由两个同型部件和一个修理设备组成的系统的主算子的谱*

艾尼·吾甫尔
(新疆大学 数学与系统科学学院，新疆 乌鲁木齐 830017)

摘　要： 文章研究了由两个同型部件和一个修理设备组成的系统的主算子在左半复平面中的谱. 在一定的条件下, 该系统的主算子在左半复平面中的任何带形区域至多有有限多个特征值, 且这些特征值的几何重数为 1. 该模型的主算子的共轭算子在左半复平面中的任何带形区域至多有有限多个特征值, 且这些特征值的几何重数为 1. 0 是该系统的主算子及其共轭算子的严格占优特征值.

关键词： 由两个同型部件和一个修理设备组成的系统；C_0-半群；特征值；谱；算子

DOI： 10.13568/j.cnki.651094.651316. 2021.02.04.0001

中图分类号： O177.7　**文献标识码：** A　**文章编号：** 2096-7675(2022)01-0026-08

引文格式： 艾尼·吾甫尔. 由两个同型部件和一个修理设备组成的系统的主算子的谱[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2022, 39(1): 26-33.

英文引文格式： Geni Gupur. On the spectrum of the operator corresponding to the system consisting of two identical units and a repairman[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2022, 39(1): 26-33.

On the Spectrum of the Operator Corresponding to the System Consisting of Two Identical Units and a Repairman

Geni Gupur

(*School of Mathematics and Systems Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China*)

Abstract： We study spectrum of the operator, which corresponds to the system consisting of two identical units and a repairman, on the left half complex plane and obtain that under a certain condition, the operator and its adjoint operator have finite eigenvalues with geometric multiplicity one in any strip region in the left half complex plane and 0 is a strictly dominant eigenvalue of the operator and its adjoint operator.

Key words： system consisting of two identical units and a repairman; C_0-semigroup; eigenvalue; spectrum; operator

0　引 言

由两个同型部件和一个修理设备组成的系统是我们常见的系统之一, 例如两台功率一样的发电机连接构成的发电系统, 两台功率一样的水泵连接构成的抽水系统, 两台功率一样的计算机连接的计算系统等. 2006年, 曹晋华与程侃[1]给出了描述由两个同型部件和一个修理设备组成的系统的数学模型, 并指出该系统是几个典型系统如两个同型部件并联的系统、两个同型部件的冷储备系统、两个同型部件的温储备系统、两个同型部件的表决系统等的推广, 然后用 Laplace 变换和 Tauber 定理讨论了该系统的稳态可用度. 2020年, 艾尼·吾甫尔[2]讨论了文献[1]中的由两个同型部件和一个修理设备组成的系统. 首先以修理时间作为补充变量并用 Markov 过程推导了描述该系统的数学模型, 然后在一定的条件下证明了该系统蕴含两个同型部件并联的系统、两个同型部件

* **收稿日期：** 2021-02-04
基金项目： 国家自然科学基金(11961062).
作者简介： 艾尼·吾甫尔（1972-），男，博士，教授，博士生导师，主要从事排队模型和可靠性模型动态分析的研究，E-mail: geni@xju.edu.cn.

的冷储备系统、两个同型部件的温储备系统、两个同型部件的表决系统. 第三步通过选择状态空间, 主算子及其定义域将该系统的数学模型转化成了 Banach 空间中的抽象 Cauchy 问题. 第四步当修复率 $\mu(x)$ 为有界函数, 即 $\sup_{x\in[0,\infty)}\mu(x)<+\infty$ 时, 证明了该抽象 Cauchy 问题的主算子生成一个正压缩 C_0-半群, 且该半群对包含该系统初值的一个集合是等距算子, 由此推出了该系统存在唯一的概率瞬态解. 第五步, 当两个部件都故障的概率 λ_1 和修复率 $\mu(x)$ 满足 $\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-\lambda_1 x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x<+\infty$ 时, 0 是该系统的主算子的几何重数为 1 的特征值. 当 $\mu(x)$ 是 Lipschitz 连续并且存在正常数 $\overline{\mu}$ 与 $\underline{\mu}$ 使得 $0<\underline{\mu}\le\mu(x)\le\overline{\mu}<+\infty$ 时, 证明了该系统的主算子生成的 C_0-半群是拟紧算子. 从而当 $\mu(x)$ 是 Lipschitz 连续并且存在正常数 $\overline{\mu}$ 与 $\underline{\mu}$ 使得 $0<\underline{\mu}\le\mu(x)\le\overline{\mu}<+\infty$ 时, 该系统的时间依赖解指数 (一致) 收敛于其稳态解. 此外, 给出了该模型的主算子的共轭算子的表达式并证明了 0 是该共轭算子的几何重数为 1 的特征值. 最后, 讨论了该系统的动态可用度并得到了: 当 $\mu(x)$ 是 Lipschitz 连续并且存在正常数 $\overline{\mu}$ 与 $\underline{\mu}$ 使得 $0<\underline{\mu}\le\mu(x)\le\overline{\mu}<\infty$ 时, 该系统的动态可用度收敛于其稳态可用度. 从而推广了文献[1]的结果. 至今还没有发现该系统的时间依赖解的结构方面的研究. 如果我们研究清楚该系统的时间依赖解的结构, 那么我们能得到该系统的时间依赖解的渐近展开, 数值分析等, 从而给工程技术人员提供理论工具. 而该系统时间依赖解的结构由该系统的主算子的谱分布决定. 因此, 该系统主算子的谱分布研究不仅理论上而且实际中具有重要的意义. 因为文献[2] 研究清楚了该系统的主算子在右半复平面和虚轴上的谱分布: 右半复平面和虚轴上除了 0 点外其他所有点都属于该主算子的豫解集, 0 是该主算子及其共轭算子的几何重数为 1 的特征值, 所以需要研究该系统的主算子在左半复平面中的谱. 本文研究该系统的主算子在左半复平面中的谱分布. 2002年, 李学志等[3]在 Hilbert 空间中研究了有界闭区间上建立的胎次递进人口方程的主算子的谱及其代数重数. 在一定的条件下他们发现了该模型的主算子的特征值满足一个解析函数的零点, 再用解析函数的零点定理证明了在左半复平面中的任何带形区域中该主算子至多有有限多个特征值, 然后讨论了共轭算子的特征值并发现共轭算子的特征值也满足同样的公式, 从而得到了共轭算子的特征值至多有有限多个, 其次讨论了特征值的代数重数并得到了除了有限多个特征值外其他特征值的代数重数为 1, 由此给出了该方程的时间依赖解的渐近展开. 由两个同型部件和一个修理设备组成的系统是在无界区间上建立的、有有限多个一阶偏微分方程构成的方程组[2]. 此外, 根据该系统的物理背景发现该系统只能在非自反的 Banach 空间中讨论[2]. 因此, 文献[3]中的方法不适合本文研究的系统.

本文运用无界区间上的 Riemann-Lebesgue 引理证明: 在一定的条件下该系统的主算子在左半复平面中的任何带形区域至多有有限多个特征值, 且这些特征值的几何重数为 1. 该系统的主算子的共轭算子在左半复平面中的任何带形区域至多有有限多个特征值, 且这些特征值的几何重数为 1. 此外, 结合本文的结果与文献[2]中的结果得到: 0 是该系统的主算子及其共轭算子的严格占优特征值.

根据文献[1]和文献[2], 由两个同型部件和一个修理设备构成的系统由以下方程组描述:

$$\frac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t}=-\lambda_0p_0(t)+\int_0^{+\infty}p_1(x,t)\mu(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

$$\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x}=-(\lambda_1+\mu(x))p_1(x,t) \tag{2}$$

$$\frac{\partial p_2(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial p_2(x,t)}{\partial x}=-\mu(x)p_2(x,t)+\lambda_1p_1(x,t) \tag{3}$$

$$p_1(0,t)=\lambda_0p_0(t)+\int_0^{+\infty}p_2(x,t)\mu(x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

$$p_2(0,t)=0 \tag{5}$$

$$p_0(0)=1,\quad p_1(x,0)=p_2(x,0)=0 \tag{6}$$

其中: $(x,t)\in[0,+\infty)\times[0,+\infty)$; λ_0 表示一个部件故障的概率; λ_1 表示两个部件都故障的概率; $\mu(x)$ 表示修复率, 满足 $\mu(x)\ge0$, $\int_0^{+\infty}\mu(x)\mathrm{d}x=+\infty$; $p_0(t)$ 表示两个部件都完好的概率; $p_1(x,t)$ 表示在时刻 t 系统中一个部件故障并且正在修理的部件已消耗的修理时间为 x 的概率; $p_2(x,t)$ 表示在时刻 t 系统中两个部件都故障并且正在修理的部件已消耗的修理时间为 x 的概率.

本文沿用文献[2]中的记号. 记

$$\Gamma=\begin{pmatrix} e^{-x} & 0 & 0 \\ \lambda_0 e^{-x} & 0 & \mu(x) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

选取状态空间为

$$X=\left\{p\in\mathbb{R}\times L^1[0,+\infty)\times L^1[0,+\infty)\,\middle|\,\|p\|=|p_0|+\sum_{k=1}^{2}\|p_k\|_{L^1[0,+\infty)}\right\}$$

用 Banach 空间的定义不难验证 X 是一个 Banach 空间. 以下定义算子及其定义域.

$$D(\mathcal{A})=\left\{p\in X\,\middle|\,\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}x}\in L^1[0,+\infty),\ k=1,2\\ p_k(x)\ (k=1,2)\text{ 是绝对连续函数}\\ \text{并且满足 } p(0)=\int_0^{+\infty}\Gamma p(x)\mathrm{d}x\end{array}\right.\right\}$$

若对 $p\in D(\mathcal{A})$ 定义

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix}p_0\\p_1\\p_2\end{pmatrix}(x)=\begin{pmatrix}-\lambda_0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-(\lambda_1+\mu(x)) & 0\\ 0 & 0 & -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\mu(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_0\\p_1(x)\\p_2(x)\end{pmatrix}$$

且对 $p\in X$ 定义

$$U\begin{pmatrix}p_0\\p_1\\p_2\end{pmatrix}(x)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&\lambda_1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_0\\p_1(x)\\p_2(x)\end{pmatrix},\quad D(U)=X$$

$$E\begin{pmatrix}p_0\\p_1\\p_2\end{pmatrix}(x)=\begin{pmatrix}\int_0^{+\infty}p_1(x)\mu(x)\mathrm{d}x\\0\\0\end{pmatrix},\quad D(E)=X$$

则方程组 (1)~(6) 可以改写为 Banach 空间 X 中的一个抽象 Cauchy 问题[2]:

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}=(\mathcal{A}+U+E)p(t), & \forall t\in(0,\infty)\\ p(0)=(1,0,0)\end{cases}\tag{7}$$

1 主要结果

引理 1 使函数 $\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-\gamma x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x$ 解析的任何带形区域 $\{\gamma\in\mathbb{C}\mid-\infty<b_1\le\Re\gamma\le b_2\le 0\}$ 中 $\mathcal{A}+U+E$ 至多有有限多个特征值, 并且这些特征值的几何重数为 1, 其中 $\Re\gamma$ 表示 γ 的实部.

证明 考虑特征方程 $(\mathcal{A}+U+E)p=\gamma p$, 即

$$(\gamma+\lambda_0)p_0=\int_0^{+\infty}\mu(x)p_1(x)\mathrm{d}x\tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_1(x)}{\mathrm{d}x}=-(\gamma+\lambda_1+\mu(x))p_1(x)\tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_2(x)}{\mathrm{d}x}=-(\gamma+\mu(x))p_2(x)+\lambda_1p_1(x)\tag{10}$$

$$p_1(0)=\lambda_0p_0+\int_0^{+\infty}\mu(x)p_2(x)\mathrm{d}x\tag{11}$$

$$p_2(0)=0\tag{12}$$

解 (9) 与 (10) 得到

$$p_1(x)=a_1e^{-(\gamma+\lambda_1)x-\int_0^x\mu(\xi)\mathrm{d}\xi} \tag{13}$$

$$p_2(x)=a_2e^{-\gamma x-\int_0^x\mu(\xi)\mathrm{d}\xi}+\lambda_1e^{-\gamma x-\int_0^x\mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\int_0^x p_1(\tau)e^{\gamma\tau+\int_0^\tau\mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\tau \tag{14}$$

合并 (12) 与 (14) 并用 (13) 推出

$$\begin{aligned}p_2(x)&=\lambda_1e^{-\gamma x-\int_0^x\mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\int_0^x p_1(\tau)e^{\gamma\tau+\int_0^\tau\mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\tau\\&=\lambda_1e^{-\gamma x-\int_0^x\mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\int_0^x a_1e^{-\lambda_1\tau}\mathrm{d}\tau\\&=a_1e^{-\gamma x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\left[1-e^{-\lambda_1x}\right]\end{aligned} \tag{15}$$

将 (13) 代入 (8) 有

$$(\gamma+\lambda_0)p_0=a_1\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-(\gamma+\lambda_1)x-\int_0^x\mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}x \tag{16}$$

结合 (13) 与 (11), (15) 并用 (16) 可得

$$\begin{aligned}a_1&=\lambda_0p_0+\int_0^{+\infty}\mu(x)p_2(x)\mathrm{d}x\\&=\lambda_0p_0+a_1\int_0^{+\infty}\mu(x)\left[1-e^{-\lambda_1x}\right]e^{-\gamma x-\int_0^x\mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}x\\&=\lambda_0p_0+a_1\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-\gamma x-\int_0^x\mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}x-a_1\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-(\gamma+\lambda_1)x-\int_0^x\mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}x\\&=\lambda_0p_0+a_1\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-\gamma x-\int_0^x\mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}x-(\gamma+\lambda_0)p_0\\&=a_1\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-\gamma x-\int_0^x\mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}x-\gamma p_0\Rightarrow\\-\gamma p_0&=a_1\left[1-\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-\gamma x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x\right]\end{aligned} \tag{17}$$

若 $p_0=0$, 则由 (16) 知道 $a_1=0$, 从而由 (15) 与 (13) 容易看出 $p(x)=(p_0,p_1(x),p_2(x))=(0,0,0)$, 即 γ 不是特征值. (16) 与 (17) 蕴含

$$p_0=0\Leftrightarrow a_1=0 \tag{18}$$

(16)$\times\gamma$+(17)$\times(\gamma+\lambda_0)$ 给出

$$\begin{aligned}&a_1\gamma\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-(\gamma+\lambda_1)x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x\\&+(\gamma+\lambda_0)a_1\left[1-\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-\gamma x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x\right]=0\Rightarrow\\&a_1\left\{(\gamma+\lambda_0)-(\gamma+\lambda_0)\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-\gamma x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}x\right.\\&\left.+\gamma\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-(\gamma+\lambda_1)x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x\right\}=0\end{aligned} \tag{19}$$

令

$$\begin{aligned}F(\gamma)=(\gamma+\lambda_0)-(\gamma+\lambda_0)&\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-\gamma x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}x\\+\gamma&\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-(\gamma+\lambda_1)x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

则由 (19) 易知

$$F(\gamma)=0\Leftrightarrow a_1\neq 0 \tag{20}$$

由 (13) 与 (15) 估计出

$$\begin{aligned}
\|p\|&=|p_0|+\|p_1\|_{L^1[0,+\infty)}+\|p_2\|_{L^1[0,+\infty)}\\
&=|p_0|+|a_1|\int_0^{+\infty}\left|e^{-(\gamma+\lambda)x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\right|\mathrm{d}x+|a_1|\int_0^{+\infty}\left|\left[1-e^{-\lambda_1 x}\right]e^{-\gamma x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\right|\mathrm{d}x\\
&=|p_0|+|a_1|\left\{\int_0^{+\infty}e^{-(\Re\gamma+\lambda)x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\left[1-e^{-\lambda_1 x}\right]e^{-\Re\gamma x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x\right\}
\end{aligned}\tag{21}$$

由此式与 (18), (20) 知道: 满足 $F(\gamma)=0$ 的 γ 都是 $\mathcal{A}+U+E$ 的特征值. 因为 $F(0)=0$, 所以 $\gamma=0$ 是 $A+U+E$ 的特征值. 这是文献[2]中的结果. 我们发现文献[2]中的条件 $\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-\lambda_1 x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x<+\infty$ 可以去掉, 因为

$$\begin{aligned}
0&\le\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-\lambda_1 x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x\\
&\le\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x=1
\end{aligned}$$

由引理1的条件知道 $F(\gamma)$ 在带形区域 $\Omega=\{\gamma\in\mathbb{C}\mid\gamma=b+ic,\,b_1\le b\le b_2\le 0\}$ 中解析, 所以由解析函数的零点定理得到 $F(\gamma)$ 至多有可数个零点.

以下用反证法证明引理1的结果. 假设 $\mathcal{A}+U+E$ 在带形区域 $\Omega=\{\gamma\in\mathbb{C}\mid\gamma=b+ic,\,b_1\le b\le b_2\le 0\}$ 中有无穷多个特征值, 那么 $F(\gamma)$ 在 Ω 中有无穷多个根, 设这些根 $\gamma_k=b_k+ic_k$, $k\ge 1$, $i^2=-1$. 由 Bolzano-Weierstrass 定理知道存在子列 $\gamma_n=b_n+ic_n$ 使得 $\lim_{n\to\infty}b_n=b_0$, $\lim_{n\to\infty}c_n=\infty$, $F(\gamma_n)=F(b_n+ic_n)=0$, 即

$$\begin{aligned}
&(b_n+ic_n+\lambda_0)-(b_n+ic_n+\lambda_0)\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-(b_n+ic_n)x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}x\\
&+(b_n+ic_n)\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-(b_n+ic_n+\lambda_1)x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}x=0\Rightarrow\\
&b_n+\lambda_0-(b_n+\lambda_0)\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-b_n x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\cos(c_n x)\,\mathrm{d}x-c_n\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-b_n x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\sin(c_n x)\mathrm{d}x\\
&\quad+b_n\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-(b_n+\lambda_1)x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\cos(c_n x)\,\mathrm{d}x+c_n\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-(b_n+\lambda_1)x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\sin(c_n x)\mathrm{d}x\\
&\quad+i\left\{c_n+(b_n+\lambda_0)\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-b_n x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\sin(c_n x)\,\mathrm{d}x-c_n\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-b_n x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\cos(c_n x)\mathrm{d}x\right.\\
&\quad\left.-b_n\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-(b_n+\lambda_1)x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\sin(c_n x)\,\mathrm{d}x+c_n\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-(b_n+\lambda_1)x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\cos(c_n x)\mathrm{d}x\right\}=0\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&b_n+\lambda_0-(b_n+\lambda_0)\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-b_n x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\cos(c_n x)\,\mathrm{d}x-c_n\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-b_n x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\sin(c_n x)\mathrm{d}x\\
&\quad+b_n\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-(b_n+\lambda_1)x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\cos(c_n x)\,\mathrm{d}x+c_n\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-(b_n+\lambda_1)x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\sin(c_n x)\mathrm{d}x=0
\end{aligned}\tag{22}$$

$$\begin{aligned}
&(b_n+\lambda_0)\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-b_n x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\sin(c_n x)\,\mathrm{d}x-b_n\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-(b_n+\lambda_1)x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\sin(c_n x)\mathrm{d}x\\
&\quad+c_n\left\{1-\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-b_n x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\cos(c_n x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-(b_n+\lambda_1)x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\cos(c_n x)\mathrm{d}x\right\}=0
\end{aligned}\tag{23}$$

(23) 的两边取 $n\to\infty$ 的极限, 由 Riemann-Lebesgue 引理得到 $\infty=0$, 矛盾. 这说明 c_n 是有限数, 即 $\gamma_n=b_n+ic_n$ 是有限多个. 由 (13) 与 (15) 容易看出这些特征值的几何重数等于 1.

文献[2] 中给出了 X 的共轭空间

$$X^*=\left\{q^*\in\mathbb{R}\times L^\infty[0,+\infty)\times L^\infty[0,+\infty)\;\middle|\;\begin{array}{c}|||q^*|||=\sup\{|q_0^*|,\|q_1^*\|_{L^\infty[0,+\infty)},\\ \|q_2^*\|_{L^\infty[0,+\infty)}\}\end{array}\right\}$$

它是一个 Banach 空间. $\mathcal{A}+U+E$ 的共轭算子 $(\mathcal{A}+U+E)^*$ 为

$$(\mathcal{A}+U+E)^*(x)=\begin{pmatrix}-\lambda_0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-(\lambda_1+\mu(x)) & \lambda_1\\ 0 & 0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\mu(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_0^*\\ q_1^*(x)\\ q_2^*(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \lambda_0 & 0\\ \mu(x) & 0 & 0\\ 0 & \mu(x) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_0^*\\ q_1^*(0)\\ q_2^*(0)\end{pmatrix}$$

$$D[(\mathcal{A}+U+E)^*]=\left\{q^*\in X^*\ \middle|\ \frac{\mathrm{d}q_i^*(x)}{\mathrm{d}x}\text{存在并且}\ q_1^*(\infty)=q_2^*(\infty)=\alpha\right\}$$

引理 2 使函数 $\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-\gamma x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x$ 解析的任何带形区域 $\{\gamma\in\mathbb{C}\mid-\infty<b_1\le\gamma\le b_2\le 0\}$ 中 $(\mathcal{A}+U+E)^*$ 至多有有限多个特征值并且这些特征值的几何重数为 1.

证明 考虑特征方程 $(\mathcal{A}+U+E)^*q^*=\gamma q^*$. 这等价于

$$(\gamma+\lambda_0)q_0^*=\lambda_0 q_1^*(0)\tag{24}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_1^*(x)}{\mathrm{d}x}=(\gamma+\lambda_1+\mu(x))q_1^*(x)-\lambda_1 q_2^*(x)-\mu(x)q_0^*\tag{25}$$

$$\frac{\mathrm{d}q_2^*(x)}{\mathrm{d}x}=(\gamma+\mu(x))q_2^*(x)-\mu(x)q_1^*(0)\tag{26}$$

$$q_1^*(+\infty)=q_2^*(+\infty)=\alpha\tag{27}$$

解 (26) 得到

$$\begin{aligned}q_2^*(x)=&\,d_2e^{\gamma x+\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\\&-q_1^*(0)e^{\gamma x+\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\int_0^x\mu(\tau)e^{-\gamma\tau-\int_0^\tau\mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{28}$$

首先此式两边同时乘 $e^{-\gamma x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}$, 然后取 $x\to+\infty$ 的极限并用 (27) 推出

$$\begin{aligned}&q_2^*(x)e^{-\gamma x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\\&=d_2-q_1^*(0)\int_0^x\mu(\tau)e^{-\gamma\tau-\int_0^\tau\mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\tau\Rightarrow\\&\lim_{x\to+\infty}q_2^*(x)e^{-\gamma x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\\&=d_2-q_1^*(0)\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\mu(\tau)e^{-\gamma\tau-\int_0^\tau\mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\,\mathrm{d}\tau\Rightarrow\\&d_2=q_1^*(0)\int_0^{+\infty}\mu(\tau)e^{-\gamma\tau-\int_0^\tau\mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{29}$$

将此式代入 (28) 并用积分的区间可加性求出

$$q_2^*(x)=q_1^*(0)e^{\gamma x+\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\int_x^{+\infty}\mu(\tau)e^{-\gamma\tau-\int_0^\tau\mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\tau\tag{30}$$

解 (25) 我们有

$$\begin{aligned}q_1^*(x)=&\,d_1e^{(\gamma+\lambda_1)x+\int_0^x\mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\\&-e^{(\gamma+\lambda_1)x+\int_0^x\mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\int_0^x[\lambda_1q_2^*(\tau)+\mu(\tau)q_0^*]e^{-(\gamma+\lambda_1)\tau-\int_0^\tau\mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{31}$$

首先 (31) 的两边同时乘 $e^{-(\gamma+\lambda_1)x-\int_0^x\mu(\xi)\mathrm{d}\xi}$, 然后取 $x\to+\infty$ 的极限并用 (27) 可得

$$d_1=\int_0^{+\infty}[\lambda_1q_2^*(\tau)+\mu(\tau)q_0^*]e^{-(\gamma+\lambda_1)\tau-\int_0^\tau\mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\tau\tag{32}$$

将 (32) 代入 (31) 并用 (30) 和 Fubini 定理计算出

$$
\begin{aligned}
q_1^*(x) &= e^{(\gamma+\lambda_1)x+\int_0^x \mu(\xi)\mathrm{d}\xi} \int_x^{+\infty} [\lambda_1 q_2^*(\tau)+\mu(\tau)q_0^*] e^{-(\gamma+\lambda_1)x-\int_0^x \mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\tau \\
&= \lambda_1 e^{(\gamma+\lambda_1)x+\int_0^x \mu(\xi)\mathrm{d}\xi} \int_x^{+\infty} q_2^*(\tau) e^{-(\gamma+\lambda_1)\tau-\int_0^\tau \mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\tau \\
&\quad + q_0^* e^{(\gamma+\lambda_1)x+\int_0^x \mu(\xi)\mathrm{d}\xi} \int_x^{+\infty} \mu(\tau) e^{-(\gamma+\lambda_1)\tau-\int_0^\tau \mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\tau \\
&= q_1^*(0)\lambda_1 e^{(\gamma+\lambda_1)x+\int_0^x \mu(\xi)\mathrm{d}\xi} \int_x^{+\infty} e^{-\lambda_1\tau} \int_\tau^{+\infty} \mu(\eta) e^{-\gamma\eta-\int_0^\eta \mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau \\
&\quad + q_0^* e^{(\gamma+\lambda_1)x+\int_0^x \mu(\xi)\mathrm{d}\xi} \int_x^{+\infty} \mu(\tau) e^{-(\gamma+\lambda_1)\tau-\int_0^\tau \mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\tau \\
&= q_1^*(0)\lambda_1 e^{(\gamma+\lambda_1)x+\int_0^x \mu(\xi)\mathrm{d}\xi} \int_x^{+\infty} \int_x^{\eta} \mu(\eta) e^{-\gamma\eta-\int_0^\eta \mu(\xi)\mathrm{d}\xi} e^{-\lambda_1\tau}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\eta \\
&\quad + q_0^* e^{(\gamma+\lambda_1)x+\int_0^x \mu(\xi)\mathrm{d}\xi} \int_x^{+\infty} \mu(\tau) e^{-(\gamma+\lambda_1)\tau-\int_0^\tau \mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\tau \\
&= q_1^*(0) e^{(\gamma+\lambda_1)x+\int_0^x \mu(\xi)\mathrm{d}\xi} \int_x^{+\infty} \left[e^{-\lambda_1 x}-e^{-\lambda_1\eta}\right] \mu(\eta) e^{-\gamma\eta-\int_0^\eta \mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\eta \\
&\quad + q_0^* e^{(\gamma+\lambda_1)x+\int_0^x \mu(\xi)\mathrm{d}\xi} \int_x^{+\infty} \mu(\tau) e^{-(\gamma+\lambda_1)\tau-\int_0^\tau \mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\tau \\
&= q_1^*(0) e^{\gamma x+\int_0^x \mu(\xi)\mathrm{d}\xi} \int_x^{+\infty} \mu(\eta) e^{-\gamma\eta-\int_0^\eta \mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\eta \\
&\quad - q_1^*(0) e^{(\gamma+\lambda_1)x+\int_0^x \mu(\xi)\mathrm{d}\xi} \int_x^{+\infty} \mu(\eta) e^{-(\gamma+\lambda_1)\eta-\int_0^\eta \mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\eta \\
&\quad + q_0^* e^{(\gamma+\lambda_1)x+\int_0^x \mu(\xi)\mathrm{d}\xi} \int_x^{+\infty} \mu(\tau) e^{-(\gamma+\lambda_1)\tau-\int_0^\tau \mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\tau
\end{aligned} \tag{33}
$$

此式蕴含

$$
\begin{aligned}
q_1^*(0) &= q_1^*(0) \int_0^{+\infty} \mu(x) e^{-\gamma x-\int_0^x \mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x \\
&\quad - q_1^*(0) \int_0^{+\infty} \mu(x) e^{-(\gamma+\lambda_1)x-\int_0^x \mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x + q_0^* \int_0^{+\infty} \mu(x) e^{-(\gamma+\lambda_1)x-\int_0^x \mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x \Rightarrow \\
& q_1^*(0)\left\{1-\int_0^{+\infty} \mu(x) e^{-\gamma x-\int_0^x \mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \mu(x) e^{-(\gamma+\lambda_1)x-\int_0^x \mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x\right\} \\
&= q_0^* \int_0^{+\infty} \mu(x) e^{-(\gamma+\lambda_1)x-\int_0^x \mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{34}
$$

$(34)\times(\gamma+\lambda_0)-(24)\times\int_0^{+\infty} \mu(x) e^{-(\gamma+\lambda_1)x-\int_0^x \mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x$ 给出

$$
\begin{aligned}
&(\gamma+\lambda_0)q_1^*(0)\left\{1-\int_0^{+\infty} \mu(x) e^{-\gamma x-\int_0^x \mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \mu(x) e^{-(\gamma+\lambda_1)x-\int_0^x \mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x\right\} \\
&\quad -\lambda_0 q_1^*(0) \int_0^{+\infty} \mu(x) e^{-(\gamma+\lambda_1)x-\int_0^x \mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \\
&q_1^*(0)\left\{\gamma+\lambda_0-(\gamma+\lambda_0)\int_0^{+\infty} \mu(x) e^{-\gamma x-\int_0^x \mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x + \gamma\int_0^{+\infty} \mu(x) e^{-(\gamma+\lambda_1)x-\int_0^x \mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x\right\} = 0 \Rightarrow \\
&q_1^*(0)F(\gamma) = 0 \Rightarrow q_1^*(0) \neq 0 \Leftrightarrow F(\gamma) = 0
\end{aligned} \tag{35}
$$

由 (30) 与 (33) 估计出

$$
\|q_2^*\|_{L^\infty[0,+\infty)} \le |q_1^*(0)| \sup_{x\in[0,+\infty)} e^{\Re\gamma x+\int_0^x \mu(\tau)\mathrm{d}\tau} \int_x^{+\infty} \mu(\tau) e^{-\Re\gamma\tau-\int_0^\tau \mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\tau \tag{36}
$$

$$\begin{aligned}\|q_1^*\|_{L^1[0,+\infty)} \le |q_1^*(0)| \sup_{x\in[0,+\infty)} \Big[& e^{\Re\gamma x+\int_0^x \mu(\tau)\mathrm{d}\tau} \int_x^{+\infty} \mu(\eta) e^{-\Re\gamma\eta-\int_0^\eta \mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\eta \\ & + e^{(\Re\gamma+\lambda_1)x+\int_0^x \mu(\tau)\mathrm{d}\tau} \int_x^{+\infty} \mu(\eta) e^{-(\Re\gamma+\lambda_1)\eta-\int_0^\eta \mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\eta \Big] \\ & + |q_0^*| \sup_{x\in[0,+\infty)} e^{(\Re\gamma+\lambda_1)x+\int_0^x \mu(\xi)\mathrm{d}\xi} \int_x^{+\infty} \mu(\tau) e^{-(\Re\gamma+\lambda_1)\tau-\int_0^\tau \mu(\xi)\mathrm{d}\xi}\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{37}$$

由 (36), (37), (35) 与 (24) 知道: 满足 $F(\gamma)=0$ 的所有 γ 都是 $(\mathcal{A}+U+E)^*$ 的特征值. 用引理 1 的方法得到 $F(\gamma)$ 在带形区域 $\{\gamma\in\mathbb{C}\mid -\infty<b_1\le\gamma\le b_2\le 0\}$ 中至多有有限多个根, 即 $(\mathcal{A}+U+E)^*$ 至多有有限多个特征值. 此外, 由 (24), (30), (33) 易知每个特征值的几何重数为 1.

综合以上两个引理与文献[2]得到本文的主要结果:

定理 1 (1) 使函数 $\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-\gamma x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x$ 解析的任何带形区域 $\{\gamma\in\mathbb{C}\mid -\infty<b_1\le\Re\gamma\le b_2\le 0\}$ 中 $\mathcal{A}+U+E$ 至多有有限多个特征值并且这些特征值的几何重数为 1.

(2) 使函数 $\int_0^{+\infty}\mu(x)e^{-\gamma x-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x$ 解析的任何带形区域 $\{\gamma\in\mathbb{C}\mid -\infty<b_1\le\Re\gamma\le b_2\le 0\}$ 中 $(\mathcal{A}+U+E)^*$ 至多有有限多个特征值并且这些特征值的几何重数为 1.

(3) 0 是 $\mathcal{A}+U+E$ 的严格占优特征值.

(4) 0 是 $(\mathcal{A}+U+E)^*$ 的严格占优特征值.

注解 1 如果存在正常数 $\underline{\mu}$ 与 $\overline{\mu}$ 使得 $0<\underline{\mu}\le\mu(x)\le\overline{\mu}<+\infty$, 那么 $F(\gamma)$ 在 $\{\gamma\in\mathbb{C}\mid\Re\gamma>-\underline{\mu}\}$ 内解析. 从而, 由定理 1 知道 $\mathcal{A}+U+E$ 与 $(\mathcal{A}+U+E)^*$ 在带形区域 $\{\gamma\in\mathbb{C}\mid -\underline{\mu}<\Re\gamma\le 0\}$ 中至多有有限多个特征值并且这些特征值的几何重数为 1.

定理 1 的思想和方法对有限多个偏微分方程描述的可靠性模型[4−6]适用, 对无穷多个偏微分方程描述的可靠性模型[7−8]和排队模型[9]不适用.

参考文献:

[1] 曹晋华, 程侃. 可靠性数学引论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.

[2] 艾尼·吾甫尔. 可靠性理论中的数学方法[M]. 北京: 科学出版社, 2020.

[3] LI X Z, GUPUR G, YU J Y, et al. The index of the complex eigenvalues of parity progressive population operator[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002, 268: 466-483.

[4] HU W W. Differentiability and compactness of the C_0-semigroup generated by the repairable system with finite repair time[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2016, 433: 1614-1625.

[5] 汪文珑, 许跟起. 具有一组可修复设备的系统解的适定性和稳定性[J]. 高校应用数学学报, 2007, 22(4): 474-482.

[6] 徐厚宝, 刘合拢, 朱广田. 可修复系统解的适定性及最优检测时间[J]. 系统科学与数学, 2008, 28(3): 265-274.

[7] GUPUR G. Functional analysis methods for reliability models[M]. Basel: Springer, 2011.

[8] GUPUR G. Point spectrum of the operator corresponding to a reliability model and application[J]. Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications, 2016, 7(3): 411-429.

[9] YIMING N, GUPUR G. Spectrum of the operator corresponding to the M/M/1 queueing model with vacations and multiple phases of operation and application[J]. Acta Mathematica Sinica-English Series, 2020, 36(10): 1183-1202.

责任编辑：赵新科