

广义太阳图与路的笛卡儿积图的任意可分性*

西日尼阿依·努尔麦麦提, 张盼盼, 刘凤霞[†], 孟吉翔

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830046)

摘要: 给定 n 个顶点的图 G . 如果对于 n 的满足 $\sum_{i=1}^k n_i = n$ 的任意一个正整数序列 $\tau = (n_1, n_2, \dots, n_k)$, 都存在顶点集 $V(G)$ 的划分 (V_1, V_2, \dots, V_k) 满足 $|V_i| = n_i$, 并且 V_i 导出的子图 $G[V_i]$ 是连通的, 其中 $1 \leq i \leq k$, 则称图 G 是任意可分图(简称为AP). 我们用 $S^{**} = S(n; k_1, k_2, \dots, k_n)$ 来表示一类广义太阳图. 本文主要讨论图类 $S^{**} \square P_m$ 的任意可分性.

关键词: 任意可分图; 笛卡儿积图; 广义太阳图; 可迹图

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2020.09.23.0002

中图分类号: O157.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2021)05-0549-07

引文格式: 西日尼阿依·努尔麦麦提, 张盼盼, 刘凤霞, 等. 广义太阳图与路的笛卡儿积图的任意可分性[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2021, 38(5): 549-555.

英文引文格式: Xirinay Nurmamat, ZHANG P P, LIU F X, et al. Partitioning the cartesian product of generalized sun-like graph and path[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2021, 38(5): 549-555.

Partitioning the Cartesian Product of Generalized Sun-Like Graph and Path

Xirinay Nurmamat, ZHANG Panpan, LIU Fengxia, MENG Jixiang

(School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830046, China)

Abstract: An n -vertex graph G is called arbitrarily partitionable (AP, for short), if for any sequence $\tau = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ of positive integers such that $\sum_{i=1}^k n_i = n$, there exists a partition (V_1, V_2, \dots, V_k) of the vertex set $V(G)$ such that for all $1 \leq i \leq k$, $|V_i| = n_i$ and the subgraph $G[V_i]$ induced by V_i is connected. We use $S^{**} = S(n; k_1, k_2, \dots, k_n)$ to denote the generalized sun-like graph. In this paper, we mainly discuss the arbitrary partitionability of graph $S^{**} \square P_m$.

Key words: arbitrary partitionability of graphs; Cartesian product of graphs; generalized sun-like graphs; traceable graphs

0 引言

设 $G = (V, E)$ 是个简单的, 无向的, n 个顶点的图. 如果序列 $\tau = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ 满足 $n = \sum_{1 \leq i \leq k} n_i$, 则称序列 τ 在图 G 中是可允许的. 如果 $\tau = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ 是图 G 的可允许序列且存在顶点集 $V(G)$ 的一个划分 (V_1, V_2, \dots, V_k) , 满足 $|V_i| = n_i$ 对于所有的 $1 \leq i \leq k$ 成立, 且 V_i 导出的子图 $G[V_i]$ 是连通的, 则称这个可允许的序列 τ 是可实现的, 并且称图 G 是 τ -可分的. 如果图 G 的每个可允许序列在图 G 中可实现, 则我们把图 G 称为任意可分图(简称为AP图或AVD图). 如果图 G 对于每个至多是 k 部分的划分 τ 都是 τ -可分的, 则称这个图 G 是 k -可分的. 如果一个图是2-可分的, 则这个图的性质跟限制连通性是有关的, 有关限制连通性的研究见文献[1, 2].

* 收稿日期: 2020-09-23

基金项目: 国家自然科学基金项目(11961067; 11531011).

作者简介: 西日尼阿依·努尔麦麦提(1992-), 女, 硕士生, 从事图论及其应用的研究, E-mail: 1693926408@qq.com.

[†] 通讯作者: 刘凤霞, 女, 博士, 副教授, 从事图论及其应用的研究, E-mail: xjulfx@163.com.

两个图 G 和 H 的笛卡儿积记为 $G \square H$, 其顶点集为 $V(G) \times V(H)$, $G \square H$ 的两个顶点 $(v_1, u_1), (v_2, u_2)$ 相邻当且仅当 $v_1 = v_2$ 且 $u_1 u_2 \in E(H)$ 或者 $u_1 = u_2$ 且 $v_1 v_2 \in E(G)$.

如果图 G 含有一条哈密尔顿路, 则此图称为可迹图. 路和可迹图 G 都是任意可分的. Baudon^[3]等人提出了猜想任意可分图 G 和可迹图 H 的笛卡儿积图是任意可分的, 并且他们证明了图 H 是顶点数至多为4的可迹图时猜想成立. 众所周知, 如果两个图 G 和 H 都是可迹图, 则它们的笛卡儿积也是可迹图. Liu^[4]等人证明了 T 是最大度至多为 $n+1$ 的树, 如果树 T 中有一条包含 T 中所有度为 $n+1$ 的顶点的路, 则 $T \square C_n$ 是任意可分图.

与经典问题完美匹配结合是任意可分图的重要研究方向. 若一个图 G 是任意可分图, 则可允许序列 $(2, 2, \dots, 2)$ 或 $(1, 2, 2, \dots, 2)$ 一定是可实现的, 即 G 有完美匹配或几乎完美匹配. 从而一个图含有完美匹配或几乎完美匹配的 necessary 条件是一个图是任意可分图. Liu^[5]等人证明了团数为2的 $2K_2$ -free图是任意可分图当且仅当此图含有完美匹配或几乎完美匹配. Hornák^[6]等人证明了对于一个顶点数至少为20的连通图 G , 如果图 G 有完美匹配或几乎完美匹配, 并且任意两个不相邻的顶点度数之和至少为 $n-5$, 则图 G 是任意可分的.

如果图 G 有任意可分的生成子图, 则此图是任意可分图, 而树是最简单的生成子图. 因此, 自从2002年提出任意可分图的定义后, 在过去的几年里有很多有关任意可分树的结论. Hornák和Woźniak^[7]证明了任意可分树的最大度至多为6, 并且提出了猜想如果树 T 的最大度至少为5, 则 T 不是任意可分的. 此猜想被Barth和Fournier^[8]证明了, 且他们证明了一个任意可分树 T 的最大度至多为4, 并且每个4-度点与一个叶子点相邻. Cichacz^[9]等人完全刻画了四个叶子点的任意可分毛毛虫图.

星型树 $S(a_1, a_2, \dots, a_t, b_1, b_2, \dots, b_s)$ (简记为 S)是一个同态于星 $K_{1,k}$ 的树. $K_{1,k}$ 的每一条边分别被长度为 $a_1, a_2, \dots, a_t, b_1, b_2, \dots, b_s$ 的路替换而得的图, 其中 $a_i (1 \leq i \leq t)$ 是奇数, $b_l (1 \leq l \leq s)$ 是偶数, 且 $\Delta(S) = k = t + s \geq 2$.

广义太阳图是一个圈 C_n 上的某些顶点悬挂星型树的单圈图. 圈 C_n 上的顶点称为中心点, 用 u_1, u_2, \dots, u_n 来表示. 我们用 $S^{**} = S(n; k_1, k_2, \dots, k_n)$ 来记 $d(u_i) \geq 4 (1 \leq i \leq n)$, 且 $S(n; k_1, k_2, \dots, k_n) - E(C_n) = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$ 是广义太阳图, 其中 $S_i = S(a_{1_i}, a_{2_i}, \dots, a_{t_i}, b_{1_i}, b_{2_i}, \dots, b_{s_i})$ 是 $\Delta(S_i) = k_i = t_i + s_i \geq 2 (1 \leq i \leq n)$ 的星型树, 且 $\Delta(S^{**}) = \max_{1 \leq i \leq n} \{k_i\} + 2$ (如图1).

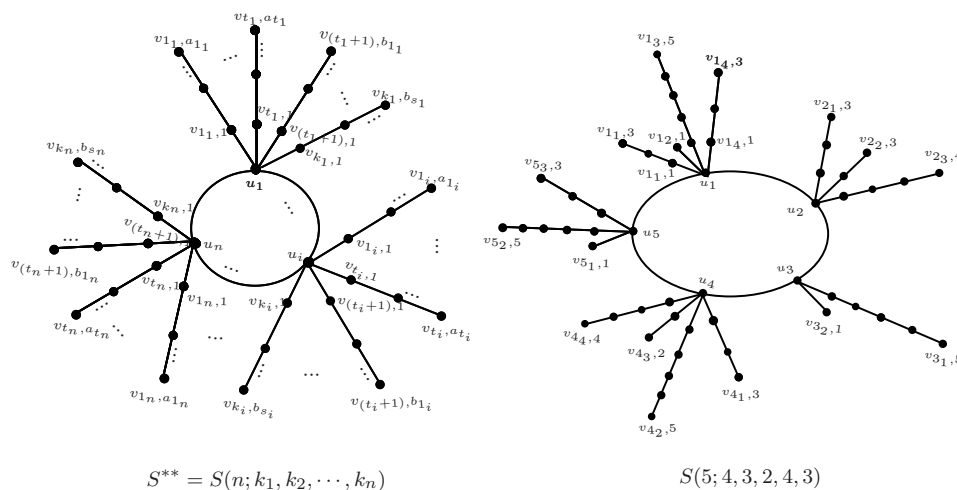


图 1 广义太阳图 S^{**}

Fig 1 Generalized Sun-like graph S^{**}

在这篇文章中, 我们主要研究广义太阳图和路的笛卡儿积的任意可分性. 首先按 m 的奇偶性分类, 给出了 $G^{**} = S^{**} \square P_m$ 是任意可分图的一些充分条件, 然后结合Tutte's定理, 给出了 $G^{**} = S^{**} \square P_m$ 不是任意可分图的一些充分条件.

1 $S^{**} \square P_m$ 的任意可分性

我们假设 $S^{**} = S(n; k_1, k_2, \dots, k_n)$ 是一个 $4 \leq d(u_i) \leq m+1$ 的太阳图, 对于每个中心点 u_i 成立. 而 $S(n; k_1, k_2, \dots$

$k_n) - E(C_n) = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n$, 其中 $S_i = S(a_{1,i}, a_{2,i}, \dots, a_{t_i}, b_{1,i}, b_{2,i}, \dots, b_{s_i})$ 是一个 $\Delta(S_i) = k_i = t_i + s_i \geq 2 (1 \leq i \leq n)$ 的星型树, t_i 是星型树 S_i 上的奇长路的个数, s_i 是偶长路的个数, $\Delta(S^{**}) = \max_{1 \leq i \leq n} \{k_i\} + 2$. 设 $G^{**} = S^{**} \square P_m$, 我们分别用 $u_i^k, v_{j,i}^k$ 来记图 $S^{**} \square P_m$ 上的顶点 $(u_i, v_k), (v_{j,i}, v_k)$, 其中 $u_i \in V(C_n), v_k \in V(P_m), v_{j,i} \in V(S^{**}) \setminus V(C_n)$, 且 $1 \leq k \leq m, 1 \leq j_i \leq k_i, 1 \leq l \leq a_{j_i} (\text{或 } b_{j_i}), 1 \leq i \leq n$.

我们首先讨论 $m \geq 3$ 为偶数的情况.

定理 1 设 $S^{**} = S(n; k_1, k_2, \dots, k_n)$ 是一个 $4 \leq \Delta(S^{**}) \leq m+1$ 的广义太阳图, 且 S_i 是一个 $\Delta(S_i) = k_i = t_i + s_i \geq 2 (1 \leq i \leq n)$ 的星型树. 如果 $m \geq 3$ 是偶数, $t_i \geq 0$ 且 $a_{j_i} > 1 (1 \leq j_i \leq t_i)$, 则 $S^{**} \square P_m$ 是任意可分的.

证明 因为 $\Delta(S_i) = k_i = t_i + s_i \leq m-1 (1 \leq i \leq n)$, 我们在图 $S_i \square P_m$ 中找到一条哈密尔顿路.

$$\begin{aligned}
 HP_i^* = & u_i^1 v_{1,i,1}^1 v_{1,i,2}^1 \cdots v_{1,i,a_{1,i}}^1 v_{1,i,a_{1,i}}^2 v_{1,i,a_{1,i}-1}^2 \cdots v_{1,i,2}^2 v_{1,i,2}^3 v_{1,i,3}^3 \cdots v_{1,i,a_{1,i}}^3 v_{1,i,a_{1,i}}^4 \cdots v_{1,i,2}^{m-2} v_{1,i,2}^{m-1} v_{1,i,3}^{m-1} \cdots \\
 & v_{1,i,a_{1,i}}^{m-1} v_{1,i,a_{1,i}}^m v_{1,i,a_{1,i}-1}^m \cdots v_{1,i,2}^m v_{1,i,1}^{m-1} \cdots v_{1,i,1}^3 v_{1,i,1}^2 u_i^2 v_{2,i,1}^2 v_{2,i,2}^2 \cdots v_{2,i,a_{2,i}}^2 v_{2,i,a_{2,i}}^2 v_{2,i,a_{2,i}-1}^2 \cdots \\
 & v_{2,i,3}^2 v_{2,i,2}^3 v_{2,i,2}^3 v_{2,i,3}^3 \cdots v_{2,i,a_{2,i}}^4 v_{2,i,a_{2,i}}^4 v_{2,i,a_{2,i}-1}^4 \cdots v_{t_i-1,2}^{m-2} v_{t_i-1,2}^{m-1} \cdots v_{t_i-1,a(t_i-1)}^{m-1} v_{t_i-1,a(t_i-1)}^m \cdots \\
 & v_{t_i-1,2}^m v_{t_i-1,1}^{m-1} \cdots v_{t_i-1,1}^{t_i+1} v_{t_i-1,1}^{t_i} u_i^{t_i} v_{t_i,1}^{t_i} v_{t_i,1}^{t_i-1} \cdots v_{t_i,1}^2 v_{t_i,1}^1 v_{t_i,2}^1 v_{t_i,3}^1 \cdots \\
 & v_{t_i,a_{t_i}}^1 v_{t_i,a_{t_i}}^2 v_{t_i,a_{t_i}-1}^2 \cdots v_{t_i,2}^2 v_{t_i,2}^3 v_{t_i,3}^3 \cdots v_{t_i,a_{t_i}}^3 v_{t_i,a_{t_i}}^4 \cdots v_{t_i,2}^{m-2} v_{t_i,2}^{m-1} v_{t_i,3}^{m-1} \cdots \\
 & v_{t_i,a_{t_i}}^{m-1} v_{t_i,a_{t_i}}^m v_{t_i,a_{t_i}-1}^m \cdots v_{t_i,2}^m v_{t_i,1}^{m-1} \cdots v_{t_i,1}^{t_i+2} v_{t_i,1}^{t_i+1} u_i^{t_i+1} v_{t_i+1,1}^{t_i+1} v_{t_i+1,1}^{t_i} \cdots v_{t_i+1,1}^2 v_{t_i+1,1}^1 v_{t_i+1,2}^1 \cdots \\
 & v_{t_i+1,b_{1,i}}^1 v_{t_i+1,b_{1,i}}^2 v_{t_i+1,b_{1,i}-1}^2 \cdots v_{t_i+1,2}^3 v_{t_i+1,2}^3 \cdots v_{t_i+1,2}^{m-2} v_{t_i+1,2}^{m-1} \cdots v_{t_i+1,b_{1,i}}^{m-1} v_{t_i+1,b_{1,i}}^m v_{t_i+1,b_{1,i}-1}^m \cdots \\
 & v_{t_i+1,2}^m v_{t_i+1,1}^{m-1} \cdots v_{t_i+1,1}^{t_i+3} v_{t_i+1,1}^{t_i+2} u_i^{t_i+2} v_{t_i+2,1}^{t_i+2} \cdots v_{k_i-1,1}^{k_i} u_i^{k_i} v_{k_i,1}^{k_i} v_{k_i,1}^{k_i-1} \cdots \\
 & v_{k_i,1}^2 v_{k_i,1}^1 v_{k_i,2}^1 \cdots v_{k_i,b_{s_i}}^1 v_{k_i,b_{s_i}}^2 v_{k_i,b_{s_i}-1}^2 \cdots v_{k_i,2}^2 v_{k_i,2}^3 \cdots v_{k_i,b_{s_i}}^3 v_{k_i,b_{s_i}}^4 \cdots v_{k_i,2}^{m-2} v_{k_i,2}^{m-1} \cdots \\
 & v_{k_i,b_{s_i}}^{m-1} v_{k_i,b_{s_i}}^m v_{k_i,b_{s_i}-1}^m \cdots v_{k_i,2}^m v_{k_i,1}^{m-1} \cdots v_{k_i,1}^{k_i+1} u_i^{k_i+1} v_{k_i+1,1}^{k_i+1} \cdots u_i^{m-1} u_i^m.
 \end{aligned}$$

笛卡儿积图 $S_i \square P_m$ 中的哈密尔顿路 HP_i^* 的起点是中心点 u_i^1 , 终点是中心点 u_i^m (也可以倒着走以中心点 u_i^m 为起点, 以 u_i^1 为终点). 显然, 中心点 u_{i-1}^1 (图 $S_{i-1} \square P_m$ 上的顶点) 与 u_i^1, u_i^m 与 u_{i+1}^m (图 $S_{i+1} \square P_m$ 上的顶点) 是相邻的. 因此, 在图 $G^{**} = S^{**} \square P_m$ 中能找出一条起点为 u_1^1 , 当 n 为偶数时, 终点为 u_n^1 的哈密尔顿路, 当 n 是奇数时, 终点为 u_n^m 的哈密尔顿路.

故图 $G^{**} = S^{**} \square P_m$ 是可迹图, 从而是个任意可分图.

下面讨论 $m \geq 3$ 是奇数的情况. 首先考虑广义太阳图 S^{**} 的一些子结构图, 如下:

- (1) 如果 S_1 和 S_2 是 S^{**} 的两个星型树, 其中 $\Delta(S_1) = k_1 = 1 + s_1 \geq 2, t_1 = 1$, 且 $\Delta(S_2) = k_2 = 2 + s_2 \geq 2, t_2 = 2$, 则图 S^{**} 的子结构 $V(S_1) \cup V(S_2)$ 导出的子图记为 S_A^{**} , 即 $S_A^{**} = S^{**}[V(S_1) \cup V(S_2)]$.
- (2) 如果 S_i 和 S_j 是 S^{**} 的两个星型树, 对于任意的 $i \leq q \leq j, t_q = 0$, 即 $\Delta(S_q) = k_q = s_q \geq 2$, 则图 S^{**} 的子结构 $V(S_i) \cup V(S_{i+1}) \cup \dots \cup V(S_j)$ 导出的子图记为 S_B^{**} .
- (3) 如果 S_i 和 S_{i+1} 是 S^{**} 的两个星型树, 其中 $\Delta(S_i) = k_i = 1 + s_i \geq 2, t_i = 1$ 且 $\Delta(S_{i+1}) = k_{i+1} = 1 + s_{i+1} \geq 2, t_{i+1} = 1$, 则图 S^{**} 的子结构 $V(S_i) \cup V(S_{i+1})$ 导出的子图记为 S_C^{**} .

为了讨论整个图 $S^{**} \square P_m$ 的任意可分性, 我们先讨论上面的子结构图和路的笛卡儿积图的任意可分性. 下面我们定义一些重要的路:

(4) 假设 $H_1 = S_1 \square P_m$, 其中 $\Delta(S_1) = k_1 = 1 + s_1 \geq 2, t_1 = 1$, 则 H_1 中有哈密尔顿路且把它记为 $h_1^* \text{-path}$:

$$\begin{aligned}
 & v_{1,1,a_{1,1}}^1 v_{1,1,a_{1,1}}^2 \cdots v_{1,1,a_{1,1}}^{m-1} v_{1,1,a_{1,1}}^m v_{1,1,a_{1,1}-1}^{m-1} \cdots v_{1,1,a_{1,1}-1}^2 v_{1,1,a_{1,1}-1}^1 v_{1,1,a_{1,1}-2}^1 \cdots v_{1,1,2}^1 v_{1,1,1}^2 \cdots \\
 & v_{1,1,1}^{m-1} v_{1,1,1}^m u_1^m v_{2,1,1}^m v_{2,1,2}^m \cdots v_{2,1,b_{1,1}}^{m-1} v_{2,1,b_{1,1}}^m \cdots v_{2,1,b_{1,1}}^2 v_{2,1,b_{1,1}}^1 v_{2,1,b_{1,1}-1}^1 v_{2,1,b_{1,1}-1}^2 \cdots \\
 & v_{2,1,b_{1,1}-1}^{m-2} v_{2,1,b_{1,1}-1}^{m-1} v_{2,1,b_{1,1}-2}^{m-2} v_{2,1,b_{1,1}-2}^{m-1} \cdots v_{2,1,2}^{m-2} v_{2,1,1}^{m-1} \cdots v_{2,1,1}^{m-2} v_{2,1,1}^{m-1} u_1^{m-1} v_{3,1,1}^{m-1} v_{3,1,2}^m \cdots \\
 & v_{3,1,b_{2,1}}^{m-1} v_{3,1,b_{2,1}}^m \cdots v_{3,1,b_{2,1}}^2 v_{3,1,b_{2,1}}^1 v_{3,1,b_{2,1}-1}^1 v_{3,1,b_{2,1}-1}^2 \cdots v_{3,1,b_{2,1}-1}^{m-1} v_{3,1,b_{2,1}-2}^{m-2} v_{3,1,b_{2,1}-2}^m \cdots \\
 & v_{k_1-1,3}^{m-1} v_{k_1-1,2}^{m-2} v_{k_1-1,2}^m \cdots v_{k_1-1,2}^2 v_{k_1-1,2}^1 v_{k_1-1,1}^2 v_{k_1-1,1}^1 \cdots v_{k_1-1,1}^{m-k_1+2} v_{k_1-1,1}^{m-k_1+2} v_{k_1-1,1}^{m-k_1+3} \cdots \\
 & v_{k_1,1}^{m-1} v_{k_1,1}^m v_{k_1,2}^m v_{k_1,3}^m \cdots v_{k_1,b(k_1-1)}^m v_{k_1,b(k_1-1)}^{m-1} \cdots v_{k_1,b(k_1-1)}^2 v_{k_1,b(k_1-1)}^1 v_{k_1,b(k_1-1)-1}^1 v_{k_1,b(k_1-1)-1}^2 \cdots \\
 & v_{k_1,b(k_1-1)-1}^{m-2} v_{k_1,b(k_1-1)-1}^{m-1} v_{k_1,b(k_1-1)-2}^{m-2} v_{k_1,b(k_1-1)-2}^m \cdots v_{k_1,3}^{m-1} v_{k_1,2}^{m-1} v_{k_1,2}^m \cdots v_{k_1,2}^2 v_{k_1,2}^1 v_{k_1,1}^2 v_{k_1,1}^1 \cdots \\
 & v_{k_1,1}^{m-k_1+1} u_1^{m-k_1+1} u_1^{m-k_1} \cdots u_1^2 u_1^1.
 \end{aligned}$$

(5) 假设 $H_2 = S_i \square P_m$, 其中 $\Delta(S_i) = k_i = 1 + s_i \geq 2, t_i = 1$, 则图 H_2 中有哈密尔顿路且把它记为 $h_2^* \text{-path}$:

$$\begin{aligned}
 & u_i^1 v_{1,i,1}^1 v_{1,i,2}^1 \cdots v_{1,i,a_{1,i}}^1 v_{1,i,a_{1,i}}^2 \cdots v_{1,i,a_{1,i}}^{m-1} v_{1,i,a_{1,i}}^m v_{1,i,a_{1,i}-1}^{m-1} v_{1,i,a_{1,i}-1}^2 \cdots v_{1,i,a_{1,i}-1}^3 v_{1,i,a_{1,i}-1}^2 v_{1,i,a_{1,i}-2}^2 \cdots \\
 & v_{1,i,2}^2 v_{1,i,1}^3 v_{1,i,1}^m \cdots v_{1,i,1}^{m-1} v_{1,i,1}^m u_i^m v_{2,i,1}^m v_{2,i,2}^m \cdots v_{2,i,b_{1,i}}^{m-1} v_{2,i,b_{1,i}}^m v_{2,i,b_{1,i}}^{m-1} \cdots v_{2,i,b_{1,i}}^2 v_{2,i,b_{1,i}}^1 v_{2,i,b_{1,i}-1}^1 v_{2,i,b_{1,i}-1}^2 \cdots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& v_{2_i, b_{2_i}-1}^{m-2} v_{2_i, b_{2_i}-1}^{m-1} v_{2_i, b_{2_i}-2}^{m-1} v_{2_i, b_{2_i}-2}^{m-2} \cdots v_{2_i, 2}^2 v_{2_i, 2}^1 v_{2_i, 1}^2 v_{2_i, 1}^1 \cdots v_{2_i, 1}^{m-2} v_{2_i, 1}^{m-1} u_i^{m-1} v_{3_i, 1}^{m-1} v_{3_i, 1}^m v_{3_i, 2}^m v_{3_i, 3}^m \cdots \\
& v_{3_i, b_{2_i}-1}^m v_{3_i, b_{2_i}}^m v_{3_i, b_{2_i}}^{m-1} \cdots v_{3_i, b_{2_i}}^2 v_{3_i, b_{2_i}}^1 v_{3_i, b_{2_i}-1}^1 v_{3_i, b_{2_i}-1}^2 v_{3_i, b_{2_i}-1}^1 \cdots v_{3_i, b_{2_i}-1}^{m-2} v_{3_i, b_{2_i}-1}^{m-1} v_{3_i, b_{2_i}-2}^{m-1} \cdots \cdots \\
& v_{k_i-1, 2}^{m-1} v_{k_i-1, 2}^{m-2} \cdots v_{k_i-1, 2}^2 v_{k_i-1, 2}^1 v_{k_i-1, 1}^2 v_{k_i-1, 1}^1 \cdots v_{k_i-1, 1}^{m-k_i+2} u_i^{m-k_i+2} v_{k_i, 1}^{m-k_i+2} v_{k_i, 1}^{m-k_i+3} \cdots \\
& v_{k_i, 1}^{m-1} v_{k_i, 1}^m v_{k_i, 2}^m \cdots v_{k_i, b(k_i-1)}^m v_{k_i, b(k_i-1)}^{m-1} \cdots v_{k_i, b(k_i-1)}^2 v_{k_i, b(k_i-1)}^1 v_{k_i, b(k_i-1)-1}^1 v_{k_i, b(k_i-1)-1}^2 \cdots \\
& v_{k_i, b(k_i-1)-1}^{m-2} v_{k_i, b(k_i-1)-1}^{m-1} v_{k_i, b(k_i-1)-1}^{m-1} v_{k_i, b(k_i-1)-2}^{m-2} \cdots v_{k_i, 2}^2 v_{k_i, 2}^1 v_{k_i, 1}^2 v_{k_i, 1}^1 \cdots \\
& v_{k_i, 1}^{m-k_i} v_{k_i, 1}^{m-k_i+1} u_i^{m-k_i+1} u_i^{m-k_i} \cdots u_i^3 u_i^2.
\end{aligned}$$

类似地, 哈密尔顿路 h_2^* -path 可以以中心点 u_i^2 为出发点, 以中心点 u_i^1 为终点, 也可以以中心点 u_i^{m-1} 为起点, 以 u_i^m 为终点.

(6) 假设 $H_3 = S_1 \square P_m$, 其中 $\Delta(S_1) = k_1 = 2 + s_1 \geq 2, t_1 = 2$, 则图 H_3 中有哈密尔顿路且把它记为 h_3^* -path:

$$\begin{aligned}
& v_{1, a_1}^1 v_{1, a_1}^2 \cdots v_{1, a_1}^{m-1} v_{1, a_1}^m v_{1, a_1}^m v_{1, a_1}^{m-1} v_{1, a_1}^{m-2} \cdots v_{1, a_1}^2 v_{1, a_1}^1 v_{1, a_1}^2 v_{1, a_1}^1 \cdots \\
& v_{1, 1}^{m-1} v_{1, 1}^m u_1^m v_{2, 1}^m v_{2, 1}^{m-1} \cdots v_{2, 1}^2 v_{2, 1}^1 v_{2, 1}^2 v_{2, 1}^1 \cdots v_{2, 1}^2 v_{2, 1}^1 v_{2, 1}^2 v_{2, 1}^1 \cdots \\
& v_{2, 1}^{m-2} v_{2, 1}^{m-1} v_{2, 1}^{m-1} v_{2, 1}^{m-2} \cdots v_{2, 1}^{m-1} v_{2, 1}^{m-1} v_{2, 1}^{m-2} \cdots v_{2, 1}^2 v_{2, 1}^1 u_1^1 v_{3, 1}^1 v_{3, 1}^2 \cdots \\
& v_{3, 1, b_1-1}^1 v_{3, 1, b_1}^2 v_{3, 1, b_1}^1 \cdots v_{3, 1, b_1}^{m-1} v_{3, 1, b_1}^m v_{3, 1, b_1-1}^m v_{3, 1, b_1-1}^{m-1} \cdots v_{3, 1, b_1-1}^3 v_{3, 1, b_1-1}^2 v_{3, 1, b_1-2}^2 \cdots \\
& v_{3, 1}^m v_{3, 1}^m v_{3, 1}^{m-1} \cdots v_{3, 1}^3 v_{3, 1}^2 u_1^2 v_{4, 1}^2 v_{4, 1}^1 v_{4, 1}^2 \cdots v_{4, 1, b_2-1}^1 v_{4, 1, b_2}^2 v_{4, 1, b_2}^1 \cdots v_{4, 1, b_2}^{m-1} v_{4, 1, b_2}^m v_{4, 1, b_2-1}^{m-1} \cdots \\
& v_{4, 1, b_2-1}^3 v_{4, 1, b_2-1}^2 v_{4, 1, b_2-1}^2 v_{4, 1, b_2-2}^3 v_{4, 1, b_2-2}^2 \cdots v_{4, 1, b_2-1, 3}^2 v_{4, 1, b_2-1, 2}^3 v_{4, 1, b_2-1, 2}^2 \cdots v_{4, 1, b_2-1, 2}^{m-1} v_{4, 1, b_2-1, 2}^m v_{4, 1, b_2-1, 1}^m \cdots \\
& v_{k_1-1, 1}^{k_1-2} u_1^{k_1-2} v_{k_1, 1}^{k_1-2} v_{k_1, 1}^{k_1-3} \cdots v_{k_1, 1}^1 v_{k_1, 2}^1 v_{k_1, 3}^1 \cdots v_{k_1, b(k_1-2)-1}^1 v_{k_1, b(k_1-2)}^2 v_{k_1, b(k_1-2)}^1 \cdots \\
& v_{k_1, b(k_1-2)}^{m-1} v_{k_1, b(k_1-2)}^m v_{k_1, b(k_1-2)-1}^{m-1} v_{k_1, b(k_1-2)-1}^m \cdots v_{k_1, b(k_1-2)-1}^3 v_{k_1, b(k_1-2)-1}^2 v_{k_1, b(k_1-2)-1}^1 v_{k_1, b(k_1-2)-2}^2 \cdots \\
& v_{k_1, 2}^{m-1} v_{k_1, 2}^m v_{k_1, 1}^{m-1} \cdots v_{k_1, 1}^{k_1-1} v_{k_1, 1}^{k_1-1} v_{k_1, 1}^{k_1-1} u_1^{m-2} u_1^{m-1}.
\end{aligned}$$

(7) 假设 $H_4 = S_i \square P_m$, 其中 $\Delta(S_i) = k_i = s_i \geq 2, t_i = 0$, 则图 H_4 中有哈密尔顿路且把它记为 h_4^* -path:

$$\begin{aligned}
& u_i^1 v_{1, 1}^1 v_{1, 2}^1 \cdots v_{1, b_1}^1 v_{1, b_1}^2 \cdots v_{1, b_1}^{m-1} v_{1, b_1}^m v_{1, b_1-1}^m v_{1, b_1-1}^{m-1} \cdots v_{1, b_1-1}^3 v_{1, b_1-1}^2 v_{1, b_1-2}^2 v_{1, b_1-2}^3 \cdots \\
& v_{1, 2}^m v_{1, 1}^m v_{1, 1}^{m-1} \cdots v_{1, 1}^3 v_{1, 1}^2 u_i^2 v_{2, 1}^2 v_{2, 1}^1 v_{2, 2}^2 v_{2, 2}^1 v_{2, 2}^2 v_{2, 2}^1 \cdots v_{2, 1}^2 v_{2, 1}^1 v_{2, 1}^2 v_{2, 1}^1 \cdots \\
& v_{2, 1}^{m-1} v_{2, 1}^m v_{2, 1}^m v_{2, 1}^{m-1} v_{2, 1}^{m-1} \cdots v_{2, 1}^3 v_{2, 1}^2 v_{2, 1}^2 v_{2, 1}^2 \cdots v_{2, 1}^2 v_{2, 1}^3 v_{2, 1}^2 v_{2, 1}^3 \cdots \\
& v_{k_i-1, 2}^{m-1} v_{k_i-1, 2}^m v_{k_i-1, 1}^{m-1} v_{k_i-1, 1}^m \cdots v_{k_i-1, 1}^{k_i+1} v_{k_i-1, 1}^{k_i} u_i^{k_i} v_{k_i, 1}^{k_i-1} v_{k_i, 1}^{k_i-2} \cdots v_{k_i, 1}^2 v_{k_i, 1}^1 v_{k_i, 1}^2 v_{k_i, 3}^1 \cdots \\
& v_{k_i, b_{k_i}}^1 v_{k_i, b_{k_i}}^2 \cdots v_{k_i, b_{k_i}}^{m-1} v_{k_i, b_{k_i}}^m v_{k_i, b_{k_i}-1}^m v_{k_i, b_{k_i}-1}^{m-1} \cdots v_{k_i, b_{k_i}-1}^3 v_{k_i, b_{k_i}-1}^2 v_{k_i, b_{k_i}-2}^2 v_{k_i, b_{k_i}-2}^3 \cdots \\
& v_{k_i, 3}^2 v_{k_i, 2}^2 v_{k_i, 2}^3 \cdots v_{k_i, 2}^{m-1} v_{k_i, 2}^m v_{k_i, 1}^{m-1} \cdots v_{k_i, 1}^{k_i+2} v_{k_i, 1}^{k_i+1} v_{k_i, 1}^{k_i+1} u_i^{k_i+2} \cdots u_i^{m-1} u_i^m.
\end{aligned}$$

类似地, 哈密尔顿路 h_4^* -path 可以以中心点 u_i^m 为起点, 以 u_i^1 为终点.

在一个笛卡儿积图 G 中, 如果 $v_i^1 \cdots v_i^2$ 和 $v_{i+1}^2 \cdots v_{i+1}^1$ 是两条 h_k^* -path, 且 $v_i^2 v_{i+1}^2$ 是图 G 中的一条边, 则我们用 $(h_k^*$ -path) $(h_k^*$ -path) 来记这条路 $v_i^1 \cdots v_i^2 v_{i+1}^2 \cdots v_{i+1}^1$.

命题 1 在笛卡儿积图 $S_A^{**} \square P_m (m \geq 3)$ 中, 我们能找到以中心点 v_{1, a_1}^1 为起点, 以 v_{1, a_1}^m 为终点的哈密尔顿路. 此条路为 $HP_2^* = (h_3^* \text{-path})(h_2^* \text{-path})$.

命题 2 在笛卡儿积图 $S_B^{**} \square P_m (m \geq 3)$ 中, 我们能找到一条哈密尔顿路 $HP_3^* = \underbrace{(h_4^* \text{-path}) \cdots (h_4^* \text{-path})}_{j-i+1}$.

- (i) 如果 $j - i = 2k (k \geq 0)$, 则这条路 HP_3^* 的起点是中心点 u_i^1 (或 u_i^m), 终点是中心点 u_j^m (或 u_j^1).
- (ii) 如果 $j - i = 2k + 1 (k \geq 0)$, 则这条路 HP_3^* 的起点是中心点 u_i^1 (或 u_i^m), 终点是中心点 u_j^1 (或 u_j^m).

命题 3 在笛卡儿积图 $S_C^{**} \square P_m (m \geq 3)$ 中, 我们能找到以中心点 u_i^1 (或 u_i^m) 为起点, 以中心点 u_{i+1}^1 (或 u_{i+1}^m) 为终点的哈密尔顿路. 此条路为 $HP_4^* = (h_2^* \text{-path})(h_2^* \text{-path})$.

由命题 1~命题 3, 我们能得到下面的结论.

定理 2 设 $S^{**} = S(n; k_1, k_2, \dots, k_n)$ 是一个 $\Delta(S^{**}) \leq m + 1$ 的广义太阳图, 对于一个奇数 $m \geq 3$.

- (1) 如果此图是一些子结构 S_B^{**}, S_C^{**} 和一个 $\Delta(S_1) = k_1 = 1 + s_1 \geq 2, t_1 = 1$ 的星型树 S_1 构成的图, 则 $S^{**} \square P_m$ 是任意可分的.
- (2) 如果此图是一些子结构 S_B^{**}, S_C^{**} 和恰好一个 S_A^{**} 构成的图, 则 $S^{**} \square P_m$ 是任意可分的.
- (3) 如果此图是一些子结构 S_B^{**}, S_C^{**} 和恰好两个 S_A^{**} 构成的图, 其中子结构图 S_A^{**} 的这两个 $\Delta(S_2) = k_2 = 2 + s_2 \geq 2, t_2 = 2$ 的星型树 S_2 的中心点在 S^{**} 中相邻, 则 $S^{**} \square P_m$ 是任意可分的.
- (4) 如果此图是一些子结构 $S_A^{**}, S_B^{**}, S_C^{**}$ 和恰好一个 $\Delta(S_i) = k_i = 1 + s_i \geq 2, t_i = 1$ 的星型树 S_i , 而且在子结

构图 S_A^{**} 的星型树 S_i 和 $\Delta(S_2) = k_2 = 2 + s_2 \geq 2, t_2 = 2$ 的星型树 S_2 的中心点在 S^{**} 中相邻, 则 $S^{**} \square P_m$ 是任意可分的.

证明 我们只证明(3)和(4), 剩下(1)和(2)的证明是类似的.

(3) 假设太阳图 S^{**} 是子结构 $S_A^{**}, S_B^{**}, S_C^{**}$ 和 S_A^{**} (按这个顺序) 构成的, 并且在子结构图 S_A^{**} 中的 $\Delta(S_2) = k_2 = 2 + s_2 \geq 2, t_2 = 2$ 的两个星型树 S_2 的中心点是相邻的, 则图 $S^{**} \square P_m$ 中有一条哈密尔顿路 HP_5^* :

$$HP_5^* = \underbrace{(h_3^* - path)(h_2^* - path)}_{S_A^{**} \square P_m} \underbrace{(h_4^* - path) \cdots (h_4^* - path)}_{S_B^{**} \square P_m} \underbrace{(h_2^* - path)(h_2^* - path)}_{S_C^{**} \square P_m} \underbrace{(h_2^* - path)(h_3^* - path)}_{S_A^{**} \square P_m}.$$

因此, 此图 $S^{**} \square P_m$ 是个可迹图, 从而是个任意可分图.

(4) 假设太阳图 S^{**} 是一个太阳图 S_1 与子结构图 S_B^{**}, S_C^{**} 和 S_A^{**} (按这个顺序)构成的图, 则图 $S^{**} \square P_m$ 中有一条哈密尔顿路 HP_6^* :

$$HP_6^* = \underbrace{(h_1^* - path)}_{S_1 \square P_m} \underbrace{(h_4^* - path) \cdots (h_4^* - path)}_{S_B^{**} \square P_m} \underbrace{(h_2^* - path)(h_2^* - path)}_{S_C^{**} \square P_m} \underbrace{(h_2^* - path)(h_3^* - path)}_{S_A^{**} \square P_m}.$$

因此, 此图 $S^{**} \square P_m$ 是个可迹图, 从而是任意可分图.

下面, 我们给出了笛卡儿积图 $S^{**} \square P_m$ 不是任意可分图的两个充分条件.

引理 1[Tutte's定理] 设 G 是有偶数个顶点的连通图. 则 G 有完美匹配当且仅当 $o(G - S) \leq |S|$, 对于所有的 $S \subset V$ 都成立.

引理 2^[5] 设 G 是有奇数个顶点的连通图. 则 G 有几乎完美匹配当且仅当 $o(G - S) \leq |S| + 1$, 对于所有的 $S \subset V$ 都成立.

假设 $P = \{u_i | i \text{ 是奇数}\}$ 和 $Q = \{u_i | i \text{ 是偶数}\}$ 是两个顶点集合, 其中 $u_i (1 \leq i \leq n)$ 是图 S^{**} 的中心点.

定理 3 设 $S^{**} = S(n; k_1, k_2, \dots, k_n)$ 是 $\Delta(S^{**}) \leq m + 1 (m \geq 3)$ 的广义太阳图, $S_i (1 \leq i \leq n)$ 是 $\Delta(S_i) = k_i = t_i + s_i \geq 2$ 的星型树且 $n \geq 4$ 是偶数. 如果 $\sum_{u_i \in P} t_i - \sum_{u_i \in Q} t_i > 1$, 则 $G^{**} = S^{**} \square P_m$ 不是任意可分的.

证明 为了证明 $G^{**} = S^{**} \square P_m$ 不是任意可分图, 我们证明 G^{**} 没有完美匹配或几乎完美匹配.

因为 $S_i = S(a_{1_i}, a_{2_i}, \dots, a_{t_i}, b_{1_i}, b_{2_i}, \dots, b_{s_i}) (1 \leq i \leq n)$, 记 $g_i = \sum_{k=1}^{t_i} a_k, f_i = \sum_{k=1}^{s_i} b_k$, 所以 $|V(S^{**})| = \sum_{i=1}^n (g_i + f_i) + n$.

在图 G^{**} 中, 广义太阳图 S^{**} 的第 p 个拷贝分记为 S_p^{**} . 对于图 S_p^{**} , 当 p 是奇数, 记 $A_p = \{v | i \text{ 是奇数且 } d(u_i^p, v) \text{ 是偶数}; i \text{ 是偶数且 } d(u_i^p, v) \text{ 是奇数}, 1 \leq i \leq n\}$, $B_p = V(S_p^{**}) \setminus A_p$. 对于 S_q^{**} , 当 q 是偶数, 记 $A_q = \{v | i \text{ 是奇数且 } d(u_i^q, v) \text{ 是奇数}; i \text{ 是偶数且 } d(u_i^q, v) \text{ 是偶数}, 1 \leq i \leq n\}$, $B_q = V(S_q^{**}) \setminus A_q$. 顶点集 A_p 和 A_q 的每个顶点染成黑色, 顶点集 B_p 和 B_q 的每个顶点染成白色 (如图2). 令 $S = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$, 显然, $o(G^{**} - S) = |B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_m| = \sum_{i=1}^m |B_i|$. $P = \{u_1, u_3, \dots, u_{n-1}\}, Q = \{u_2, u_4, \dots, u_n\}$.

$$|A_1| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n g_i - \frac{1}{2} \sum_{u_i \in P} t_i + \frac{1}{2} \sum_{u_i \in Q} t_i + \frac{n}{2},$$

$$|B_1| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n g_i + \frac{1}{2} \sum_{u_i \in P} t_i - \frac{1}{2} \sum_{u_i \in Q} t_i + \frac{n}{2}.$$

我们发现图 G^{**} 的奇拷贝分上的黑色顶点是此图的偶拷贝分上的白色顶点, 并且图 G^{**} 的奇拷贝分上的白色顶点是此图的偶拷贝分上的黑色顶点. 很容易可得

$$o(G^{**} - S) - |S| = |A_1| - |B_1| = \sum_{u_i \in P} t_i - \sum_{u_i \in Q} t_i.$$

由定理条件和引理, 可得 $o(G^{**} - S) - |S| = \sum_{u_i \in P} t_i - \sum_{u_i \in Q} t_i > 1$, 故 G^{**} 没有完美匹配或几乎完美匹配. 因此, 图 $G^{**} = S^{**} \square P_m$ 不是任意可分的.

定理 4 设 $S^{**} = S(n; k_1, k_2, \dots, k_n)$ 是 $\Delta(S^{**}) \leq m + 1 (m \geq 3)$ 的广义太阳图, $S_i (1 \leq i \leq n)$ 是 $\Delta(S_i) = k_i = t_i + s_i \geq 2$ 的星型树且 $n \geq 3$ 是奇数. 如果 $\sum_{u_i \in P} t_i - \sum_{u_i \in Q} t_i > m + 1$, 则 $G^{**} = S^{**} \square P_m$ 不是任意可分的.

证明 为了证明 $G^{**} = S^{**} \square P_m$ 不是任意可分图, 我们证明 G^{**} 没有完美匹配或几乎完美匹配.

因为 $S_i = S(a_{1_i}, a_{2_i}, \dots, a_{t_i}, b_{1_i}, b_{2_i}, \dots, b_{s_i}) (1 \leq i \leq n)$, 记 $g_i = \sum_{k=1}^{t_i} a_k, f_i = \sum_{k=1}^{s_i} b_k$, 所以 $|V(S^{**})| = \sum_{i=1}^n (g_i + f_i) + n$.

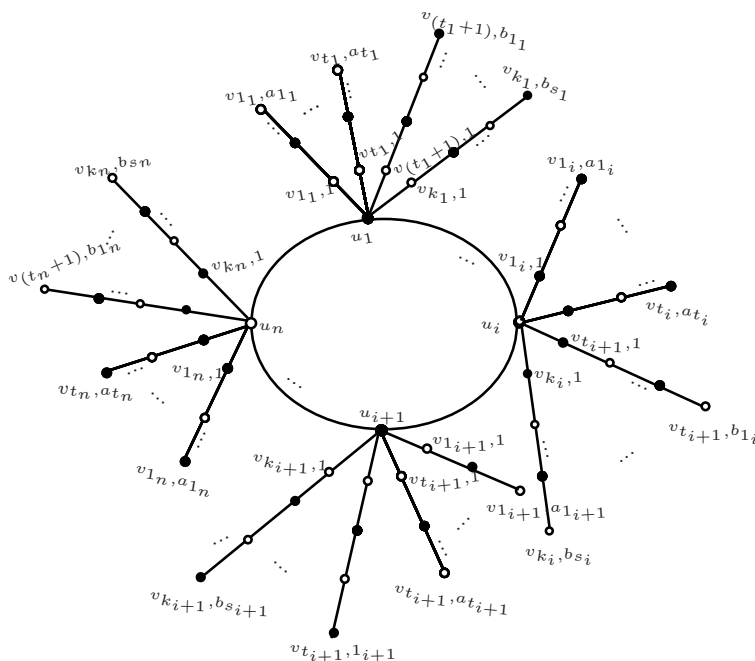


图 2 广义太阳图 S^{**} 在笛卡儿积图 G^{**} 中的第一个拷贝分

Fig 2 The first copy of generalized sun-like graph S^{**} in cartesian product graph G^{**}

在图 G^{**} 中广义太阳图 S^{**} 的第 p 个拷贝分记为 S_p^{**} . 对于图 S_p^{**} , 当 p 是奇数, 记 $A_p = \{v \mid i \text{ 是奇数且 } d(u_i^p, v) \text{ 是偶数}; i \text{ 是偶数且 } d(u_i^p, v) \text{ 是奇数}, 1 \leq i \leq n\}$, $B_p = V(S_p^{**}) \setminus A_p$. 对于 S_q^{**} , 当 q 是偶数, 记 $A_q = \{v \mid i \text{ 是奇数且 } d(u_i^q, v) \text{ 是奇数}; i \text{ 是偶数且 } d(u_i^q, v) \text{ 是偶数}, 1 \leq i \leq n\}$, $B_q = V(S_q^{**}) \setminus A_q$. 顶点集 A_p 和 A_q 的每个顶点染成黑色, 顶点集 B_p 和 B_q 的每个顶点染成白色. 令 $S = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$, $o(G^{**} - S)$ 代表的是图 G^{**} 的奇分支的个数. $P = \{u_1, u_3, \dots, u_{n-2}, u_n\}$, $Q = \{u_2, u_4, \dots, u_{n-1}\}$.

$$|S| = (\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n g_i - \frac{1}{2} \sum_{u_i \in P} t_i + \frac{1}{2} \sum_{u_i \in Q} t_i + \frac{n+1}{2}) \times \frac{m+1}{2} + (\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n g_i + \frac{1}{2} \sum_{u_i \in P} t_i - \frac{1}{2} \sum_{u_i \in Q} t_i + \frac{n-1}{2}) \times \frac{m-1}{2}.$$

$$o(G^{**} - S) = (\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n g_i + \frac{1}{2} \sum_{u_i \in P} t_i - \frac{1}{2} \sum_{u_i \in Q} t_i + \frac{n-1}{2}) \times \frac{m+1}{2} + (\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n g_i - \frac{1}{2} \sum_{u_i \in P} t_i + \frac{1}{2} \sum_{u_i \in Q} t_i + \frac{n-3}{2}) \times \frac{m-1}{2}.$$

$$o(G^{**} - S) - |S| = (\sum_{u_i \in P} t_i - \sum_{u_i \in Q} t_i - 1) \times \frac{m+1}{2} + (-\sum_{u_i \in P} t_i + \sum_{u_i \in Q} t_i - 1) \times \frac{m-1}{2}.$$

$$\Rightarrow o(G^{**} - S) - |S| = \sum_{u_i \in P} t_i - \sum_{u_i \in Q} t_i - m.$$

由定理条件和引理, 可得 $o(G^{**} - S) - |S| = \sum_{u_i \in P} t_i - \sum_{u_i \in Q} t_i - m > 1$, 故 G^{**} 没有完美匹配或几乎完美匹配. 因此, 图 $G^{**} = S^{**} \square P_m$ 不是任意可分的.

例 1 图 $G = S(5; 4, 3, 4, 4, 3) \square P_m$ 不是任意可分图, 其中 $\Delta(S_1) = 4, t_1 = 4; \Delta(S_2) = 3, t_2 = 1; \Delta(S_3) = 4, t_3 = 3; \Delta(S_4) = 4, t_4 = 2$ 和 $\Delta(S_5) = 3, t_5 = 3$, 如图3所示.

$$o(G - S) - |S| = \sum_{u_i \in P} t_i - \sum_{u_i \in Q} t_i - m = (4+3+3) - (1+2) - 5 = 2 > 1.$$

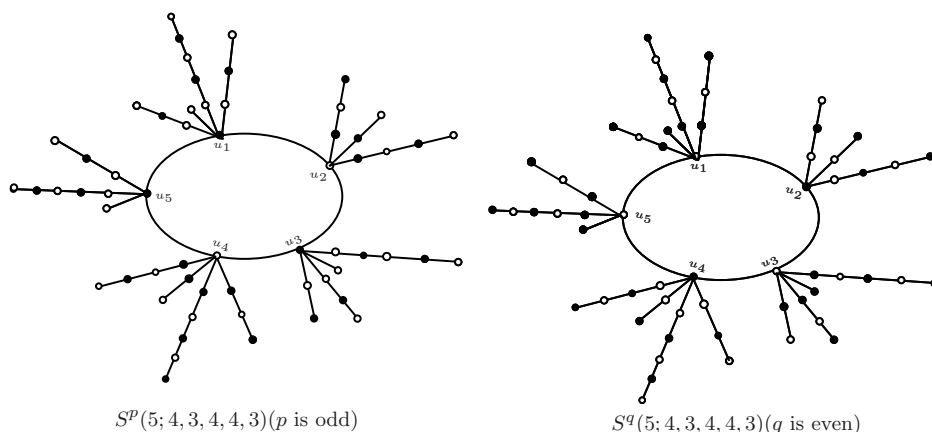


图 3 图 $S(5; 4, 3, 4, 4, 3)$ 的拷贝分

Fig 3 The copies of graph $S(5; 4, 3, 4, 4, 3)$

2 结论

文中我们给出了图 $G^{**} = S^{**} \square P_m$ 是可迹图, 且是任意可分图的充分条件. 并且结合Tutte's定理给出了图 $G^{**} = S^{**} \square P_m$ 不是任意可分图的充分条件.

参考文献:

- [1] ZHANG J H, MENG J X. Restricted arc-connectivity of generalized De Bruijn digraphs and Kautz digraphs[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2020, 37(4): 415-427.
- [2] ZHANG M Z, MENG J X, TIAN Y Z. On reliability of hypercubes in terms of extra edge-connectivity[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition), 2013, 30(3): 253-256.
- [3] BAUDON O, BENSMAIL J, KALINOWSKI R, et al. On the Cartesian product of an arbitrarily partitionable graph and a traceable graph[J]. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 2014, 16(2): 225-232.
- [4] LIU F X, WU B, MENG J X. Partitioning the Cartesian product of a tree and a cycle[J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 332: 90-95.
- [5] LIU F X, WU B, MENG J X. Arbitrarily partitionble $\{2K_2, C_4\}$ -free graphs[J]. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 2019. <https://doi.org/10.7151/dmgt.2289>.
- [6] HORŇÁK M, MARCZYK A, SCHIERMEYER I, et al. Dense arbitrarily vertex decomposable graphs[J]. Graphs and Combinatorics, 2012, 28(6): 807-821.
- [7] HORŇÁK M, WOŹNIAK M. Arbitrarily vertex decomposable trees are of maximum degree at most six[J]. Opuscula Math, 2003, 23(23): 49-62.
- [8] BARTH D, FOURNIER H. A degree bound on decomposable trees[J]. Discrete Mathematics, 2006, 306(5): 469-477.
- [9] CICHACZ S, AGNIESZKA GORLICH, MARCZYK A, et al. Arbitrarily vertex decomposable caterpillars with four or five leaves[J]. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 2006, 26(2): 291-305.

责任编辑: 赵新科