

构造一个具有拟凸性和拟齐次性的拟距离*

余安康, 李宝德[†]

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830046)

摘要: 本文首先介绍了 n 维欧氏空间上拟距离的定义, 然后引入了相关拟距离的两类性质: 拟凸性和拟齐次性; 最后构造了一个满足拟凸性和拟齐次性的拟距离的映射.

关键词: 拟距离; 拟凸性; 拟齐次性; 映射; 向量场

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2020.10.15.0001

中图分类号: O174.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2021)06-0670-05

引文格式: 余安康, 李宝德. 构造一个具有拟凸性和拟齐次性的拟距离[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2021, 38(6): 670-674.

英文引文格式: YU A K, LI B D. Construct a quasi-distance equipped with quasi-convexity and quasi-homogeneity[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2021, 38(6): 670-674.

Construct a Quasi-Distance Equipped with Quasi-Convexity and Quasi-Homogeneity

YU Ankang, LI Baode

(School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830046, China)

Abstract: In this paper, we first introduce the definition of quasi-distance in n dimensional Euclidian space. Then introduce two kinds of properties related to quasi-distance: quasi-convex property and quasi-homogeneous property. Finally, the authors further verify that a mapping of vector field is a quasi-distance satisfying the above two characteristics.

Key words: quasi-distance; quasi-convex property; quasi-homogeneous property; mapping; vector field

0 引言

作为欧氏距离的推广, 拟距离可以应用在更广泛的情况下, 例如在各向异性情形下的拟距离仍然具有很多良好的性质, 具体内容可参阅文献[1]和[2]. 对于欧氏空间中凸体所满足的几何性质(定理1)的一种推广, 我们称用距离定义的球满足与凸体类似的几何性质为该拟距离的拟凸性. 这种定义灵活方便, 所建立的性质也可在更广泛的情况下使用. 此外, 拟齐次性是拟距离所定义的球的性质, 该性质是对欧氏空间中球的基本性质的一种推广, 也具有一些良好的性质. 例如, 欧氏空间中的任意范数所构成的拟距离满足拟齐次性, 并且满足拟齐次性的拟距离也一定满足双倍条件(见公式(4)). 于是一个自然的问题, 在欧氏空间中, 是否有一些非平凡的拟距离满足拟凸性和拟齐次性? 本文的目的便是构造一个满足拟凸性和拟齐次性的非平凡的拟距离. 受Stein^[3]的启发, 本文证明了由向量场 $X_1 := \partial/\partial x_1$ 和 $X_2 := x_1^k \partial/\partial x_2$ 所导出的映射满足上述两个性质的拟距离.

为方便起见, 对全文做如下约定. 符号 $D \lesssim F$ 表示 $D \lesssim CF$, 其中 C 为一个正的常数. 如果 $D \lesssim F$ 且 $F \lesssim D$, 我们记为 $D \sim F$.

1 拟距离, 拟凸性和拟齐次性

\mathbb{R}^n 中的椭球 ξ 是指 n 维欧氏空间的单位球 $\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ 在仿射变换下的像集, 即

* 收稿日期: 2020-10-15

基金项目: 新疆维吾尔自治区自然科学基金(2020D01C048); 国家自然科学基金(11861062).

作者简介: 余安康(1994-), 男, 硕士生, 从事调和与分析研究, E-mail: 1107102484@qq.com.

[†] 通讯作者: 李宝德(1981-), 男, 博士, 教授, 从事调和与分析研究, E-mail: baodeli@xju.edu.cn.

$$\xi := M_\xi(\mathbb{R}^n) + c_\xi,$$

其中: M_ξ 是一个非奇异矩阵, $c_\xi \in \mathbb{R}^n$ 是椭球 ξ 的中心. 对任意的椭球 ξ 和 $\lambda \geq 1$, 定义

$$\lambda\xi := \lambda M_\xi(\mathbb{R}^n) + c_\xi.$$

定义 1 集合 X 上的映射 $\rho: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ 是拟距离, 如果对所有的 $x, y, z \in X$ 满足如下条件:

- (i) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- (ii) 存在常数 $C > 0$, 使得 $\rho(x, y) \leq C\rho(y, x)$;
- (iii) 存在常数 $\kappa \geq 1$, 使得 $\rho(x, y) \leq \kappa(\rho(x, z) + \rho(y, z))$.

显然, 条件 (ii) 成立当且仅当 $\rho(x, y) \sim \rho(y, x)$. 另外, 设 $\tilde{\rho}(x, y) = [\rho(x, y) + \rho(y, x)]/2$, 可进一步得出 $\tilde{\rho}(x, y) = \tilde{\rho}(y, x)$.

\mathbb{R}^n 中的凸体指的是一个内部非空的紧凸集. John 已经证明了对于 \mathbb{R}^n 每一个凸体都包含一个体积最大的椭球^[4]. 这个椭球按维数 n 倍膨胀也可以包含原来的凸体, 详细内容参阅文献[5]和[6]中的定理3.13.

定理 1 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个凸体. 则存在一个唯一的体积最大的椭球 $\xi \subseteq \mathbb{R}^n$ 使得 $\xi \subseteq K$ 且 $K \subseteq n \cdot \xi$.

受定理 1 的启示, 我们可以推广凸体的概念.

定义 2 设常数 $Q \geq 1$. 称 $K' \subseteq \mathbb{R}^n$ 关于 $x \in K'$ 是 Q -拟凸的, 如果存在一个以 $c_\xi = x$ 为中心的椭球 $\xi \subseteq \mathbb{R}^n$ 使得

$$\xi \subseteq K' \subseteq Q \cdot \xi. \tag{1}$$

由定理1可知, 任意一个 \mathbb{R}^n 中的凸体是 Q -拟凸的, 这里 $Q = n$. 值得注意的是我们在上面的定义中没有假设唯一性, 这说明对于任意给出的一个集合 K' , 可能存在两个不同的椭球(即使是最大体积) 满足(1).

定义 3 给一个拟距离 $\rho: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$. 称 ρ 满足拟凸性质, 是指存在一个常数 $Q \geq 1$ 使得对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $r > 0$, 球

$$B_\rho(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : \rho(x, y) < r\}$$

关于 x 是 Q -拟凸的. 即存在一个椭球 ξ_x^r 使得

$$\xi_x^r \subseteq B_\rho(x, r) \subseteq Q \cdot \xi_x^r. \tag{2}$$

定义 4 称 \mathbb{R}^n 上的拟距离 ρ 满足拟齐次性质, 是指存在两个正的常数 $a = a(\rho)$ 和 $b = b(\rho)$ 满足对任意的 $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ 和 $\lambda \geq 1$, 有

$$a\lambda^b(B_\rho(x, r) - x) \subseteq B_\rho(x, \lambda r) - x. \tag{3}$$

显然, 欧氏空间中的任意范数所构成的拟距离满足拟齐次性质, 此时, $a = b = 1$. 此外, 拟齐次性质也是一种比双倍条件^[7]更强的条件, 由拟齐次性我们可以立即得出

$$a^n \lambda^{bn} |B_\rho(x, r)| \leq |B_\rho(x, \lambda r)|, \quad \lambda > 1. \tag{4}$$

2 一个满足拟凸性质和拟齐次性质的拟距离的例子

构造这个例子的动机来自于Stein. 设 k 是一个非负整数, 并且对任意的 $x \in \mathbb{R}^2$ 和 $\delta > 0$, 定义

$$B_k(x, \delta) := \{y \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - y_1| < \delta, |x_2 - y_2| < \max\{\delta^{k+1}, \delta|x_1|^k\}\}. \tag{5}$$

则球族 $\{B_k(x, \delta) : x \in \mathbb{R}^2, \delta \in (0, \infty)\}$ 是一个相关向量场 $X_1 := \partial/\partial x_1$ 和 $X_2 := x_1^k \partial/\partial x_2$ 自然导出的球族. 这种球 $B_k(x, \delta)$ 也可以被定义为

$$B_{\rho_k}(x, \delta) := \{y \in \mathbb{R}^2 : \rho_k(y, x) < \delta\},$$

其中

$$\rho_k(y, x) := \begin{cases} \max\{|y_1 - x_1|, \min\{|y_2 - x_2|^{1/(k+1)}, |y_2 - x_2|/|x_1|^k\}\} & \text{若 } x_1 \neq 0, \\ \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|^{1/(k+1)}\} & \text{若 } x_1 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

定理 2 设 k 是一个非负整数并且定义 ρ_k 如 (6) 所示. 则 ρ_k 是一个满足定义1的拟距离且满足拟凸性质和拟齐次性质.

证明 若假设 ρ_k 是一个拟距离, 则不难验证它是满足拟凸性质和拟齐次性质. 事实上, 由于所有的球都具有 (5) 中的形式, 则无论是 $|x_1| \geq \delta$ 或 $|x_1| < \delta$, 这些球实际上是长方体, 一种特殊的凸体. 由定理1可知, ρ_k 满足拟凸性质并且 $Q=n$. 此外, 对任意的 $\lambda \geq 1$, $\delta > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}^2$ 有

$$\begin{aligned} \lambda(B_{\rho_k}(x, \delta) - x) &= \{(y_1, y_2) : |y_1| < \lambda\delta, |y_2| < \lambda \max\{\delta^{k+1}, \delta|x_1|^k\}\} \\ &\subseteq \{(y_1, y_2) : |y_1| < \lambda\delta, |y_2| < \max\{(\lambda\delta)^{k+1}, \lambda\delta|x_1|^k\}\} \\ &= B_{\rho_k}(x, \lambda\delta) - x, \end{aligned}$$

当我们取定义4中的 $a=1$ 和 $b=1$ 时, 也就证明了拟距离 ρ_k 满足拟齐次性质.

接下来, 我们只需要证明 ρ_k 是一个拟距离. 由 ρ_k 的定义, 我们知道 $\rho_k(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ 是显然成立的, 下面我们分两步来验证 ρ_k 满足拟距离剩下的两个条件.

第一步: 证明 $\rho_k(x, y) \sim \rho_k(y, x)$. 我们仅证明下面三种典型情形, 其它情形是相似的.

情形 (1). 对任意 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ 且 $x_1, y_1 \neq 0$, 如果

$$|x_1 - y_1| \leq \frac{|x_2 - y_2|}{|y_1|^k} \leq \frac{|x_2 - y_2|}{|x_1|^k} \leq |x_2 - y_2|^{\frac{1}{k+1}}, \quad (7)$$

则有

$$\rho_k(x, y) = \frac{|x_2 - y_2|}{|y_1|^k} \leq \frac{|x_2 - y_2|}{|x_1|^k} = \rho_k(y, x).$$

现在证明存在常数 $C > 0$ 使得 $\rho_k(y, x) \leq C\rho_k(x, y)$, 即 $|y_1| \leq C|x_1|$. 我们使用反证法. 如若不然, 对任意的正整数 $n \geq 3$, 存在两组向量 $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$ 和 $(y_1^{(n)}, y_2^{(n)})$, 简记为 (x_1, x_2) 和 (y_1, y_2) , 满足 (7) 和 $|y_1| > n|x_1|$. 因此, 有

$$|y_1|^k \leq \frac{|x_2 - y_2|}{|x_1 - y_1|} \text{ 和 } |x_2 - y_2| \leq |x_1|^{k+1}$$

以及

$$|y_1|^k \leq \frac{|x_1|^{k+1}}{|x_1 - y_1|}. \quad (8)$$

此外, 由 $|y_1| > n|x_1|$ 和 $n \geq 3$ 可得

$$|x_1 - y_1| \geq |y_1| - |x_1| > 2|x_1|.$$

由此式, $|x_1| \leq |y_1|$ 和 (8) 得到

$$|x_1|^k \leq |y_1|^k < \frac{|x_1|^{k+1}}{2|x_1|} = \frac{1}{2}|x_1|^k.$$

即 $|x_1|^k < \frac{1}{2}|x_1|^k$, 矛盾! 所以存在常数 $C > 0$ 使得 $\rho_k(y, x) \leq C\rho_k(x, y)$.

情形 (2). 对任意 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ 且 $x_1, y_1 \neq 0$, 如果

$$\frac{|x_2 - y_2|}{|y_1|^k} \leq |x_1 - y_1| \leq \frac{|x_2 - y_2|}{|x_1|^k} \leq |x_2 - y_2|^{\frac{1}{k+1}}, \quad (9)$$

则有

$$\rho_k(x, y) = |x_1 - y_1| \leq \frac{|x_2 - y_2|}{|x_1|^k} = \rho_k(y, x).$$

接着证明存在一个常数 $C > 0$ 使得 $\rho_k(y, x) \leq C\rho_k(x, y)$. 使用反证法, 如若不然, 对任意正整数 n 满足 $n^{1/k} > 2$, 存在两组向量 $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$ 和 $(y_1^{(n)}, y_2^{(n)})$, 简记为 (x_1, x_2) 和 (y_1, y_2) , 满足 (9) 和

$$n\rho_k(x, y) = n|x_1 - y_1| < \frac{|x_2 - y_2|}{|x_1|^k} = \rho_k(y, x). \quad (10)$$

进一步由

$$\frac{|x_2 - y_2|}{|x_1|^k} \leq |x_2 - y_2|^{\frac{1}{1+k}}$$

知

$$|x_2 - y_2| \leq |x_1|^{k+1}.$$

由此式和 (9) 可知

$$|x_1 - y_1| \leq \frac{|x_2 - y_2|}{|x_1|^k} \leq |x_1|. \quad (11)$$

通过式(9) 和 (10) 得出

$$|y_1| \geq \left(\frac{|x_2 - y_2|}{|x_1 - y_1|} \right)^{\frac{1}{k}} \quad \text{和} \quad n^{\frac{1}{k}} |x_1| < \left(\frac{|x_2 - y_2|}{|x_1 - y_1|} \right)^{\frac{1}{k}},$$

因此有 $|y_1| > n^{\frac{1}{k}} |x_1|$ 并且

$$|x_1 - y_1| > (n^{\frac{1}{k}} - 1) |x_1| > |x_1|.$$

由此式和 (11) 得出 $|x_1| < |x_1|$, 矛盾!

情形 (3). 对任意 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ 且 $x_1, y_1 \neq 0$, 如果

$$|x_1 - y_1| \leq \frac{|x_2 - y_2|}{|x_1|^k} \leq |x_2 - y_2|^{\frac{1}{k+1}} \leq \frac{|x_2 - y_2|}{|y_1|^k}, \quad (12)$$

则有

$$\rho_k(y, x) = \frac{|x_2 - y_2|}{|x_1|^k} \leq |x_2 - y_2|^{\frac{1}{k+1}} = \rho_k(x, y).$$

同样地, 我们接下来证明存在一个常数 $C > 0$ 使得 $\rho_k(x, y) \leq C \rho_k(y, x)$. 使用反证法, 若对任意一个正整数 n 满足 $n^{1/k} > 2$, 存在两组向量 $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})$ 和 $(y_1^{(n)}, y_2^{(n)})$, 简记为 (x_1, x_2) 和 (y_1, y_2) , 满足 (12) 和

$$n \rho_k(y, x) = n \frac{|x_2 - y_2|}{|x_1|^k} < |x_2 - y_2|^{\frac{1}{k+1}} = \rho_k(x, y). \quad (13)$$

通过式(12) 和 (13), 有

$$|x_1 - y_1|^k \leq |x_2 - y_2|^{\frac{k}{k+1}} \quad \text{和} \quad n |x_2 - y_2|^{\frac{k}{k+1}} < |x_1|^k,$$

因此,

$$n^{\frac{1}{k}} |x_1 - y_1| < |x_1|. \quad (14)$$

由 $|x_2 - y_2|^{1/(k+1)} \leq |x_2 - y_2|/|y_1|^k$ 知

$$|y_1|^k \leq |x_2 - y_2|^{\frac{k}{k+1}},$$

再结合 $n |x_2 - y_2|^{k/(k+1)} < |x_1|^k$, 可得出

$$n^{\frac{1}{k}} |y_1| < |x_1|. \quad (15)$$

因此, 由式(14), (15) 和 $n^{1/k} > 2$ 可得

$$\begin{aligned} |y_1| &\geq |x_1| - |x_1 - y_1| > (n^{\frac{1}{k}} - 1) |x_1 - y_1| \\ &> (n^{\frac{1}{k}} - 1) (n^{\frac{1}{k}} |y_1| - |y_1|) = (n^{\frac{1}{k}} - 1)^2 |y_1| > |y_1|, \end{aligned}$$

即 $|y_1| > |y_1|$, 矛盾!

第二步: 证明 ρ_k 满足拟三角不等式. 我们只在下面两个典型的情况下证明, 其它的情况是相似的.

情形 (1). 对任意 $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ 且 $x_1, y_1, z_1 \neq 0$, 如果满足

$$|x_1 - z_1| \leq \frac{|x_2 - z_2|}{|z_1|^k} \leq \frac{|x_2 - z_2|}{|x_1|^k} \leq |x_2 - z_2|^{\frac{1}{k+1}}, \quad (16)$$

$$|x_1 - y_1| \leq \frac{|x_2 - y_2|}{|y_1|^k} \leq \frac{|x_2 - y_2|}{|x_1|^k} \leq |y_2 - z_2|^{\frac{1}{k+1}}, \quad (17)$$

$$|y_1 - z_1| \leq \frac{|y_2 - z_2|}{|y_1|^k} \leq \frac{|y_2 - z_2|}{|z_1|^k} \leq |y_2 - z_2|^{\frac{1}{k+1}}. \quad (18)$$

则对于式(18), 使用第一步中情形(1)的估计, 存在一个常数 $C \geq 1$ 使得 $|y_1| \leq C|z_1|$. 通过此式, (16), (17) 和 (18) 可得

$$\rho(x, z) = \frac{|x_2 - z_2|}{|z_1|^k} \leq C \left(\frac{|x_2 - y_2|}{|y_1|^k} + \frac{|y_2 - z_2|}{|z_1|^k} \right) = C(\rho(x, y) + \rho(y, z)),$$

拟三角不等式得证.

情形 (2). 对任意 $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ 且 $x_1, y_1, z_1 \neq 0$, 如果满足

$$|x_1 - z_1| \leq \frac{|x_2 - z_2|}{|x_1|^k} \leq |x_2 - z_2|^{\frac{1}{k+1}} \leq \frac{|x_2 - z_2|}{|z_1|^k}, \quad (19)$$

$$|x_2 - y_2|^{\frac{1}{k+1}} \leq \frac{|x_2 - y_2|}{|y_1|^k} \leq \frac{|x_2 - y_2|}{|x_1|^k} \leq |x_1 - y_1|, \quad (20)$$

$$\frac{|y_2 - z_2|}{|y_1|^k} \leq |y_1 - z_1| \leq \frac{|y_2 - z_2|}{|z_1|^k} \leq |y_2 - z_2|^{\frac{1}{k+1}}. \quad (21)$$

则对于式(19), 使用第一步中情形(3)的估计, 得到

$$\rho(x, z) = |x_2 - z_2|^{\frac{1}{k+1}} \sim \frac{|x_2 - z_2|}{|x_1|^k} = \rho(z, x).$$

通过此式, 式(20), $|z_1| \leq |x_1|$ 和 式(21), 存在一个常数 $C \geq 1$ 使得

$$\begin{aligned} \rho(x, z) &\leq C \frac{|x_2 - z_2|}{|x_1|^k} \leq C \left[\frac{|x_2 - y_2|}{|x_1|^k} + \frac{|y_2 - z_2|}{|x_1|^k} \right] \\ &\leq C \left[|x_1 - y_1| + \frac{|y_2 - z_2|}{|z_1|^k} \right] = C[\rho(x, y) + \rho(y, z)], \end{aligned}$$

拟三角不等式得证, 我们也完成了定理2 的证明.

参考文献:

- [1] ZHANG H, QI C Y, LI B D. A weighted estimates of anisotropic fractional integral operators[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition), 2017, 34(1): 35-39.
- [2] DAHMEN W, DEKEL S, PETRUSHEV P. Two-level-split decomposition of anisotropic Besov spaces[J]. Constr Approx, 2010, 31: 149-194.
- [3] STEIN E M. Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals[M]. Princeton: Princeton University Press, 1993.
- [4] JOHN F. Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions: studies and essays presented to R Courant on his 60th birthday, January 8, 1948[M]. New York: N Y Interscience Publishers, Inc, 1948.
- [5] BALL K. Ellipsoids of maximal volume in convex bodies[J]. Geom Dedicata, 1992, 41(2): 241-250.
- [6] TAO T, VU V. Additive combinatorics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
- [7] YANG D C, ZHOU Y. New properties of Besov and Triebel-Lizorkin spaces on RD-spaces[J]. Manuscripta Math, 2011, 134: 59-90.

责任编辑: 赵新科