二次损失函数下B-F准备金的信度估计*

王金瑞，邹敏雪，李智明，吴黎军†

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830046)

摘 要：在B-F准备金模型中, 事故年索赔均值的估计至关重要，而传统B-F模型准备金的估计依赖于精算师的先验估计，具有一定的主观性. 本文利用信度理论对事故年索赔均值进行估计，得到二次损失函数下事故年索赔均值的信度估计. 该方法与传统的B-F估计和链梯法估计进行比较，结果表明二次损失函数下B-F准备金的信度估计是可行的.

关键词：链梯法；B-F法；二次损失函数；信度估计

DOI：10.13568/j.cnki.651094.651316.2020.03.09.0001

中图分类号：O242.2 **文献标识码**：A **文章编号**：2096-7675(2021)02-0153-06

引文格式：王金瑞, 邹敏雪, 李智明, 等. 二次损失函数下B-F准备金的信度估计[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2021, 38(2): 153-158.

英文引文格式：WANG J R, ZOU M X, LI Z M, et al. Reliability estimation of B-F reserve under quadratic loss function[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2021, 38(2): 153-158.

Reliability Estimation of B-F Reserve under Quadratic Loss Function

WANG Jinrui, ZOU Minxue, LI Zhiming, WU Lijun

(*School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830046, China*)

Abstract： In the B-F reserve model, the estimation of the average annual accident claim is very important, while the estimation of the traditional B-F reserve model relies on the prior estimation of actuaries and has certain subjectivity. This paper estimates the average annual accident claim by using the reliability theory, and obtains the reliability estimation of the average annual accident claim under the quadratic loss function. Compared with the traditional B-F estimation and the chain ladder estimation, the results show that the reliability estimation of the B-F reserve under the quadratic loss function is feasible.

Key words： Chain ladder method; B-F method; quadratic loss function; reliability estimation

0 引 言

索赔准备金是保险公司对已发生的事故没有及时报告，或虽已及时报告, 但保险公司由于各种原因在年末没有及时索赔，那么保险公司只有恰当的估计索赔准备金才有足够的资金支付将来的赔款. 最常见的准备金估计方法是无分布链梯法[1] 和B-F法[2]. 链梯法具有“平均”和“稳定”的基本思想，它依据流量三角形各列的比例关系来外推未来的赔款数据. 考虑一个保单组合，以年为单位，假设现在是I年，设C_{ij}表示第i事故年发生的赔案到第j进展年的累计赔款. 在链梯法中，设f_j表示进展年的链梯因子，在索赔事件中满足$E(C_{i,j+1}|C_{i0},C_{i1},C_{i2},\cdots,C_{ij})=f_jC_{ij}$, 计算得到链梯因子$f_j$，从而得到准备金的估计. 而B-F模型中，假设各事故年的索赔是相互独立的，且索赔发展方式β_i采用链梯法估计. 令$\gamma_j=\beta_j-\beta_{j-1}$, 假设存在$\mu_i$, 有$E(C_{i,j}|C_{i0},C_{i1},C_{i2},\cdots,C_{ij})=C_{ij}+\gamma_j\mu_i$. 利用上式，得到准备金的估计. B-F法依赖于给定先验信息得到准备金的估计，并将链梯法和赔付率法相互结合. 在B-F模型中，大都根据先验估计$\hat{\mu}_i$来计算，如Verral和England[3]，Neuhaus[4], Alai等[5]. 由于先验估计具有一定的主观性，需要采用其他方式估计μ_i，参阅腾叶和吴黎军[6]，Buhlmann和Gisler[7] 等. 假设事故年索赔均值为一个随机变量，利用索赔的损失数据以及先验分布，建立贝叶斯统计模型. 若μ_i存在某个先验分布$\pi(\mu)$. 利用索赔数据D_I以及先验分布进行推断. 为了使估计量不依赖于先验分布$\pi(\mu)$，本文根据信度理论，将$\hat{\mu}_i$ 限定在样

* 收稿日期：2020-03-09
基金项目：国家自然科学基金（U1703237），新疆维吾尔自治区自然科学基金(XJEDU2017M001).
作者简介：王金瑞(1995-)，女，硕士生，从事非寿险精算的研究，E-mail：1023348518@qq.com.
† 通讯作者：吴黎军(1961-)，男，教授，从事非寿险精算的研究，E-mail: xjmath@xju.edu.cn.

本的线性函数中，在二次损失函数下得到损失以及责任准备金的估计，与章溢等[8]的结论进行对比，二次损失函数下的准备金估计是可行的.

1 随机B-F模型中事故年索赔均值的信度估计

考虑一个保单，以年做时间单位；假定现在是I年，从事故发生到结案的最大延迟时间为J. 在累计流量三角形$D_I=\{C_{ij},i+j\le I\}$中，列表示第i事故发生年，行表示第j进展年, 交叉项的元素C_{ij}表示第i事故年发生的赔案到第j进展年的累计赔款. 令$X_{ij}=C_{ij}-C_{i,j-1}$, 它为第i事故年在延迟j年后的赔款增量. 显然，$D_I=\{C_{ij},i+j\le I\}=\{X_{ij},i+j\le I\}$, 所组成的上三角形叫做增量三角形. 因此，根据累积流量上三角形中已知的数据对下三角形数据进行估计，得到每一个事故年的终极损失C_{iJ}，预测当年提取的准备金$R_i=C_{iJ}-C_{ij}$，详细请参考文献[8].

在B-F模型中，假设各事故年的索赔相互独立，且存在参数$\mu_0,\ \mu_1,\ \cdots,\ \mu_I>0$，以及索赔方式$\beta_0,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_J>0$，且$\beta_J=1$，有$E(C_{ij})=\mu_i\beta_j$，从而得到以下索赔方式：$\hat{C}_{i,J}^{BF}=\hat{E}(\mu_i|D_I)=C_{i,I-i}+(1-\hat{\beta}_{I-i})\hat{\mu}_i$. 其中$\beta_j$采用链梯法估计, 即$\beta_j=\prod\limits_{k=j}^{J-1}\hat{f}_k^{-1}$，其中的估计为$\widehat{f}_j=\sum\limits_{i=0}^{I-j-1}C_{i,j+1}/\sum\limits_{i=0}^{I-j-1}C_{i,j}$，而事故年$\mu_i$采用先验估计$\hat{\mu}_i$.

在本文中, 假设μ_i为随机变量，则条件期望$E(C_{ij}|\mu_i)=\mu_i\beta_j$. 记$\mu=(\mu_0,\cdots,\mu_I),\gamma_j=\beta_j-\beta_{j-1}$, 则$E(X_{ij}|\mu_i)=\mu_i\gamma_j$，等价于$E(\frac{X_{ij}}{\gamma_j}|\mu_i)=\mu_i$，其中$i=0,1,\cdots,I$和$j=0,1,\cdots,J$. 方便起见，令$Y_{ij}=\frac{X_{ij}}{\gamma_j}$. 为了估计事故年均值$\mu_i$, 在一些假设下，本文建立一个随机B-F准备金模型.

假设1 对任意的$0\le i\le I,0\le j,k\le J$且$j\ne k$，有

$$E(Y_{ij}|\mu)=\mu_i,\quad Var(Y_{ij}|\mu)=\sigma^2(\mu_i),\quad Cov(Y_{ij},Y_{ik}|\mu)=0.$$

假设2 假设$\mu_i(i=0,1,\cdots,I)$是相互独立的随机变量，且有相同的先验分布$\pi(\mu)$, 其中$E(\mu_i)=\mu_0,E(\sigma^2(\mu_i))=\sigma_0^2$, 若$\sigma_0^2$未知，其估计$\hat{\sigma}_0^2$请参考文献[8].

假设3 不同的事故年索赔相互独立. 称满足假设1～3的模型为随机B-F模型.

引理1 (章溢等[8]) 在随机B-F模型中，平方损失的条件期望$E[C_{i,J}-g(D_I)]^2$ 达到最小的终极损失$C_{i,J}$的最优预测为

$$\hat{C}_{i,J}^*=C_{i,I-i}+(1-\hat{\beta}_{I-i})E(\mu_i|D_I). \tag{1}$$

为了得到损失C_{iJ}的估计，首先求解$E(\mu_i|D_I)$, 根据信度理论[2] 的方法，把μ_i限定在二次损失函数下，求解其值.

引理2 (章溢等[8]) 设Y是随机变量，令$X=(X_1,\cdots,X_n)'$与$Z=(Z_1,\cdots,Z_m)'$为随机向量，且X与Z 相互独立，且Y与Z也相互独立，则

$$pro(Y|L(X,Z,1))=pro(Y|L(X,1)), \tag{2}$$

其中: $L(X,1)=\{a+\sum\limits_{i=0}^{I}\sum\limits_{j=0}^{I-i}a_{ij}X_{ij},a,a_{ij}\in R\}$为所有$X$的非齐次线性函数，$pro(Y|L(X,1))$为线性空间$L(X,1)$上的非齐次正交投影.

2 二次损失函数下事故年索赔均值的信度估计

由于$\mu_i(i=0,1,\cdots,I)$是相互独立的随机变量，且有相同的先验分布$\pi(\mu)$, 为了不考虑先验分布的影响，本文根据信度理论，将事故年均值μ_i 的信度估计限定在线性函数中，采用二次损失函数来进行估计，以得到较为准确的估计.

假设4 在随机B-F模型中, 取二次损失函数为$F(\hat{\mu}_i,\mu_i)$为

$$F(\hat{\mu}_i,\mu_i)=\frac{(\hat{\mu}_i-\mu_i)^2}{\mu_i^2},$$

令$E(\frac{1}{\mu_i})=m_i,E(\frac{1}{\mu_i^2})=n_i,\ Cov(\frac{1}{\mu_i},\mu_i)=\alpha_i,\ Cov(\frac{1}{\mu_i^2},\mu_i)=u_i,\ E(\frac{\sigma^2(\mu_i)}{\mu_i^2})=n_i\sigma_0^2$.

假设5 将$\hat{\mu}_i$的信度估计限定在线性函数中，则$\hat{\mu}_i=a+\sum\limits_{j=0}^{I-i}a_{ij}Y_{ij}$的信度估计就变成了求解下述最小化问题.

$$arg\min_{\hat{\mu}_i=a+\sum_{j=0}^{I-i}a_{ij}Y_{ij}} E[F(\hat{\mu}_i,\mu_i)].$$

引理3 下列式子成立：

$$Cov(\frac{1}{\mu_i},Y_{ij})=\alpha_i, Cov(\frac{1}{\mu_i^2},Y_{ij})=u_i,$$

$$Cov(\frac{1}{\mu_i^2}Y_{ik},Y_{ij})=\begin{cases} n_i\sigma_0^2+\alpha_i, k=j. \\ \alpha_i, \qquad k\neq j. \end{cases}$$

证明 在给定μ的条件下，根据引理2，由条件协方差公式，得

$$\begin{aligned} Cov(\frac{1}{\mu_i},Y_{ij}) &= E[Cov(\frac{1}{\mu_i},Y_{ij}|\mu)]+Cov[E(\frac{1}{\mu_i}|\mu),E(Y_{ij}|\mu)] \\ &= Cov(\frac{1}{\mu_i},\mu_i)=\alpha_i, \\ Cov(\frac{1}{\mu_i^2},Y_{ij}) &= E[Cov(\frac{1}{\mu_i^2},Y_{ij}|\mu)]+Cov[E(\frac{1}{\mu_i^2}|\mu),E(Y_{ij}|\mu)] \\ &= Cov(\frac{1}{\mu_i^2},\mu_i)=u_i, \\ Cov(\frac{1}{\mu_i^2}Y_{ik},Y_{ij}) &= E[Cov(\frac{1}{\mu_i^2}Y_{ik},Y_{ij}|\mu)]+Cov[E(\frac{1}{\mu_i^2}Y_{ik}|\mu),E(Y_{ij}|\mu)] \\ &= E[\frac{1}{\mu_i^2}Cov(Y_{ik},Y_{ij}|\mu)]+Cov(\frac{1}{\mu_i},\mu_i). \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} E[\frac{1}{\mu_i^2}Cov(Y_{ik},Y_{ij}|\mu)] &= \begin{cases} E(\frac{\sigma^2(\mu_i)}{\mu_i^2}), & j=k. \\ 0, & j\neq k. \end{cases} \\ &= \begin{cases} n_i\sigma_0^2, & j=k. \\ 0, & j\neq k. \end{cases} \end{aligned}$$

所以

$$Cov(\frac{1}{\mu_i^2}Y_{ik},Y_{ij})=\begin{cases} n_i\sigma_0^2+\alpha_i, & j=k. \\ \alpha_i, & j\neq k. \end{cases}$$

定理1 若假设1~3成立, 则$\hat{\mu}_i$在二次损失函数下的信度估计为

$$\hat{\mu}_i^{\text{cred}}=(1-Z_i)\mu_i^q+Z_i\hat{P}_i,$$

其中:

$$Z_i=\frac{(I-i)(n_i\alpha_i-m_iu_i)}{n_in_i\sigma_0^2+(I-i)(n_i\alpha_i-m_iu_i)},\ \mu_i^q=\frac{m_i}{n_i},\ \hat{P}_i=\frac{1}{I-i}\sum_{k=0}^{I-i}\frac{X_{ik}}{r_k}.$$

证明 由假设5可知, 求$\hat{\mu}_i^{\text{cred}}$相当于求最小化问题，

$$arg\min_{\hat{\mu}_i=a+\sum_{j=0}^{I-i}a_{ij}Y_{ij}} E[F(\hat{\mu}_i,\mu_i)]$$

的解. 令$Q=E[F(\hat{\mu}_i,\mu_i)]$. 由假设3，可得：

$$Q=E[F(\hat{\mu}_i,\mu_i)]=E[F(a+\sum_{j=0}^{I-i}a_{ij}Y_{ij},\mu_i)]=E\left[\frac{(a+\sum\limits_{j=0}^{I-i}a_{ij}Y_{ij}-\mu_i)^2}{\mu_i^2}\right].$$

令 $\frac{\partial Q}{\partial a}=0$，得

$$aE\left[\frac{1}{\mu_i^2}\right]=E\left[\frac{1}{\mu_i}\right]-\sum_{j=0}^{I-i}a_{ij}E\left[Y_{ij}\frac{1}{\mu_i^2}\right]. \tag{3}$$

令 $\frac{\partial Q}{\partial a_{ik}}=0$，得

$$aE\left[\frac{Y_{ik}}{\mu_i^2}\right]=E\left[\frac{Y_{ik}}{\mu_i}\right]-\sum_{j=0}^{I-i}a_{ij}E\left[\frac{Y_{ij}Y_{ik}}{\mu_i^2}\right]. \tag{4}$$

根据(3)×$E[Y_{ik}]$-(4)，有

$$Cov(\frac{1}{\mu_i},Y_{ik})=aCov(\frac{1}{\mu_i^2},Y_{ik})+\sum_{j=0}^{I-i}a_{ij}Cov(\frac{Y_{ij}}{\mu_i^2},Y_{ik}).$$

根据引理3，知

$$\alpha_i=au_i+\sum_{j=0,j\neq k}^{I-i}a_{ij}\alpha_i+a_{ik}(\alpha_i+n_i\sigma_0^2), \tag{5}$$

所以

$$a_{ik}=\frac{\alpha_i-au_i-\sum\limits_{j=0}^{I-i}a_{ij}\alpha_i}{n_i\sigma_0^2}.$$

对上式两边求和，

$$\sum_{k=0}^{I-i}a_{ik}=(I-i)\frac{\alpha_i-au_i-\sum\limits_{j=0}^{I-i}a_{ij}\alpha_i}{n_i\sigma_0^2}.$$

由(4)式和(5)式，可得

$$a=\frac{m_i}{n_i}(1-\sum_{j=0}^{I-i}a_{ij}), \tag{6}$$

则

$$\sum_{k=0}^{I-i}a_{ik}=\frac{(I-i)(n_i\alpha_i-m_iu_i)}{n_in_i\sigma_0^2+(I-i)(n_i\alpha_i-m_iu_i)}.$$

由于

$$a_{ik}Y_{ik}=\frac{\alpha_i-au_i-\sum\limits_{j=0}^{I-i}a_{ij}\alpha_i}{n_i\sigma_0^2}Y_{ik}.$$

对上式两边求和，得

$$\sum_{k=0}^{I-i}a_{ik}Y_{ik}=\frac{(n_i\alpha_i-m_iu_i)}{n_in_i\sigma_0^2+(I-i)(n_i\alpha_i-m_iu_i)}\sum_{k=0}^{I-i}\frac{X_{ik}}{r_k}. \tag{7}$$

由假设5，可知

$$\hat{\mu}_i^{\text{cred}}=a+\sum_{j=0}^{I-i}a_{ij}Y_{ij},$$

结合(6)式和(7)式可以得到

$$\hat{\mu}_i^{\text{cred}}=\frac{m_i}{n_i}(1-\sum_{j=0}^{I-i}a_{ij})+\frac{(n_i\alpha_i-m_iu_i)}{n_in_i\sigma_0^2+(I-i)(n_i\alpha_i-m_iu_i)}\sum_{k=0}^{I-i}\frac{X_{ik}}{r_k}$$

$$=(1-\tfrac{(I-i)(n_i\alpha_i-m_iu_i)}{n_in_i\sigma_0^2+(I-i)(n_i\alpha_i-m_iu_i)})\tfrac{m_i}{n_i}+\tfrac{(n_i\alpha_i-m_iu_i)}{n_in_i\sigma_0^2+(I-i)(n_i\alpha_i-m_iu_i)}\sum_{k=0}^{I-i}\tfrac{X_{ik}}{r_k}$$

$$=(1-\tfrac{(I-i)(n_i\alpha_i-m_iu_i)}{n_in_i\sigma_0^2+(I-i)(n_i\alpha_i-m_iu_i)})\tfrac{m_i}{n_i}+\tfrac{(I-i)(n_i\alpha_i-m_iu_i)}{n_in_i\sigma_0^2+(I-i)(n_i\alpha_i-m_iu_i)}\tfrac{1}{I-i}\sum_{k=0}^{I-i}\tfrac{X_{ik}}{r_k}$$

记$Z_i=\frac{(I-i)(n_i\alpha_i-m_iu_i)}{n_in_i\sigma_0^2+(I-i)(n_i\alpha_i-m_iu_i)},\mu_i^q=\frac{m_i}{n_i},\hat{P}_i=\frac{1}{I-i}\sum\limits_{k=0}^{I-i}\frac{X_{ik}}{r_k}$，则在二次损失函数下，$\mu_i$的最优信度预测可表示为

$$\hat{\mu}_i^{\text{cred}}=(1-Z_i)\mu_i^q+Z_i\hat{P}_i. \tag{8}$$

根据引理1，可得损失$C_{i,J}$的最优预测

$$\hat{C}_{i,J}^{\exp}=C_{i,I-i}+(1-\hat{\beta}_{I-i})((1-Z_i)\mu_i^q+Z_i\hat{P}_i). \tag{9}$$

由于第i事故年的责任准备金的信度估计为$\hat{R}_i^{\exp}=\hat{C}_{i,J}^{\exp}-C_{i,I-i}$，则

$$\hat{R}_i^{\exp}=(1-\hat{\beta}_{I-i})((1-Z_i)\mu_i^q+Z_i\hat{P}_i). \tag{10}$$

总准备金的信度估计$\hat{R}^{\exp}=\sum\limits_{i=0}^{I}\hat{R}_i^{\exp}$，则

$$\hat{R}^{\exp}=\sum_{i=0}^{I}[(1-\hat{\beta}_{I-i})((1-Z_i)\mu_i^q+Z_i\hat{P}_i)]. \tag{11}$$

3　实例与分析

本文采用某公司实际数据，针对上述结果进行数据拟合及分析，数据来源于文献[5]，如表1所示.

表 1　观察到的增量索赔X_{ij}

Tab 1　Observed incremental claim X_{ij}

事故年	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	5 946 975	3 721 237	895 717	207 760	206 704	62 124	65 813	14 850	11 130	15 813
1	6 346 756	3 246 406	723 222	151 797	67 824	36 603	52 752	11 186	11 646	
2	6 269 090	2 976 233	847 053	262 768	152 703	65 444	53 545	8 924		
3	5 863 015	2 683 224	722 532	190 653	132 976	88 340	43 329			
4	5 778 885	2 745 229	653 894	273 395	230 288	105 224				
5	6 184 793	2 828 338	572 765	244 899	104 957					
6	5 600 184	2 893 207	563 114	225 517						
7	5 288 066	2 440 103	528 043							
8	5 290 793	2 357 936								
9	5 675 568									

根据(9)式可以求得二次损失函数下的损失$C_{i,J}$的最优预测，就是表中$\hat{C}_{iJ}^{\exp *}$，通过(10)式可以算的第i事故年的责任准备金，得到表中数据$\hat{R}_{iJ}^{\exp *}$；对比传统B-F法、链梯法，二次损失函数下随机B-F法的信度估计，得到结果如表2所示.

表 2 B-F法、链梯法、信度估计法下的准备金估计比较

Tab 2 Comparison of reserve estimation under B-F method, chain ladder method and reliability estimation method

事故年	先验估计*	损失估计			损失准备金估计		
i	$\hat{\mu}_i$	$\hat{C}_{iJ}^{\mathrm{BF}}$	$\hat{C}_{iJ}^{\mathrm{CL}}$	$\hat{C}_{iJ}^{\exp*}$	$\hat{R}_{iJ}^{\mathrm{BF}}$	$\hat{R}_{iJ}^{\mathrm{CL}}$	$\hat{R}_{iJ}^{\exp*}$
0	11 653 101	11 148 123	11 148 123	11 148 123	0	0	0
1	11 367 306	10 664 316	10 663 318	10 658 418	16 124	13 226.27	10 225.98
2	10 962 965	10 662 749	10 662 008	10 660 967	26 998	25 749.54	25 207.47
3	10 616 762	9 761 643	9 758 606	9 757 928	37 575	35 298.42	33 859.18
4	11 044 881	9 882 350	9 872 218	9 882 410	95 434	99 568.73	95 495.07
5	11 480 700	10 113 777	10 092 247	10 074 834	178 024	150 648.41	139 081.5
6	11 413 572	9 623 328	9 568 143	9 562 250	341 305	293 238.44	280 227.9
7	11 126 527	8 830 301	8 705 378	8 684 439	574 089	477 442.86	428 227.3
8	10 986 548	8 967 375	8 691 971	8 669 442	1 318 646	1 142 349.78	1 020 713
9	11 618 437	10 443 953	9 626 383	9 626 376	4 768 384	4 129 950.96	3 950 808
				合计	7 356 579	6 367 473.41	5 983 845

注：*为文献[5]中某保险公司精算师给出的期望均值$\hat{\mu}_i$的先验估计.

通过观察表2合计一行，发现B-F法得到的总准备金是最大的，这是由于在经典的B-F方法中，$\hat{C}_{i,J}^{BF}=C_{i,I-i}+(1-\hat{\beta}_{I-i})\hat{\mu}_i$.计算$\hat{C}_{i,J}^{BF}$主要依赖于精算师给出的先验估计$\hat{\mu}_i$，当先验估计$\hat{\mu}_i$较大，所得到的总准备金额就会较大，故具有一定的主观性；而链梯法依靠所有的样本信息，得到的数值介于B-F法与二次损失函数下的信度估计之间. 当B-F给出的先验估计等于链梯法中所求的μ_i时，B-F法和链梯法所求的估计值相同. 通过观察索赔增量表，发现数据具有非平稳状态时，二次损失函数下的信度估计得到的准备金较小，由于二次损失函数下的B-F准备金的信度估计不仅采用所有的先验样本信息，且不依赖于先验分布, 所以能够在实际中得到较为准确的估计.

参考文献:

[1] MACK T. Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve reserve estimates[J]. ASTIN Bulletin, 1993, 23(2): 213-225.

[2] BORNHUETTER R L, FERGUSON R E. The actuary and IBNR[J]. Proc CAS, 1972(1): 181-195.

[3] VERRALL R J, ENGLAND P D. Incorporating expert opinion into a stochastic model for the chain-ladder technique[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2005, 37(2): 355-370.

[4] NEUHAUS W. Another pragmatic loss reserving method or Bornhuetter-Ferguson revisited[J]. Scand Act J, 1992: 151-162.

[5] ALAI D H, MERZ M, WÜTHRICH M V. Mean square error of prediction in the Bornhuetter-Ferguson claim reserving method[J]. Annals of Actuarial Science, 2009, 4(1): 7-31.

[6] 腾叶, 吴黎军. 指数保费原理下的双相依信度保费[J]. 高校应用数学学报(A 辑), 2013, 28(4): 417-423.
TENG Y, WU L J. Double dependency reliability premium based on exponential premium principle[J]. Journal of Applied Mathematics of Colleges and Universities (A), 2013, 28(4): 417-423.(in Chinese)

[7] BÜHLMANN H, GISLER A. A course in credibility theory and its applications[M]. Netherlands：Springer, 2005.

[8] 章溢, 温利民, 王江峰, 等. 随机B-F准备金模型中事故年索赔均值的信度估计[J]. 应用数学学报, 2016, 39(2): 306-320.
ZHANG Y, WEN L M, WANG J F, et al. Reliability estimation of the mean value of annual accident claims in stochastic b-f reserve model[J]. Journal of Applied Mathematics, 2016, 39(2): 306-320.(in Chinese)

责任编辑：赵新科