在 1-连通和 2-连通的二部图中保持连通度的一些树的研究*

罗 莲，田应智†

(新疆大学 数学与系统科学学院，新疆 乌鲁木齐 830017)

摘 要：在 2010 年, Mader 猜想对任意的阶为 m 的树 T, 每一个最小度至少为 $\lfloor\frac{3k}{2}\rfloor+m-1$的 k-连通图 G 中存在一个子树 $T^{'}\cong T$, 使得 $G-V(T')$ 仍然是 k-连通的. 对于二部图, 提出了类似的猜想: 对任意的二部划分为 X 和 Y 的树 T (记 $t=\max\{|X|,|Y|\}$), 每一个最小度至少为 $k+t$ 的 k-连通的二部图 G 中存在一个子树 $T^{'}\cong T$, 使得 $G-V(T')$ 仍然是 k-连通的. 最后验证了该猜想在 $k=1$ 和 $k=2$ 时, T 是一个有至多 3 个内点的毛毛虫图的情形是对的.

关键词：点连通度; 毛毛虫图; 星图; 双星图; 二部图

DOI：10.13568/j.cnki.651094.651316. 2021.03.24.0001

中图分类号：O157.5 **文献标识码**：A **文章编号**：2096-7675(2022)03-0283-04

引文格式：罗莲, 田应智. 在 1-连通和 2-连通的二部图中保持连通度的一些树的研究[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2022, 39(3): 283-286.

英文引文格式：LUO Lian, TIAN Yingzhi. On the connectivity keeping some trees in connected and 2-connected bipartite graphs[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2022, 39(3): 283-286.

On the Connectivity Keeping some Trees in Connected and 2-Connected Bipartite Graphs

LUO Lian, TIAN Yingzhi

(*School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China*)

Abstract：In 2010, Mader conjectured that for any tree T of order m, every k-connected graph G with minimum degree at least $\lfloor\frac{3k}{2}\rfloor+m-1$ contains a subtree $T^{'}\cong T$ such that $G-V(T^{'})$ is still k-connected. For bipartite graphs, we proposed a similar conjecture as follows: for every positive integer k and every finite tree T with bipartition X and Y (denote $t=\max\{|X|,|Y|\}$), every k-connected bipartite graph G with minimum degree at least $k+t$ contains a subtree $T'\cong T$ such that $G-V(T^{'})$ is still k-connected. In this paper, we confirm this conjecture for all caterpillars whose internal vertices is at most 3 when $k=1$ and $k=2$.

Key words：Connectivity; Caterpillars; Stars; Double-stars; Bipartite graphs

0 引 言

本文只考虑无自环和无平行边的有限无向图. $V(G)$, $E(G)$ 和 $\delta(G)$ 分别表示的是图 G 的点集, 边集和最小度. 图 G 的阶 $|G|$ 表示的是它的点集的基数. 对于任意的点 $v\in V(G)$, $N(v)=N_G(v)$ 表示与点 v 相邻的所有的顶点的集合, 并且 $d_G(v)=|N_G(v)|$ 称为图 G 中点 v 的度数. 一个树 T 中度为 1 的点称之为树 T 的叶子, $Leaf(T)$ 表示的是树 T 的叶子点的集合. 一个树 T 中度数至少为 2 的点称之为树 T 的内点, $V_I(T)$ 表示的是树 T 的内点

* **收稿日期**：2021-03-24
基金项目：国家自然科学基金（11861066）；新疆天山青年项目（2018Q066）.
作者简介：罗莲（1995-），女，硕士生，从事图论及其应用研究，E-mail: 2583224265@qq.com.
† **通讯作者**：田应智（1983-），男，博士，教授，从事图论及其应用研究，E-mail: tianyzhxj@163.com.

的集合. 对于任意的一个非空子集 $S\subseteq V(G)$, $G[S]$ 表示的是由 S 导出 G 的子图. 图 G 的连通度记作 $\kappa(G)$, 是满足 $G-S$ 是不连通的或是平凡图 K_1 的最小点集 S 的基数. 如果 $\kappa(G)\geq k$, 则称 G 是 k-连通的. 若 B 是 G 的一个极大的没有割点的连通子图, 则称 B 是 G 的块. 本文中未定义的术语和符号可参阅文献 [1].

Chartrand 等人给出如下著名定理.

定理 1[2] 任意 $\delta(G)\geq\lfloor\frac{3k}{2}\rfloor$ 的 k-连通图 G 中存在点 x, 使得 $G-x$ 仍然是 k-连通的.

Fujita 和 Kawarabayashi 在 [3] 中验证了 $\delta(G)\geq\lfloor\frac{3k}{2}\rfloor+2$ 的 k-连通的图 G 中存在相邻的两点 u,v 使得 $G-\{u,v\}$ 仍然是 k-连通的. 他们也提出如下猜想.

猜想 1[3] 对任意的正整数 k,m, 存在一个非负整数 $f_k(m)$ 使得 $\delta(G)\geq\lfloor\frac{3k}{2}\rfloor+f_k(m)-1$ 的 k-连通图 G 中存在一个阶为 m 的连通子图 W, 使得 $G-W$ 仍然是 k-连通的.

他们还在 [3] 中验证了对任意的正整数 k,m, 都有$f_k(m)\geq m$. Mader 在 [4] 中验证了猜想 1 中的参数 $f_k(m)=m$, 并且可取连通子图 W 为一条路 P.

定理 2[4] 对任意的正整数 k,m, 每一个 $\delta(G)\geq\lfloor\frac{3k}{2}\rfloor+m-1$ 的 k-连通图 G 中存在一个阶为 m 的路 P, 使得 $G-V(P)$ 仍然是 k- 连通的.

基于定理 2, Mader 提出如下猜想.

猜想 2[4] 对任意的阶为 m 的树 T, 每一个 $\delta(G)\geq\lfloor\frac{3k}{2}\rfloor+m-1$ 的 k-连通图 G 中存在一个子树 $T'\cong T$, 使得 $G-V(T')$ 仍然是 k-连通的.

在 [5] 中, Mader 证明了 $\delta(G)\geq 2(k-1+m)^2+m-1$ 时, 猜想 2 是成立的.

定理 3[5] 对任意的阶为 m 的树 T, 每一个 $\delta(G)\geq 2(k-1+m)^2+m-1$ 的 k-连通图 G 中存在一个子树 $T'\cong T$, 使得 $G-V(T')$ 仍然是 k-连通的.

Diwan 和 Tholiya 在 [6] 中验证了猜想 2 在 $k=1$ 时的情形.

定理 4[6] 对任意的阶为 m 的树 T, 每一个 $\delta(G)\geq m$ 的连通图 G 中存在一个子树 $T'\cong T$, 使得 $G-V(T')$ 仍然是连通的.

对于猜想 2, 当 $k=2$ 时, Tian 等学者在 [7-8] 中验证了 T 是星图, 双星图, 或路双星图时的情形; Hasunuma 和 Ono 在 [9] 中验证了当 T 有至多 5 个内点, 或者 T 是一个拟单调的毛毛虫图或是一个具有 6 个内点的毛毛虫图的情形; 在 [10] 中 Lu 等学者验证了当 T 的直径至多是 4 的情形; 在 [11] 中 Hong 等学者验证了当 T 是任意的毛毛虫图和蜘蛛图时的情形. 关于二部图的点连通度的其他研究可参阅文献 [12-13].

受到以上结论的启发, 我们也对二部图提出了类似的猜想.

猜想 3 对任意的具有二部划分 X 和 Y 的树 T, 每一个 $\delta(G)\geq k+t$ $(t=\max\{|X|,|Y|\})$ 的 k-连通的二部图 G 中存在一个子树 $T'\cong T$, 使得 $G-V(T')$ 仍然是 k- 连通的.

把 T 中最多有一个点的度大于 1 的树称为星图. 把 T 中只有两个相邻点的度大于或等于 2 的树称为双星图. 对于树 T, 若 $V_I(T)\neq\emptyset$ 且 $T[V_I(T)]$ 是一条路 P, 则 T 是一个毛毛虫图. 可以看出星图和双星图都是特殊的毛毛虫图.

在本文中, 我们验证了猜想 3 在 $k=1$ 和 $k=2$ 时, T 是一个内点的个数至多为 3 的毛毛虫图的情形是对的.

1 主要结果

在这一节中, 我们首先给出一些在二部图中子树存在的度条件的结论.

引理 1 设 T 是一个具有二部划分 X 和 Y 的树, 记 $t=\max\{|X|,|Y|\}$, T_1 是 T 的一个子树. 若二部图 G 中存在一个子树 $T_1'\cong T_1$ (设 ϕ 是 T_1 到 T_1' 的一个同构映射), 使得对任意的 $v\in V(G)\backslash\{\phi(u)|u\in V(T_1),N_T(u)\subseteq V(T_1)\}$ 都有 $d_G(v)\geq t$, 那么 G 中存在一个子树 $T'\cong T$ 使得 $T_1'\subseteq T'$.

证明 任取一点 $v\in\phi(T_1)\backslash\{\phi(u)|u\in V(T_1),N_T(u)\subseteq V(T_1)\}$, 我们不妨取 $v\in X$. 因为 $|N_G(v)\backslash V(T_1')|\geq t-|V(T_1)\cap Y|\geq|(V(T)\cap Y)\backslash(V(T_1)\cap Y)|\geq d_T(\phi^{-1}(v))-d_{T_1}(\phi^{-1}(v))$, 所以在 $N_G(v)\backslash V(T_1')$ 中可以选择 $d_T(\phi^{-1}(v))-d_{T_1}(\phi^{-1}(v))$ 个 v 的邻点添加到 T_1' 上, 将其记为 U'. 我们可以看到 U' 是 G 的一个子树, $T_1'\subseteq U'$, 且 U' 与 T 中

包含 T_1 的子树 U 同构. 注意到此时 T_1' 的度条件同样对 U' 成立. 通过重复以上过程, 最终能在 G 中找到一个子树 $T'\cong T$ 且 $T_1'\subseteq T'$.

由引理 1, 我们可以得到下面的推论.

推论 1　设 T 是一个具有二部划分 X 和 Y 的树, 记 $t=\max\{|X|,|Y|\}$, 每一个 $\delta(G)\geq t$ 的二部图 G 中存在一个子树 $T'\cong T$.

下面我们将要证明主要结论.

定理 5　设 T 是一个具有二部划分 X 和 Y 的树, 记 $t=\max\{|X|,|Y|\}$. 如果 T 的内点的个数不大于 3, 则每一个 $\delta(G)\geq t+1$ 的连通的二部图 G 中存在一个子树 $T'\cong T$ 使得 $G-V(T')$ 仍然是连通的.

证明　假设此定理是不成立的. 由推论 2 知 G 中存在与 T 同构的子树 T'. 在所有同构于 T 的子树中, 选择一个子树 T' 使得 $G–V(T')$ 包含的连通子图的阶数最大. 设 H_0 是 $G–V(T')$ 的最大连通分支, $H_1=G–V(T'\cup H_0)$, 由假设知 $V(H_1)\neq\emptyset$.

因为 G 是连通的, 所以存在 $v\in V(T')$ 使得 $N(v)\cap V(H_0)\neq\emptyset$. 又因为 $\delta(G)\geq t+1$, 所以对任意的 $h\in H_1$ 都有 $d_{H_1}(h)\geq t+1-|N(h)\cap V(H_0\cup T')|\geq t+1-t=1$, 即 $\delta(G[V(H_1)])\geq 1$.

当毛毛虫图 T 的内点的个数为 1 时, T 同构于星图. 对任意的 $h\in H_1$, $|N(h)\cap V(G–(V(H_0)\cup\{v\}))|\geq t+1–1=t$. 由推论 1 知, 我们可以在 $G-(V(H_0)\cup\{v\})$ 中找到一个以点 h 为中心点的星图 $T''\cong T$. 但是 $V(H_0)\cup\{v\}$ 包含在 $G-V(T'')$ 的一个连通分支中, 这与 T' 的选择矛盾.

当毛毛虫图 T 的内点的个数为 2 时, T 同构于双星图. 由于 $\delta(G[V(H_1)])\geq 1$, 则 H_1 中至少存在一边 $e=h_1h_2$. 因为 $|N(h_1)\cap V(G-(V(H_0)\cup\{v\}))|\geq t$ 和 $|N(h_2)\cap V(G-(V(H_0)\cup\{v\}))|\geq t$, 那么由引理 1 知, 在 $G-(V(H_0)\cup\{v\})$ 中存在一个以边 $e=h_1h_2$ 的点为中心点的双星图 $T''\cong T$. 但是 $V(H_0)\cup\{v\}$ 包含在 $G-V(T'')$ 的一个连通分支中, 这与 T' 的选择矛盾.

现在来看当毛毛虫图 T 的内点的个数为 3 时的情形. 若 H_1 中存在一条长为 2 的路 $P=h_1h_2h_3$, 因为 $|N(h_1)\cap V(G–(V(H_0)\cup\{v\}))|\geq t$, $|N(h_2)\cap V(G–(V(H_0)\cup\{v\}))|\geq t$ 和 $|N(h_3)\cap V(G–(V(H_0)\cup\{v\}))|\geq t$, 所以由引理 1 知, 在 $G–(V(H_0)\cup\{v\})$ 中存在一个以路 $P=h_1h_2h_3$ 的点为中心点的毛毛虫图 $T''\cong T$. 但是 $V(H_0)\cup\{v\}$ 包含在 $G-V(T'')$ 的一个连通分支中, 这与 T' 的选择矛盾. 因此 H_1 中的连通分支都同构于 K_2. 对任意的边 $h_1h_2\in H_1$, 因为 $\delta(G)\geq t+1$, 所以 $|N(h_1)\cap V(T')|=t$, $|N(h_2)\cap V(T')|=t$. 设 T' 的二部划分为 X' 和 Y'. 不妨假设 h_1 和 Y' 中的点都相连, h_2 和 X' 中的点都相连. 如果 $v\in X'$, 那么我们用 h_1 代替 v 可以找到一个毛毛虫图 $T''\cong T$. 但这时 $V(H_0)\cup\{v\}$ 包含在 $G-V(T'')$ 的一个连通分支中, 这与 T' 的选择矛盾. 如果 $v\in Y'$, 那么我们用 h_2 代替 v 可以找到一个毛毛虫图 $T''\cong T$. 但这时 $V(H_0)\cup\{v\}$ 包含在 $G-V(T'')$ 的一个连通分支中, 这也与 T' 的选择矛盾.

综上可知, 假设不成立, 则定理 5 的结论是正确的.

定理 6　设 T 是一个具有二部划分 X 和 Y 的毛毛虫图, 记 $t=\max\{|X|,|Y|\}$. 如果 T 的内点的个数不大于 3, 则每一个 $\delta(G)\geq t+2$ 的 2-连通的二部图 G 中存在一个子树 $T'\cong T$ 使得 $G-V(T')$ 仍然是连通的.

证明　假设此定理是不成立的. 由二部图中子树存在的度条件知, G 中存在与 T 同构的子树 T'. 在所有同构于 T 的子树中, 选择一个子树 T' 使得 $G-V(T')$ 中包含的块的阶数最大, 记 $G-V(T')$ 中阶数最大的块为 B. 因为 $\delta(G-V(T'))\geq 2$, 所以 $|B|\geq 3$ 且 B 是 2-连通的. 除此之外, 因为 $G-V(T')$ 不是 2-连通的, 所以 $G-V(T'\cup B)\neq\emptyset$. 令 $H=G-V(T'\cup B)$. 通过对 B 的假设知, 对任意的 $h\in H$, 都有 $|N(h)\cap V(B)|\leq 1$ 和 $|N(h)\cap V(H)|\geq t+2-|N(h)\cap V(B)|-|N(h)\cap V(T')|\geq t+2-1-t=1$, 即 $\delta(G[V(H)])\geq 1$.

论断 1　对任意的 $v\in T'$, $|N(v)\cap V(B)|\leq 1$.

假设论断 1 不成立, 那么存在 $v\in T'$, 使得 $|N(v)\cap V(B)|\geq 2$.

当毛毛虫图 T 的内点的个数为 1 时, T 同构于星图. 因为对于任意的 $h\in H$, $|N(h)\backslash(V(B)\cup\{v\})|\geq t+2–1–1=t$, 所以我们可以很容易地在 $G–(V(B)\cup\{v\})$ 中找到一个以 h 为中心点的同构于 T 的星图 T''. 但是 $V(B)\cup\{v\}$ 包含在 $G-V(T'')$ 的一个块中, 这与假设矛盾.

当毛毛虫图 T 的内点的个数为 2 时, T 同构于双星图. 由于 $\delta(G[V(H)])\geq 1$, 则 H 中至少存在一边 $e=h_1h_2$. 因为 $|N(h_1)\cap V(G–(V(B)\cup\{v\}))|\geq t$ 和 $|N(h_2)\cap V(G–(V(B)\cup\{v\}))|\geq t$, 那么由引理 1 知, 在 $G–(V(B)\cup\{v\})$

中存在一个以边 $e=h_1h_2$ 的点为中心点的双星图 $T''\cong T$. 但是 $V(B)\cup\{v\}$ 包含在 $G-V(T'')$ 的一个块中, 这与假设矛盾.

现在来看当毛毛虫图 T 的内点的个数为 3 时的情形. 若 H_1 中存在一条长为 2 的路 $P=h_1h_2h_3$, 因为 $|N(h_1)\cap V(G-(V(B)\cup\{v\}))|\geq t$, $|N(h_2)\cap V(G-(V(B)\cup\{v\}))|\geq t$ 和 $|N(h_3)\cap V(G-(V(B)\cup\{v\}))|\geq t$, 所以由引理 1 知, 在 $G-(V(B)\cup\{v\})$ 中存在一个以路 $P=h_1h_2h_3$ 的点为中心点的毛毛虫图 $T''\cong T$. 但是 $V(B)\cup\{v\}$ 包含在 $G-V(T'')$ 的一个块中, 这与假设矛盾. 因此 H 中的连通分支都同构于 K_2. 对任意的边 $h_1h_2\in H$, 因为 $\delta(G)\geq t+2$, 所以 $|N(h_1)\cap V(T')|\geq t$, $|N(h_2)\cap V(T')|\geq t$. 设 T' 的二部划分为 X' 和 Y'. 不妨假设 h_1 和 Y' 中的点都相连, h_2 和 X' 中的点都相连. 如果 $v\in X'$, 那么我们用 h_1 代替 v 可以找到一个毛毛虫图 $T''\cong T$. 但这时 $V(B)\cup\{v\}$ 包含在 $G-V(T'')$ 的一个块中, 这与 T' 的选择矛盾. 如果 $v\in Y'$, 那么我们用 h_2 代替 v 可以找到一个毛毛虫图 $T''\cong T$. 但这时 $V(B)\cup\{v\}$ 包含在 $G-V(T'')$ 的一个块中, 这又与 T' 的选择矛盾.

综上所述, 论断 1 是正确的.

因为 G 是 2-连通的, 所以在 G 中存在一个最短的路 $P=p_1,p_2,\cdots,p_{r-1},p_r$, 其中 $p_1,p_r\in V(B)$ 且 $p_i\in V(T'\cup H)$ $(2\leq i\leq r-1)$. 因为对于任意的点 $v\in V(T'\cup H)$ 都有 $|N_G(v)\cap V(B)|\leq 1$, 那么 $|P|\geq 4$. 又因为 P 是最短路, 所以 $N_G(p_2)\cap V(B\cup P)=\{p_1,p_3\}$, 那么 $|N_G(p_2)\cap V(H\cup T')|=d_G(p_2)-|N_G(p_2)\cap V(B\cup P)|\geq t+2-2=t$, 这意味着 $V(G)\backslash V(B\cup P)\neq\emptyset$. 而对于任意的 $s\in V(G)\backslash V(B\cup P)$, 一定有 $|N_G(s)\backslash V(B\cup P)|=d_G(s)-|N_G(s)\cap V(B\cup P)|\geq t+2-2=t$ (二部图中同一条边上的点的邻点集合不会相交). 因此由推论 2 可知, $G-V(B\cup P)$ 中存在一个子树 $T''\cong T$, 然而 $V(B)\cup V(P)$ 包含在 $G-V(T'')$ 的一个块中, 这与 T' 的选择矛盾.

综上可知, 假设不成立, 则定理 6 的结论是正确的.

参考文献：

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory[M]. Berlin: Springer, 2008.

[2] CHARTRAND G, KAUGARS A, LICK D R. Critically n-connected graphs[J]. Proc Amer Math Soc, 1972, 32: 63-68.

[3] FUJITA S, KAWARABAYASHI K. Connectivity keeping edges in graphs with large minimum degree[J]. J Combinatorial Theory Ser B, 2008, 98: 805-811.

[4] MADER W. Connectivity keeping paths in k-connected graphs[J]. J Graph Theory, 2010, 65: 61-69.

[5] MADER W. Connectivity keeping trees in k-connected graphs[J]. Graph Theory, 2012, 69: 324-329.

[6] DIWAN A A, THOLIYA N P. Non-separating trees in connected graphs[J]. Discrete Math, 2009, 309: 5235-5237.

[7] TIAN Y Z, MENG J X, LAI H J, et al. Connectivity keeping stars or double-stars in 2-connected graphs[J]. Discrete Math, 2018, 341(4): 1120-1124.

[8] TIAN Y Z, LAI H J, XU L Q, et al. Nonseparating trees in 2-connected graphs and oriented trees in strongly connected digraphs[J]. Discrete Math, 2019, 342(2): 344-351.

[9] HASUNUMA T, ONO K. Connectivity keeping trees in 2-connected graphs[J]. Graph Theory, 2020, 94(1): 20-29.

[10] LU C H, ZHANG P. Connectivity keeping trees in 2-connected graphs[J]. Discrete Math, 2020, 343(2): 1-4.

[11] HONG Y M, LIU Q H, LU C H, et al. Connectivity keeping caterpillars and spiders in 2-connected graphs[J]. Discrete Math, 2021, 344(3): 112236.

[12] ZHANG S, TIAN Y Z, MENG J X. Arc connectivity of balanced half-transitive digraphs[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition), 2014, 31(1): 22-25.

[13] TIAN Y Z, MENG J X, CHEN X. On restricted edge-connectivity of half-transitive multigraphs[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition), 2018, 35(1): 34-41.

责任编辑：赵新科