具有弱迷向 S 曲率的卷积芬斯勒度量*

徐晓慧，张晓玲†

(新疆大学 数学与系统科学学院，新疆 乌鲁木齐 830046)

摘　要：本文利用张量分析的方法和偏微分方程的理论研究了具有弱迷向 S 曲率的卷积芬斯勒度量，得到其刻画方程. 在此基础上得到了一系列具有消失 S 曲率的 Douglas 型卷积芬斯勒度量.

关键词：卷积芬斯勒度量；S 曲率；迷向 S 曲率；Douglas 度量

DOI：10.13568/j.cnki.651094.651316. 2020.10.20.0005

中图分类号：O186.14　**文献标识码**：A　**文章编号**：2096-7675(2021)06-0681-04

引文格式：徐晓慧, 张晓玲. 具有弱迷向 S 曲率的卷积芬斯勒度量[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2021, 38(6): 681-684+698.

英文引文格式：XU X H, ZHANG X L. Finsler warped product metrics with weakly isotropic S curvature[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2021, 38(6): 681-684+698.

Finsler Warped Product Metrics with Weakly Isotropic S Curvature

XU Xiaohui, ZHANG Xiaoling†

(*School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830046, China*)

Abstract：In this paper, by using tensor analysis and theories of PDEs, we study the Finsler warped product metric with weakly isotropic S curvature, and obtain the characterized equations. Furthermore, we construct a series of the Finsler warped product metrics of Douglas type with vanishing S curvature.

Key words：Finsler warped product metrics; S curvature; isotropic S curvature; Douglas metrics

0　引 言

卷积度量是乘积度量的推广. Bishop 和 O'Neil[1]为了研究具有负曲率的黎曼流形而引入了卷积度量. 这种度量主要用于构造具有某些曲率条件的黎曼流形的新例子. 后来有学者将卷积度量扩展到芬斯勒流形的情况[2−3]，这些度量被称为卷积芬斯勒度量. 最近，卷积芬斯勒度量的研究取得重大进展[2−7]. Liu和Mo刻画了具有消失的 Douglas 曲率的卷积芬斯勒度量[6]. Liu等研究了具有特殊黎曼性质的卷积芬斯勒度量[7].

在芬斯勒几何中，S 曲率是一类非常重要的非黎曼几何量. 其最早是 Shen 在研究体积比较定理时引入的[8]. 最近，学者们证明了 S 曲率在芬斯勒几何中扮演着一个非常重要的角色[9−11]. 众所周知，若芬斯勒度量 F 具有迷向 S 曲率，即对于流形 M 上的数量函数 $c(x)$ 有 $S=(n+1)c(x)F$，且 F 具有数量曲率 $K=K(x,y)$，则有 $K=\frac{3c_{x^m}y^m}{F}+\tau(x)$，其中 $\tau(x)$ 是流形 M 上的数量函数[12].

在本文中，我们研究了卷积芬斯勒流形. 考虑 n 维卷积流形 $M:=I\times\check{M}$，其中 I 是 $\mathbb{R}$ 上的一个区间，$\check{M}$ 是一个具有黎曼度量 $\check{\alpha}$ 的 $(n-1)$ 维流形. $TM=\bigcup_{u\in M}T_uM$ 是 M 上的切丛，其中 T_uM 是 $u\in M$ 的切空间，v 是 T_uM 上的非零切向量，$\check{u}\in\check{M}$，$\check{v}$ 为 $T_{\check{u}}\check{M}$ 上的非零切向量. 在 TM 上定义如下非负函数：

$$F(u,v):=\check{\alpha}(\check{u},\check{v})\phi\left(u^1,\frac{v^1}{\check{\alpha}(\check{u},\check{v})}\right),$$

其中：$u=(u^1,\check{u}),v=v^1\frac{\partial}{\partial u^1}+\check{v}$，$\phi$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个正函数，则 F 被称为流形 M 上的卷积芬斯勒度量[2]. 在本文中指标规定如下：$1\le A,B,C\cdots\le n$, $2\le i,j,k\cdots\le n$，$r=u^1$，$\check{u}=(u^2,\ldots,u^n)$，$\check{M}$ 上的几何量正上方用 “ˇ” 标注.

* 收稿日期：2020-10-20
基金项目：国家自然科学基金项目(11961061；11461064；11761069)；新疆大学博士启动基金项目(BS130107).
作者简介：徐晓慧(1995-)，女，硕士生，从事微分几何的研究，E-mail：1746306773@qq.com.
† 通讯作者：张晓玲(1978-)，女，博士，副教授，从事微分几何的研究，E-mail：xlzhang@ymail.com.

本文研究了在任意体积形式 $dV=\sigma(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ 下具有弱迷向 S 曲率的卷积芬斯勒度量,得到刻画此性质的一个偏微分方程,如下面定理所述.

定理 1 $n(\geq 3)$ 维流形上的卷积芬斯勒度量 $F=\check{\alpha}\phi(r,s)$, $r=u^1$, $s=\frac{v^1}{\check{\alpha}}$ 具有弱迷向 S 曲率当且仅当下式成立

$$\begin{cases} -s(\ln\sigma)_r-s\eta_1(u)=(n+1)c(u)\phi-(\Phi-s\Psi)_s-(n+1)\Psi, \\ \check{\Gamma}^i_{ik}(\check{u})=(\ln\sigma)_{u^k}+\eta_k(u), \end{cases} \tag{1}$$

其中: $\check{\Gamma}^k_{ij}(\check{u})$ 是黎曼度量 $\check{\alpha}$ 下的克里斯托费尔符号.

应用此定理,我们构造很多具有消失 S 曲率的 Douglas 型卷积芬斯勒度量的例子.

1 预备知识

设 M 是一个流形,$TM=\bigcup_{x\in M}T_xM$ 是 M 上的切丛,其中 T_xM 是点 $x\in M$ 的切空间,$TM^0=TM\backslash\{0\}$ 为 M 上带孔切丛. 一个芬斯勒度量就是没有二次型限制的黎曼度量.

定义 1 设 M 是一个 n 维光滑流形. $F:TM\to[0,\infty)$ 是其切丛 TM 上的非负函数. 如果 F 满足如下条件:

(1) F 在带孔切丛 TM^0 上是 C^∞ 函数;

(2) F 关于向量 y 正 1 次齐次, 即 $F(x,\lambda y)=\lambda F(x,y)$, $\forall\lambda>0$, $(x,y)\in TM$;

(3) 对于任意 $(x,y)\in TM$, TM 上的对称双线性形式 g_y 是正定的,其中

$$g_y(u,v)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}[F^2(y+su+tv)]|_{s,t=0},\ u,v\in T_xM,$$

则称 F 是流形 M 上的芬斯勒结构或芬斯勒度量. 具备芬斯勒度量的微分流形 M 被称为芬斯勒流形或芬斯勒空间,记作 (M,F).

流形 M 上的一个喷射 G 是带孔切丛 TM^0 上的一个特殊向量场,它满足:

(i) 在局部坐标系 (x^i,y^i) 下,

$$G=y^i\frac{\partial}{\partial x^i}-2G^i\frac{\partial}{\partial y^i},$$

其中: $G^i(x,\lambda y)=\lambda^2G^i(x,y)$ $(\forall\lambda>0)$ 被称为喷射系数(或测地系数);

(ii) G^i 在非零点 (x,y) 是 C^∞ 的. 特别地,芬斯勒度量 F 在 TM^0 上诱导一个特殊的喷射 G,其测地系数为

$$G^i=\frac{1}{4}g^{il}\{[F^2]_{x^ky^l}y^k-[F^2]_{x^l}\}.$$

下文涉及的测地系数 G^i 均指这种特殊喷射的测地系数.

在黎曼几何中,黎曼度量 $g=g_{ij}(x)dx^i\bigotimes dx^j$ 确定了唯一的黎曼体积元 $dV_g=\sqrt{det(g_{ij})}dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$. 但在芬斯勒几何中,可以有各种体积元. 令 $dV=\sigma(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ 为流形 M 的体积形式,其中 $\sigma=\sigma(x)$ 是流形 M 上的数量函数. 比较常用的体积元有两种:Busemann-Hausdorff 体积元和 Holmes-Thompson 体积元. 当芬斯勒度量为黎曼度量时,这两种体积元都化成黎曼体积元.

芬斯勒度量 F 的畸变定义为 $\tau:=\ln\frac{\sqrt{det(g_{ij})}}{\sigma(x)}$.

引理 1 对于任一点 $x\in M$ 和任一非零向量 $y\in T_xM$, 设 $\gamma=\gamma(t)$ 是以 $\gamma(0)=x$ 为起点, $\gamma'(0)=y$ 为初始向量的测地线. 令

$$S(x,y):=\left.\frac{d[\tau(\gamma(t),\gamma'(t))]}{dt}\right|_{t=0},$$

则 $S=S(x,y)$ 称为芬斯勒流形的 S 曲率.

设 (x,y) 是 TM 的局部坐标, $G^i(x,y)$ 是喷射系数. 在体积形式 $dV=\sigma(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ 下, S 曲率的表达式为

$$S=\frac{\partial G^k}{\partial y^k}-y^k\frac{\partial}{\partial x^k}(\ln\sigma).$$

定义 2 设 (M,F) 是 n 维芬斯勒流形, $S(x,y)$ 是它的 S 曲率. 设 $c=c(x)$ 是 M 上的一个数量函数, $\eta=\eta_i(x)y^i$ 是 M 上的 1 形式.

(i) 若

$$S=(n+1)cF+\eta, \tag{2}$$

则称 F 具有弱迷向 S 曲率;

(ii) 若 (2) 中 1 形式 η 是闭的, 即 $d\eta=0$, 则称 F 具有殆迷向 S 曲率;

(iii) 若 (2) 中 $\eta=0$, 则称 F 具有迷向 S 曲率;

(iv) 若 (2) 中 $\eta=0$, 并且 c 为常数, 则称 F 具有常数 S 曲率.

2 具有弱迷向 S 曲率的卷积芬斯勒度量

卷积芬斯勒度量的测地系数如下:

$$G^1=\Phi\check{\alpha}^2,\quad G^i=\check{G}^i+\Psi\check{\alpha}^2\check{l}^i, \tag{3}$$

其中: $\check{l}^i=\frac{v^i}{\check{\alpha}}$, $\check{G}^i$ 是指黎曼度量 $\check{\alpha}$ 下的测地系数, $\omega=\phi^2$, Φ,Ψ 如下定义

$$\Phi=\frac{s^2\left(\omega_r\omega_{ss}-\omega_s\omega_{rs}\right)-2\omega\left(\omega_r-s\omega_{rs}\right)}{2\left(2\omega\omega_{ss}-\omega_s^2\right)},\Psi=\frac{s(\omega_r\omega_{ss}-\omega_s\omega_{rs})+\omega_r\omega_s}{2(2\omega\omega_{ss}-\omega_s^2)}. \tag{4}$$

经直接计算, 可得

$$\frac{\partial G^1}{\partial v^1}=\Phi_s\check{\alpha},$$

$$\frac{\partial G^k}{\partial v^j}=\frac{\partial\check{G}^k}{\partial v^j}+(\Psi-s\Psi_s)\check{\alpha}\check{l}_j\check{l}^k+\Psi\check{\alpha}\delta_j^k.$$

其中: $\check{l}_j=\check{\alpha}_{v^j}$, $\check{G}^k$ 是指黎曼度量 $\check{\alpha}$ 下的测地系数.

在流形 M 上任取体积形式 $dV=\sigma(r,\check{u})dr\wedge du^2\wedge\ldots\wedge du^n$. 此时 S 曲率可表示为

$$S=\frac{\partial G^A}{\partial v^A}-v^B\frac{\partial}{\partial u^B}(\ln\sigma(u)). \tag{5}$$

由式(3), 通过直接计算可得

$$S=(\Phi-s\Psi)_s\check{\alpha}+(n+1)\check{\alpha}\Psi+\check{\Gamma}^i_{ik}(\check{u})v^k-(\ln\sigma(u))_{u^A}v^A, \tag{6}$$

其中: $\check{\Gamma}^k_{ij}(\check{u})$ 是黎曼度量 $\check{\alpha}$ 下的克里斯托费尔符号.

引理 2 如果在 $n(\geq 3)$ 维卷积芬斯勒流形上存在一形式 β (即 $\beta=b_1(r,\check{u})v^1+b_k(r,\check{u})v^k$), 使得 $\beta=f\check{\alpha}$, 其中 $f=f(r,\check{u},s)$, 那么 $f=b_1(r,\check{u})s$, 且 $b_k(r,\check{u})=0$. 此时 $\beta=b_1(r,\check{u})v^1$.

证明 将式 $\beta=f\check{\alpha}$ 对 v^i 求导, 可得 $b_i=(f-sf_s)\check{l}_i$. 再次对上式关于 v^j 求导, 可得

$$0=(f-sf_s)\check{a}_{ij}+(s^2f_{ss}+sf_s-f)\check{l}_i\check{l}_j.$$

分别用 $\check{l}^i\check{l}^j$ 和 $\check{a}^{ij}$ 缩并上式, 可得$0=s^2f_{ss}$ 和 $0=s^2f_{ss}+(n-2)(f-sf_s)$.

综上, $f-sf_s=0$. 解之得 $f=\tilde{c}s$, 其中 $\tilde{c}=\tilde{c}(r,\check{u})$.

将 $f=\tilde{c}s$ 代回 $\beta=f\check{\alpha}$, 得 $b_1(r,\check{u})v^1+b_k(r,\check{u})v^k=\beta=f\check{\alpha}=\tilde{c}s\check{\alpha}=\tilde{c}v^1$, 即$b_1(r,\check{u})v^1+b_k(r,\check{u})v^k=\tilde{c}v^1$. 显然有 $b_1(r,\check{u})=\tilde{c}$, $b_k(r,\check{u})=0$, 亦即 $f=b_1(r,\check{u})s$, 且 $\beta=b_1(r,\check{u})v^1$.

定理 1的证明 如果卷积芬斯勒度量 F 具有弱迷向 S 曲率, 即 $S=(n+1)c(r,\check{u})F+\eta$. 则由式 (2) 和 (6), 可得

$$\check{\alpha}(\Phi-s\Psi)_s+(n+1)\check{\alpha}\Psi+v^k\check{\Gamma}^i_{ik}(\check{u})-v^A(\ln\sigma(u))_{u^A}=(n+1)c(u)\check{\alpha}\phi+v^A\eta_A(u),$$

其中: $c=c(u)$ 是 M 上的数量函数. 上式可改写成

$$v^k\check{\Gamma}^i_{ik}(\check{u})-v^A(\ln\sigma(u))_{u^A}-v^A\eta_A(u)=[(n+1)c(u)\phi-(\Phi-s\Psi)_s-(n+1)\Psi]\check{\alpha}.$$

将之简记为

$$\beta=f(r,\check{u},s)\check{\alpha}, \tag{7}$$

其中

$$\beta = v^k\check{\Gamma}^i_{ik}(\check{u}) - v^A(\ln\sigma(u))_{u^A} - v^A\eta_A(u)$$

即 $b_1(r,\check{u}) = -(\ln\sigma(u))_r - \eta_1(u)$, $b_k(r,\check{u}) = \check{\Gamma}^i_{ik}(\check{u}) - (\ln\sigma(u))_{u^k} - \eta_k(u)$ 是卷积芬斯勒流形上的一形式，且

$$f(r,\check{u},s) = (n+1)c(u)\phi - (\Phi - s\Psi)_s - (n+1)\Psi$$

是 $r,\check{u}$ 和 s 的函数.

根据引理 2，可得 $f = b_1(r,\check{u})s$，且 $\beta = b_1(r,\check{u})v^1$. 即 $(n+1)c(u)\phi - (\Phi - s\Psi)_s - (n+1)\Psi = -((\ln\sigma(u))_r - \eta_1(u))s, \check{\Gamma}^i_{ik}(\check{u}) - (\ln\sigma(u))_{u^k} - \eta_k(u) = 0$，此即方程组(1).

反之，显然成立.

注记： 由定理 1可知 S 曲率不仅与体积元 $\sigma(u)$ 相关，还与黎曼度量 $\check{\alpha}$ 和函数 ϕ 相关.

3 具有迷向 S 曲率的卷积芬斯勒度量

由定理 1可得如下定理.

定理 2 若卷积芬斯勒度量 $F = \check{\alpha}\phi(r,s)$, $r = u^1$, $s = \frac{v^1}{\check{\alpha}}$ 具有消失的 S 曲率当且仅当

$$(\Phi - s\Psi)_s + (n+1)\Psi - s(\ln\sigma)_r = 0, \tag{8}$$

且 $\check{\Gamma}^i_{ik}(\check{u}) = (\ln\sigma)_{u^k}$.

注记： 由定理2可知，具有消失的 S 曲率的卷积芬斯勒度量不仅与黎曼度量 $\check{\alpha}$ 和函数 ϕ 相关，还依赖于流形的体积元 $\sigma(u)$.

性质 1 若卷积芬斯勒度量 $F = \check{\alpha}\phi(r,s)$, $r = u^1$, $s = \frac{v^1}{\check{\alpha}}$ 具有消失的 S 曲率，则 $(\ln\sigma)_r$ 只是 r 的函数，与 $\check{u}$ 无关.

证明 因为卷积芬斯勒度量具有消失的 S 曲率，令 (8) 式中 $(\Phi - s\Psi)_s + (n+1)\Psi = t$. 则 (8) 式改写为

$$t = s(\ln\sigma)_r. \tag{9}$$

此式两边关于 s 求偏导，得$t_s = (\ln\sigma)_r$.

将此式代回 (9) 式，得 $t = st_s$. 解之，存在函数 $q = q(r)$ 使得 $t = sq(r) = s(\ln\sigma)_r$. 因此 $q(r) = (\ln\sigma)_r$. 故 $(\ln\sigma)_r$ 只是 r 的函数，与 $\check{u}$ 无关.

对 Douglas 型卷积芬斯勒度量有如下定理.

引理 3([6]定理 1.1) 卷积芬斯勒度量 $F = \check{\alpha}\phi(r,s)$, $r = u^1$, $s = \frac{v^1}{\check{\alpha}}$ 是 Douglas 型度量当且仅当 ϕ 满足

$$(\phi - s\phi_s)_r = [f(r)s^2 + g(r)]\phi_{ss}, \tag{10}$$

其中: $f = f(r)$ 和 $g = g(r)$ 是两个可微函数.

应用上面引理我们构造了具有消失 S 曲率的 Douglas 型卷积芬斯勒度量，如下所述.

例 1 令 $\phi = e^{k\sigma^2 s^2}$，其中 $k < 0$ 是常数，$\sigma = \sigma(r)$. 则卷积芬斯勒度量 $F = \check{\alpha}\phi(r,s)$, $r = u^1$, $s = \frac{v^1}{\check{\alpha}}$ 具有消失的 S 曲率. 同时此卷积芬斯勒度量也是 Douglas 型度量，其中 $f(r) = -(\ln\sigma)_r$ 且 $g(r) = 0$. 进一步，当 $s^2 < -\frac{1}{2k\sigma^2}$ 时，卷积芬斯勒度量 F 是正定的.

例 2 令 $\phi = k + \frac{s^2}{h(r)^2}$，且 $\sigma = \frac{c}{r}$，其中 k 和 c 是正常数，$h(r)$ 是任意非负可微函数. 则卷积芬斯勒度量 $F = \check{\alpha}\phi(r,s)$, $r = u^1$, $s = \frac{v^1}{\check{\alpha}}$ 具有消失的 S 曲率. 它也是 Douglas 型度量，其中 $f(r) = (\ln h(r))_r$ 且 $g(r) = 0$. 进一步，当 $s^2 < kh(r)^2$ 时，卷积芬斯勒度量 F 是正定的.

例 3 令 $\phi = \sum_{i=0}^k a_i(\frac{s}{r})^i$，且 $\sigma = \frac{c}{r}$，其中 k 是任意正整数，$c(>0), a_i(i = 0,1,\cdots,k)$ 是任意常数. 则卷积芬斯勒度量 $F = \check{\alpha}\phi(r,s)$, $r = u^1$, $s = \frac{v^1}{\check{\alpha}}$ 具有消失的 S 曲率. 它也是 Douglas 型度量，其中 $f(r) = \frac{1}{r}$ 且 $g(r) = 0$. 特别地，如果 $k = 4$，当 $a_2 > 0$, $a_3 = 0$, $a_4 > 0$, $a_2^2 + 12a_0a_4 > 0$, $s^2 < -\frac{a_2 - \sqrt{a_2^2 + 12a_0a_4}}{6a_4}r^2$ 或者 $a_2 > 0$, $a_3 = 0$, $a_4 < 0$, $a_2^2 + 12a_0a_4 < 0$, $s^2 < -\frac{a_2}{6a_4}r^2$ 时，卷积芬斯勒度量 F 是正定的. 特别地，如果 $k = 2$，当 $a_0 > 0$, $a_2 > 0$, $s^2 < \frac{a_0}{a_2}r^2$ 时，卷积芬斯勒度量 F 是正定的.

参考文献：

[1] BISHOP R L, O'NEILL B. Manifolds of negative curvature[J]. Transactions of the American Mathematical, 1969, 145: 1-49.

（下转第 698 页）