t,\varphi)\equiv 0$. 因此由 LaSalle 不变原理[16]可知当 $t\to\infty$ 时, 会有 $(T(t,\varphi),T_r(t,\varphi),V_r(t,\varphi))\to(T_0,0,0)$ 成立. 这表明 $\omega(\varphi)=E_0\subset M_0$.

如果 $V_s(t,\varphi)\equiv 0$, 由模型 (2) 的第三个方程可知 $T_s(t,\varphi)\equiv 0$, 类似于上述论证, 同样可以得到 $\omega(\varphi)=E_0\subset M_0$.

如果 $T_r(t,\varphi)\equiv 0$, 由模型 (2) 的第四个方程可得 $V_s(t,\varphi)\equiv 0$ 和 $V_r(t,\varphi)\equiv 0$, 紧接着由第三个方程可知 $T_s(t,\varphi)\equiv 0$. 因此, 模型 (2) 可进一步退化为 $\frac{\mathrm{d}T(t,\varphi)}{\mathrm{d}t}=\lambda-dT(t,\varphi)$. 由此可以得到 $\lim_{t\to\infty}T(t,\varphi)=T_0$, 这表明 $\omega(\varphi)=E_0\subset M_0$.

如果 $V_r(t,\varphi)\equiv 0$, 由模型 (2) 的第五个方程可知 $T_r(t,\varphi)\equiv 0$, 类似于上述论证, 同样可以得到 $\omega(\varphi)=E_0\subset M_0$. 综上所述, 有 $M_0=\cup_{\varphi\in M_\partial}\omega(\varphi)$, 显然可知 M_0 在 ∂X 中是孤立不变的和非环的.

下面证明 $W^s(E_0)\cap X=\emptyset$, 这里 $W^s(E_0)$ 是 E_0 的稳定集. 反证法, 假设存在一个 $\varphi\in X$ 使得 $\lim_{t\to\infty}u(t,\varphi)=E_0$, 则有 $\lim_{t\to\infty}T(t,\varphi)=T_0$. 因此, 对任意 $\epsilon>0$, 存在一个 $T^*>0$, 使得当 $t\geq T^*$ 时, 有 $T(t,\varphi)\geq T_0-\epsilon$ 和 $V_s(t,\varphi)<\epsilon$. 定义下列函数

$$U_1(t,\varphi)=T_s(t,\varphi)+\frac{1}{N_s}V_s(t,\varphi)+(1-u)\int_0^{\tau_s}h_s(\eta)\int_{t-\eta}^{t}\frac{V_s(u,\varphi)T(u,\varphi)}{1+\omega_1V_s(u,\varphi)}\mathrm{d}u\mathrm{d}\eta.$$

则有 $\lim_{t\to\infty}U_1(t,\varphi)=0$. 当 $t\geq T^*$ 时, 有

$$\frac{\mathrm{d}U_1(t,\varphi)}{\mathrm{d}t}=(1-u)\frac{k_sV_s(t,\varphi)T(t,\varphi)}{1+\omega_1V_s(t,\varphi)}-\frac{c}{N_s}V_s(t,\varphi)\geq((1-u)\frac{k_s(T_0-\epsilon)}{1+\omega_1\epsilon}-\frac{c}{N_s})V_s(t,\varphi).$$

当 $(1-u)R_s>1\geq R_r$ 时, 可选取足够小的 $\epsilon>0$, 使得 $(1-u)\frac{k_s(T_0-\epsilon)}{1+\omega_1\epsilon}-\frac{c}{N_s}>0$. 故 $U_1(t,\varphi)$ 在 $t\geq T^*$ 上是增函数. 由此可知当 $t\to\infty$ 时, $U_1(t,\varphi)$ 不趋向于零, 矛盾. 因此 $W^s(E_0)\cap X=\emptyset$. 根据动力系统的持续性理论[17], 可知存

在一个常数 $\delta>0$, 使得对任意 $\varphi\in X$, 都有

$$\liminf_{t\to\infty}T_s(t,\varphi)\geq\delta,\ \liminf_{t\to\infty}V_s(t,\varphi)\geq\delta,\ \liminf_{t\to\infty}T_r(t,\varphi)\geq\delta,\ \liminf_{t\to\infty}V_r(t,\varphi)\geq\delta.$$

由此可以得到模型 (2) 是一致持续的.

情形 (2): $(1-u)R_s+((1-u)R_s-1)\alpha_1\frac{\lambda}{c}N_r>R_r>1$. 由定理 2 可知模型 (2) 有三个平衡点 E_0, E_r 和 E_c. 定义 $M_0=\{E_0,E_r\}$, 显然有 $M_0\subset\cup_{\varphi\in M_\partial}\omega(\varphi)$. 当 $\varphi\in M_\partial$, 对所有 $t\geq0$, 有 $u(t,\varphi)\in\partial X$, 则 $T_s(t,\varphi)\equiv0$ 或 $V_s(t,\varphi)\equiv0$ 或 $T_r(t,\varphi)\equiv0$ 或 $V_r(t,\varphi)\equiv0$. 若 $T_s(t,\varphi)\equiv0$, 类似于上述论证, 模型 (2) 可退化为模型 (16).

若 $\varphi_4+\varphi_5=0$, 则类似于情形 (1) 中的论证, 可以得到 $\omega(\varphi)=E_0\subset M_0$.

若 $\varphi_4+\varphi_5>0$, 对所有的 $t>0$ 可得 $T_r(t,\varphi)>0$ 和 $V_r(t,\varphi)>0$. 定义如下形式李雅普诺夫函数

$$\begin{aligned}U_2(t,\varphi)=&T_1(\frac{T}{T_1}-\ln\frac{T}{T_1}-1)+T_{r1}(\frac{T_r}{T_{r1}}-\ln\frac{T_r}{T_{r1}}-1)+\frac{1}{N_r}V_{r1}(\frac{V_r}{V_{r1}}-\ln\frac{V_r}{V_{r1}}-1)\\&+\int_0^{\tau_r}h_r(\eta)\frac{V_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}\int_{t-\eta}^{t}(\frac{\frac{V_r(u)T(u)}{1+\alpha_1V_r(u)}}{\frac{V_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}}-\ln\frac{\frac{V_r(u)T(u)}{1+\alpha_1V_r(u)}}{\frac{V_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}}-1)\mathrm{d}u\mathrm{d}\eta.\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}U_2(t,\varphi)}{\mathrm{d}t}=&dT_1(2-\frac{T_1}{T}-\frac{T}{T_1})+\int_0^{\tau_r}h_r(\eta)\frac{V_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}(-g(\frac{T_1}{T})-g(\frac{T_rV_{r1}}{T_{r1}V_r})-g(\frac{1+\alpha_1V_r}{1+\alpha_1V_{r1}})\\&-g(\frac{T_{r1}\frac{V_r(t-\eta)T(t-\eta)}{1+\alpha_1V_r(t-\eta)}}{T_r\frac{V_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}}))\mathrm{d}\eta-\frac{k_rV_{r1}T_1}{1+\alpha_1V_{r1}}\frac{\alpha_1(V_r-V_{r1})^2}{(1+\alpha_1V_{r1})V_{r1}(1+\alpha_1V_r)}\leq0,\end{aligned}$$

集合 $\{(T,T_r,V_r):\frac{\mathrm{d}U_2(t,\varphi)}{\mathrm{d}t}=0\}=\{(T_1,T_{r1},V_{r1})\}$. 因此, 由 LaSalle 不变原理[16]可知当 $t\to\infty$ 时, 有 $(T(t,\varphi),T_r(t,\varphi),V_r(t,\varphi))\to(T_1,T_{r1},V_{r1})$. 则 $\omega(\varphi)=E_r\subset M_0$.

如果 $V_s(t,\varphi)\equiv0$ 或 $T_r(t,\varphi)\equiv0$ 或 $V_r(t,\varphi)\equiv0$, 则类似于情形 (1) 中的论证, 同样可得 $\omega(\varphi)=E_0$ 或 $\omega(\varphi)=E_r$, 并且 $\omega(\varphi)\subset M_0$. 由此最终有 $M_0=\cup_{\varphi\in M_\partial}\omega(\varphi)$, 并且进一步可得 M_0 在 ∂X 中是孤立不变的和非环的.

下面证明 $W^s(E_0)\cap X=\emptyset$ 和 $W^s(E_r)\cap X=\emptyset$. 类似于情形 (1) 中的论证可知 $W^s(E_0)\cap X=\emptyset$. 所以只需证明 $W^s(E_r)\cap X=\emptyset$. 反证法, 假设存在 $\varphi\in X$, 使得 $\lim_{t\to\infty}u(t,\varphi)=E_r$, 则有 $\lim_{t\to\infty}T(t,\varphi)=T_1$. 即对任意常数 $\epsilon>0$, 存在一个 $T^*>0$, 使得对任意 $t\geq T^*$ 有 $T(t,\varphi)\geq T_1-\epsilon$ 和 $V_s(t,\varphi)<\epsilon$. 再取函数 $U_1(t)$, 则有 $\lim_{t\to\infty}U_1(t,\varphi)=0$. 当 $t\geq T^*$ 时,

$$\frac{\mathrm{d}U_1(t,\varphi)}{\mathrm{d}t}=(1-u)\frac{k_sV_s(t,\varphi)T(t,\varphi)}{1+\omega_1V_s(t,\varphi)}-\frac{c}{N_s}V_s(t,\varphi)\geq((1-u)\frac{k_s(T_1-\epsilon)}{1+\omega_1\epsilon}-\frac{c}{N_s})V_s(t,\varphi).$$

当 $(1-u)R_s+((1-u)R_s-1)\alpha_1\frac{\lambda}{c}N_r>R_r>1$ 时, 选取足够小的 $\epsilon>0$ 使得 $(1-u)\frac{k_s(T_1-\epsilon)}{1+\omega_1\epsilon}-\frac{c}{N_s}>0$. 故 $U_1(t,\varphi)$ 在 $t\geq T^*$ 上是增函数. 由此可知 $U_1(t,\varphi)$ 不趋向于零, 矛盾. 则 $W^s(E_r)\cap X=\emptyset$, 根据动力系统的持续性理论[17], 可知存在一个常数 $\delta>0$, 使得对任意 $\varphi\in X$, 都有

$$\liminf_{t\to\infty}T_s(t,\varphi)\geq\delta,\ \liminf_{t\to\infty}V_s(t,\varphi)\geq\delta,\ \liminf_{t\to\infty}T_r(t,\varphi)\geq\delta,\ \liminf_{t\to\infty}V_r(t,\varphi)\geq\delta.$$

这表明模型 (2) 同样是一致持续的.

注 4 一个有趣的问题是: 当满足定理 5 的条件时, 正平衡点 E_c 是否全局渐近稳定.

4 数值模拟

本节给出两个数值算例, 验证注 4 中提出的问题. 对所有 $\eta\in[-\tau_i,0]$, 取核函数 $h_i(\eta)=e^{-0.1\eta}$, $(i=s,r)$. 在模型 (2) 中选取参数 $d=0.1$, $u=0.6$, $\delta=c=1$, 其余参数将在具体算例中给出.

例 1 在模型 (2) 中, 选取初始函数为 $(T(\theta),T_s(\theta),V_s(\theta),T_r(\theta),V_r(\theta))=(0.5+0.2\sin(\theta)+0.005k,0.06+0.1\sin(\theta)+0.005k,0.02+0.1\sin(\theta)+0.004k,0.1+0.01\sin(\theta)+0.000\,2k,0.01+0.04\sin(\theta)+0.01k)$, $k=1,2,\cdots,20$, $\theta\in[-3,0]$, 并且参数 $\lambda=0.6$, $N_s=0.4$, $N_r=0.05$, $\tau_s=\tau_r=3$, $\omega_1=3.5$, $\alpha_1=4.5$. 通过计算可得 $R_s\approx6.220\,3$, $(1-u)R_s\approx2.488\,1$ 和 $R_r\approx0.777\,5$. 因此, $(1-u)R_s>1>R_r$, 由图 1 和图 2 可知正平衡点 $E_c=(2.747\,2,0.099\,5,0.039\,8,0.225\,8,0.011\,3)$ 全局渐近稳定, 这表明注 4 中的结论正确.

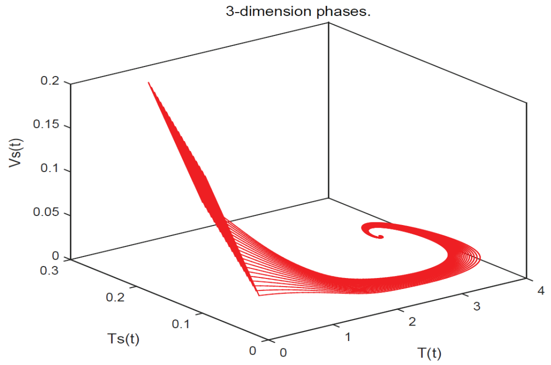

图 1　$(T(t),T_s(t),V_s(t))$ 的三维相图

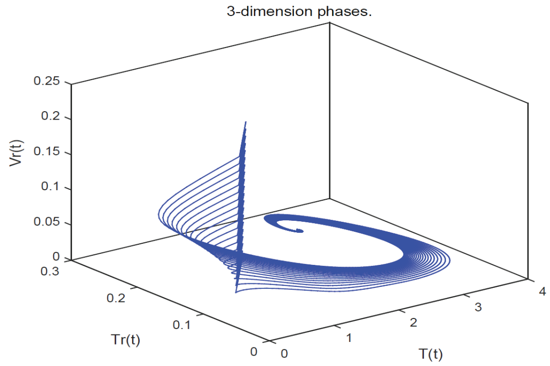

图 2　$(T(t),T_r(t),V_r(t))$ 的三维相图

例 2 在模型 (2) 中, 选取初始函数为 $(T(\theta),T_s(\theta),V_s(\theta),T_r(\theta),V_r(\theta))=(0.8+0.4\sin(\theta)+0.01k,0.05+0.01\sin(\theta)+0.02k,0.01+0.01\sin(\theta)+0.02k,0.3+0.01\sin(\theta)+0.01k,0.03+0.04\sin(\theta)+0.02k)$, $k=1,2,\cdots,20$, $\theta\in[-1.5,0]$, 并且参数 $\lambda=0.8$, $N_s=0.9$, $N_r=0.4$, $\tau_s=\tau_r=1.5$, $\omega_1=1.5$, $\alpha_1=3$. 通过计算可得到 $R_s\approx 10.028\ 9$, $R_r\approx 4.457\ 3$ 和 $(1-u)R_s+((1-u)R_s-1)\alpha_1\frac{\lambda}{c}N_r\approx 6.902\ 7$. 于是, $(1-u)R_s+((1-u)R_s-1)\alpha_1\frac{\lambda}{c}N_r>R_r>1$, 由图 3 和图 4 可知正平衡点 $E_c=(2.204\ 2,0.078,0.070\ 2,0.501\ 6,0.200\ 6)$ 全局渐近稳定, 这表明注 4 中的结论正确.

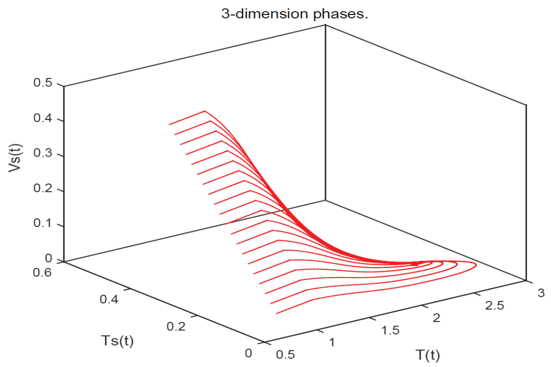

图 3　$(T(t),T_s(t),V_s(t))$ 的三维相图

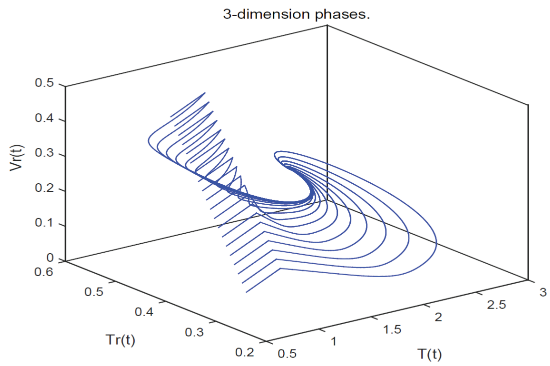

图 4　$(T(t),T_r(t),V_r(t))$ 的三维相图

5　结 论

本文研究了一类具有饱和发生率的两毒株时滞 HIV 感染模型的阈值动力学, 主要讨论了饱和发生率和分布潜伏时滞对 HIV 感染模型阈值动力学的影响. 通过构造李雅普诺夫泛函和运用动力系统持续性理论, 得到了一些关于平衡点全局稳定性和模型一致持续性全局动力学的有趣结论. 今后的工作将集中在具有反应扩散 HIV 感染模型的分支分析和敏感性分析, 可以更准确地描述传染病传播的实际情况.

参考文献:

[1] 朱晶, 文卜玉. 一类具有吸收效应和阶段结构的时滞病原体免疫模型[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2021, 38(5): 533-539.

[2] 唐思甜, 滕志东. 一类具有体液免疫的宿主内部和宿主之间的疾病传播耦合模型[J]. 数学的实践与认识, 2019, 49(7): 276-287.

[3] RONG L, GILCHRIST M, FENG Z. Modeling within-host HIV-1 dynamics and the evolution of drug resistance: trade-offs between viral enzyme function and drug susceptibility[J]. Journal of Theoretical Biology, 2007, 247: 804-818.

[4] FENG Z, VELASCO-HERNANDEZ J, TAPIA-SANTONS B. A mathematical model for coupling within-host and between-host dynamics in an environmentally-driven infectious disease[J]. Mathematical Biosciences, 2013, 241: 49-55.

[5] FENG Z, CEN X, ZHAO Y, et al. Coupled within-host and between-host dynamics and evolution of virulence[J]. Mathematical Biosciences, 2015, 270: 204-212.

[6] PERELSON A, NEUMANN A, MARKOWITZ M, et al. HIV-1 dynamics in vivo: virion clearance rate, infected cell life-span, and viral generation time[J]. Science, 1996, 271: 1582-1586.

(下转第 420 页)