

# 基于人口流动的COVID-19传播动力学模型研究\*

郭文丹, 聂麟飞<sup>†</sup>

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

**摘要:** 地区之间的人口流动是当前乃至今后一段时期COVID-19传播的主要途径之一. 基于病毒在人群和宿主之间的传播规律以及人口迁移的影响, 提出了一类具有迁移效应, 无症状感染者和隔离措施的COVID-19传播动力学模型, 并利用下一代矩阵方法给出了基本再生数的精确表达式. 进一步, 利用线性近似和构造Lyapunov函数的方法, 证明了当基本再生数小于1时, 无感染平衡态是全局渐近稳定的; 而当基本再生数大于1时, 疾病是一致持久的. 数值模拟解释了主要的理论结果并验证了防控措施的可行性.

**关键词:** COVID-19传播模型; 人口流动; 基本再生数; 无感染平衡态与地方病平衡态; 稳定性与持久性

**DOI:** 10.13568/j.cnki.651094.651316.2021.03.18.0002

**中图分类号:** O175 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2022)02-0161-08

**引文格式:** 郭文丹, 聂麟飞. 基于人口流动的COVID-19传播动力学模型研究[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2022, 39(2): 161-168.

**英文引文格式:** GUO Wendan, NIE Linfei. Study on the transmission dynamics model of COVID-19 with population mobility[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2022, 39(2): 161-168.

## Study on the Transmission Dynamics Model of COVID-19 with Population Mobility

GUO Wendan, NIE Linfei

(School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017)

**Abstract:** Population flow is one of the main ways of COVID-19 transmission at present and in the future. Based on the law of virus transmission between people and hosts, and the influence of population migration, a kind of COVID-19 transmission dynamic model with migration effect, asymptomatic infection and isolation measures is proposed, and the accurate expression of basic reproduction number is given by using next generation matrix method. Further, by using the method and skill of linear approximation and Lyapunov function, it is proved that when the basic reproduction number is less than 1, the disease-free equilibrium is globally asymptotically stable; when the basic reproduction number is greater than 1, the disease is uniformly persistent. Numerical simulation explains the main theoretical results and verifies the feasibility of the control measures.

**Key words:** COVID-19 transmission model; population mobility; basic reproduction number; disease-free equilibrium and endemic equilibrium; stability and persistence

## 0 引言

新型冠状病毒肺炎(Corona Virus Disease 2019, COVID-19)是一种传染性极强的多宿主传染病,其病原体不仅可以在野生动物中长期存活并造成动物之间的传播,也可以通过野生动物传播给人类.利用数学模型预测疾病的流行趋势对评估公共卫生和制定防控策略有着重要的意义.目前,新型冠状病毒肺炎流行病学模型的研究引起了国内外众多学者的广泛关注,得到了一系列重要的研究成果<sup>[1-4]</sup>.众所周知,从新型冠状病毒被发现到疫情在全球各地暴发,人口的流动起到了推波助澜的作用.事实上,许多传染病在传播过程中,染病者从一个地区到另一个地区的迁移也加速了疾病在各个地区之间的快速蔓延.因此,在过去的几十年里,众多国内外学者

\* 收稿日期: 2021-03-18

基金项目: 国家自然科学基金项目(11961066); 新疆维吾尔自治区高校科研项目(XJEDU2018I001).

作者简介: 郭文丹(1996-),女,硕士生,从事微分方程及其应用的研究, E-mail: 2322539992@qq.com.

<sup>†</sup> 通讯作者: 聂麟飞(1978-),男,博士,教授,从事微分方程及其应用的研究, E-mail: lfnie@163.com.

建立了具有人口迁移影响传染病的模型,讨论了人口迁移对疾病传播的影响.例如,文献[5]提出了一类包括感染个体迁移和可变人口规模在内的疾病传播模型,研究了地方病平衡态的存在性与稳定性.文献[6-7]提出了具有种群迁移效应的两斑块传染病模型,给出了基本再生数的表达式,并讨论了迁移率对疾病消除和流行的影响.进一步,文献[8]系统地给出了斑块环境的传染病模型基本再生数的第二代矩阵方法.对于斑块迁移模型的研究还有一系列重要的成果<sup>[9-10]</sup>.基于目前新型冠状病毒肺炎在世界各地不断蔓延,人口流动的不断增长以及无症状感染者不断涌现,本文提出了具有人口迁移和无症状感染者的两斑块COVID-19传播模型,研究模型各类平衡点的存在性与稳定性,探讨防控措施对疾病流行的影响.

## 1 模型建立

根据COVID-19的主要流行病特征,将两个区域的人群分为以下五类:易感人群、无症状感染人群、有症状感染人群、隔离的人群和康复人群,他们在 $t$ 时刻的数量分别记为 $S_i(t)$ ,  $A_i(t)$ ,  $I_i(t)$ ,  $Q_i(t)$ ,  $R_i(t)$  ( $i=1,2$ );将媒介分为两类:易感媒介和染病媒介,它们在 $t$ 时刻的数量分别记为 $S_v(t)$ ,  $I_v(t)$ .假设在第一个斑块上,COVID-19不仅在野生动物间传播,也通过野生动物传播给人类,同时病毒也在人与人之间传播;而在第二个斑块上,考虑到区域的差异性,病毒仅在人与人之间传播.进一步,假设两个斑块之间仅考虑单向迁移,即斑块1的人群会向斑块2迁移.根据以上假设,建立如下常微分方程模型

$$\begin{cases} \frac{dS_1(t)}{dt} = \Lambda_1 - \beta_{vh}S_1(t)I_v(t) - \beta_1S_1(t)(A_1(t) + p_1I_1(t)) - \mu_1S_1(t) - mS_1(t) \\ \frac{dA_1(t)}{dt} = (1 - \kappa_1)[\beta_{vh}S_1(t)I_v(t) + \beta_1S_1(t)(A_1(t) + p_1I_1(t))] - \alpha_1A_1(t) - \theta_1q_1A_1(t) - \mu_1A_1(t) - \rho mA_1(t) \\ \frac{dI_1(t)}{dt} = \kappa_1[\beta_{vh}S_1(t)I_v(t) + \beta_1S_1(t)(A_1(t) + p_1I_1(t))] + \alpha_1A_1(t) - q_1I_1(t) - \mu_1I_1(t) \\ \frac{dQ_1(t)}{dt} = \theta_1q_1A_1(t) + q_1I_1(t) - \gamma_1Q_1(t) - \mu_1Q_1(t) \\ \frac{dR_1(t)}{dt} = \gamma_1Q_1(t) - \mu_1R_1(t) \\ \frac{dS_v(t)}{dt} = \Lambda_v - \beta_{vv}S_v(t)I_v(t) - \mu_vS_v(t) \\ \frac{dI_v(t)}{dt} = \beta_{vv}S_v(t)I_v(t) - \mu_vI_v(t) \end{cases} \quad (1)$$

和

$$\begin{cases} \frac{dS_2(t)}{dt} = \Lambda_2 - \beta_2S_2(t)(A_2(t) + p_2I_2(t)) - \mu_2S_2(t) + mS_1(t) \\ \frac{dA_2(t)}{dt} = (1 - \kappa_2)[\beta_2S_2(t)(A_2(t) + p_2I_2(t))] - \alpha_2A_2(t) - \theta_2q_2A_2(t) - \mu_2A_2(t) + \rho mA_1(t) \\ \frac{dI_2(t)}{dt} = \kappa_2\beta_2S_2(t)(A_2(t) + p_2I_2(t)) + \alpha_2A_2(t) - q_2I_2(t) - \mu_2I_2(t) \\ \frac{dQ_2(t)}{dt} = \theta_2q_2A_2(t) + q_2I_2(t) - \gamma_2Q_2(t) - \mu_2Q_2(t) \\ \frac{dR_2(t)}{dt} = \gamma_2Q_2(t) - \mu_2R_2(t) \end{cases} \quad (2)$$

模型其它参数及生物解释如下:  $\Lambda_i$ 和 $\Lambda_v$ 分别为人类和野生动物的补充率,  $\mu_i$ 和 $\mu_v$ 分别为人类和野生动物的自然死亡率,  $\beta_{vh}$ 为病毒从感染野生动物到易感人类的传播率,  $\beta_{vv}$ 为病毒从感染野生动物到易感野生动物的传播率,  $\beta_i$ 为病毒从无症状感染者到易感人类的传播率,  $p_i\beta_i$ 为病毒从有症状感染者到易感人类的传播率( $0 < p < 1$ ),  $\kappa$ 为易感者被感染后出现症状的可能性 $\kappa \in (0, 1)$ ,  $\gamma_i$ 为染病者的恢复率,  $m$ 和 $\rho m$ 分别为斑块1中易感人类和无症状感染者的迁移率,  $q_i$ 和 $\theta_iq_i$ 分别为有症状和无症状感染者的隔离率,  $\alpha_i$ 为无症状感染者到有症状感染者的转化率,  $i=1,2$ .

令 $N_h(t) = \sum_{i=1}^2(S_i(t) + A_i(t) + I_i(t) + Q_i(t) + R_i(t))$ ,  $N_v(t) = S_v(t) + I_v(t)$ ,  $\mu = \min\{\mu_1, \mu_2\}$ , 则由模型(1)和模型(2)可得

$$\frac{dN_h(t)}{dt} \leq \Lambda_1 + \Lambda_2 - \mu N_h(t), \quad \frac{dN_v(t)}{dt} \leq \Lambda_v - \mu_v N_v(t).$$

因此,  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} N_h(t) \leq (\Lambda_1 + \Lambda_2)/\mu$ ,  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} N_v(t) \leq \Lambda_v/\mu_v$ . 故, 集合

$$\Omega = \{(S_i(t), A_i(t), I_i(t), \dots, S_v(t), I_v(t)) \in \mathbb{R}_+^{12} : 0 \leq N_h(t) \leq (\Lambda_1 + \Lambda_2)/\mu, 0 \leq N_v(t) \leq \Lambda_v/\mu_v\}.$$

是模型(1)和(2)的正不变集. 本文主要在 $\Omega$ 区域内研究模型(1)和模型(2)的动力学性质.

## 2 无迁移模型的无感染平衡态的稳定性

模型(1)始终存在无感染平衡态 $E_{01}(S_1^0, 0, 0, 0, 0, S_v^0, 0)$ , 其中 $S_1^0 = \Lambda_1/(\mu_1 + m)$ ,  $S_v^0 = \Lambda_v/\mu_v$ . 下面采用下一代矩阵方法<sup>[11]</sup>给出模型(1)基本再生数 $\mathcal{R}_{01}$ 的表达式. 容易计算感染矩阵 $\mathcal{F}$ 和转移矩阵 $\mathcal{V}$ 在 $E_{01}$ 处分别表示为

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} (1-\kappa_1)\beta_1 \frac{\Lambda_1}{\mu_1+m} & (1-\kappa_1)\beta_1 p_1 \frac{\Lambda_1}{\mu_1+m} & (1-\kappa_1)\beta_{vh} \frac{\Lambda_1}{\mu_1+m} \\ \kappa_1\beta_1 \frac{\Lambda_1}{\mu_1+m} & \kappa_1\beta_1 p_1 \frac{\Lambda_1}{\mu_1+m} & \kappa_1\beta_{vh} \frac{\Lambda_1}{\mu_1+m} \\ 0 & 0 & \beta_{vv} \frac{\Lambda_v}{\mu_v} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ -\alpha_1 & D & 0 \\ 0 & 0 & \mu_v \end{pmatrix},$$

其中:  $B = \alpha_1 + \theta_1 q_1 + \mu_1 + \rho m$ ,  $D = \mu_1 + q_1$ . 因此,  $\mathcal{F}\mathcal{V}^{-1}$ 为

$$\mathcal{F}\mathcal{V}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(1-\kappa_1)\beta_1\Lambda_1}{(\mu_1+m)B} + \frac{(1-\kappa_1)\beta_1 p_1 \alpha_1 \Lambda_1}{(\mu_1+m)BD} & \frac{(1-\kappa_1)\beta_1 p_1 \Lambda_1}{(\mu_1+m)D} & \frac{(1-\kappa_1)\beta_{vh}\Lambda_1}{(\mu_1+m)\mu_v} \\ \frac{\kappa_1\beta_1\Lambda_1}{(\mu_1+m)B} + \frac{\kappa_1\beta_1 p_1 \alpha_1 \Lambda_1}{(\mu_1+m)BD} & \frac{\kappa_1\beta_1 p_1 \Lambda_1}{(\mu_1+m)D} & \frac{\kappa_1\beta_{vh}\Lambda_1}{(\mu_1+m)\mu_v} \\ 0 & 0 & \frac{\beta_{vv}\Lambda_v}{\mu_v^2} \end{pmatrix}.$$

通过直接计算可得 $\mathcal{R}_{01} := \rho(\mathcal{F}\mathcal{V}^{-1}) = \max\{\mathcal{R}_{01}^v, \mathcal{R}_{01}^h\}$ , 其中,

$$\mathcal{R}_{01}^v = \frac{\beta_{vv}\Lambda_v}{\mu_v^2}, \quad \mathcal{R}_{01}^h = \frac{(1-\kappa_1)\beta_1\Lambda_1 D + (1-\kappa_1)\beta_1 p_1 \alpha_1 \Lambda_1 + \kappa_1\beta_1 p_1 \Lambda_1 B}{(\mu_1+m)BD}.$$

容易计算, 模型(1)在任一平衡态 $\tilde{E}(\bar{S}_1, \bar{A}_1, \bar{I}_1, \bar{Q}_1, \bar{R}_1, \bar{S}_v, \bar{I}_v)$ 处的Jacobi矩阵为

$$\begin{pmatrix} -\Theta - (\mu_1 + m) & -\beta_1 \bar{S}_1 & -\beta_1 p_1 \bar{S}_1 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{vh} \bar{S}_1 \\ (1-\kappa_1)\Theta & (1-\kappa_1)\beta_1 \bar{S}_1 - B & (1-\kappa_1)\beta_1 p_1 \bar{S}_1 & 0 & 0 & 0 & (1-\kappa_1)\beta_{vh} \bar{S}_1 \\ \kappa_1\Theta & \kappa_1\beta_1 \bar{S}_1 + \alpha_1 & \kappa_1\beta_1 p_1 \bar{S}_1 - D & 0 & 0 & 0 & \kappa_1\beta_{vh} \bar{S}_1 \\ 0 & \theta_1 q_1 & q_1 & \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & -\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_{vv} \bar{I}_v - \mu_v & -\beta_{vv} \bar{S}_v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{vv} \bar{S}_v - \mu_v \end{pmatrix} \quad (3)$$

其中:  $\Theta = \beta_{vh} \bar{I}_v + \beta_1 (\bar{A}_1 + p_1 \bar{I}_1)$ ,  $\varphi = -\gamma_1 - \mu_1$ .

关于无感染平衡态的稳定性, 有下面的结论.

**定理 1** 若 $\mathcal{R}_{01} < 1$ , 模型(1)的无感染平衡态 $E_{01}$ 是局部渐近稳定的,  $\mathcal{R}_{01} > 1$ , 则不稳定.

**证明** 由(3)可知, 模型(1)在无感染平衡态 $E_{01}$ 处的特征方程为

$$(\lambda + \mu_1 + m)(\lambda + \gamma_1 + \mu_1)(\lambda + \mu_1)(\lambda + \mu_v)[\lambda - \mu_v(\mathcal{R}_{01}^v - 1)]H_1(\lambda) = 0 \quad (4)$$

其中:  $H_1(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$ 且

$$a_1 = (B + D) \left[ 1 - \frac{(1-\kappa_1)\beta_1\Lambda_1 + \kappa_1\beta_1 p_1 \Lambda_1}{(\mu_1+m)(B+D)} \right], \quad a_2 = BD(1 - \mathcal{R}_{01}^h).$$

若 $\mathcal{R}_{01}^h < 1$ , 则 $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ . 因此, 方程(4)的所有特征根均具有负实部. 故无感染平衡态 $E_{01}$ 是局部渐近稳定的. 当 $\mathcal{R}_{01} > 1$ 时, 则至少有一个特征值有正实部, 故 $E_{01}$ 不稳定.

为确保疾病的消除与初始状态无关, 需要验证无感染平衡态 $E_{01}$ 是全局渐近稳定的. 目前, 统计数据表明, 大部分易感者被COVID-19感染后都会经历无症状感染期, 且在无症状阶段具有一定的感染力. 下面的结论给出了 $\kappa_1 = 0$ 时无感染平衡态 $E_{01}$ 的全局渐近稳定性.

**定理 2** 若  $\kappa_1 = 0$  且  $\mathcal{R}_{01} < 1$ , 则模型(1)的无感染平衡态  $E_{01}$  是全局渐近稳定的.

**证明** 考虑下面的Lyapunov函数

$$V(t) = w_1 \left( S_1 - S_1^0 - S_1^0 \ln \frac{S_1}{S_1^0} \right) + w_2 A_1 + w_3 I_1 + w_4 \left( S_v - S_v^0 - S_v^0 \ln \frac{S_v}{S_v^0} \right) + w_5 I_v,$$

其中,

$$w_1 = w_2 = B, \quad w_3 = \frac{\Lambda_1 \beta_1 p_1 B}{(\mu_1 + m)D}, \quad w_4 = w_5 = \frac{\beta_{vh} \Lambda_1 B}{(\mu_1 + m)(1 - \mathcal{R}_{01}^v) \mu_v}.$$

直接计算函数  $V(t)$  沿模型(3)的全导数可得

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= w_1 \left( \frac{S_1 - S_1^0}{S_1} \right) [\Lambda_1 - \beta_{vh} S_1 I_v - \beta_1 S_1 (A_1 + p_1 I_1) - \mu_1 S_1 - m S_1] \\ &\quad + w_2 \{ [\beta_{vh} S_1 I_v + \beta_1 S_1 (A_1 + p_1 I_1)] - B A_1 \} + w_3 (\alpha_1 A_1 - D I_1) \\ &\quad + w_4 \left( \frac{S_v - S_v^0}{S_v} \right) (\Lambda_v - \beta_{vv} S_v I_v - \mu_v S_v) + w_5 (\beta_{vv} S_v I_v - \mu_v I_v) \\ &\leq -(\mu_1 + m) B \frac{(S_1 - S_1^0)^2}{S_1} - \frac{\beta_{vh} \Lambda_1 B}{(\mu_1 + m)(1 - \mathcal{R}_{01}^v)} \frac{(S_v - S_v^0)^2}{S_v} - (1 - \mathcal{R}_{01}^h) B A_1. \end{aligned}$$

因此, 若  $\mathcal{R}_{01} < 1$ , 则  $dV(t)/dt \leq 0$ , 且  $\{E_{01}\}$  是  $\{(S_1, A_1, I_1, S_v, I_v) \in \Omega \mid dV(t)/dt = 0\}$  中最大的不变集. 由LaSalle不变原理<sup>[12]</sup>可知,  $E_{01}$  在  $\Omega$  内是全局渐近稳定的.

对于模型(2), 如果不考虑迁移效应对疾病传播的影响, 即,  $m = 0$ , 类似于模型(1)的讨论, 模型(2)的基本再生数为

$$\mathcal{R}_{02} = \frac{(1 - \kappa_2) \beta_2 \Lambda_2 (q_2 + \mu_2) + (1 - \kappa_2) \beta_2 p_2 \alpha_2 \Lambda_2 + \kappa_2 \beta_2 p_2 \Lambda_2 (\alpha_2 + \theta_2 q_2 + \mu_2)}{\mu_2 (\mu_2 + q_2) (\alpha_2 + \theta_2 q_2 + \mu_2)}.$$

类似于定理1和2的证明, 有下面的结论.

**定理 3** 若  $m = 0$  且  $\mathcal{R}_{02} < 1$ , 则模型(2)的无感染平衡态  $E_{02}(\Lambda_2/\mu_2, 0, 0, 0, 0)$  是局部渐近稳定的,  $\mathcal{R}_{02} > 1$ , 则不稳定.

**定理 4** 若  $\kappa_2 = m = 0$  且  $\mathcal{R}_{02} < 1$ , 则模型(2)的无感染平衡态  $E_{02}$  是全局渐近稳定的.

### 3 无迁移效应模型的地方病平衡态的稳定性

本节将分别讨论无迁移效应下, 模型(1)和(2)的地方病平衡态的存在性与稳定性. 设  $E_1^*(S_1^*, A_1^*, I_1^*, Q_1^*, R_1^*, S_v^*, I_v^*)$  为模型(1)的正平衡态, 则

$$\begin{aligned} S_1^* &= \frac{(1 - \kappa_1) \Lambda_1 - B A_1^*}{(1 - \kappa_1)(\mu_1 + m)}, & I_1^* &= \frac{\kappa_1 B + (1 - \kappa_1) \alpha_1}{(1 - \kappa_1) D} A_1^*, & R_1^* &= \frac{\gamma_1 Q_1^*}{\mu_1}, \\ Q_1^* &= \frac{(1 - \kappa_1) \theta_1 q_1 D + \kappa_1 q_1 B + (1 - \kappa_1) q_1 \alpha_1}{(1 - \kappa_1)(\mu_1 + \gamma_1) D} A_1^*, & S_v^* &= \frac{\mu_v}{\beta_{vv}}, & I_v^* &= \frac{\Lambda_v \beta_{vv} - \mu_v^2}{\mu_v \beta_{vv}}. \end{aligned}$$

这里,  $A_1^*$  是方程  $g(x) = ax^2 + bx + c = 0$  的根,

$$a = -\frac{B^2}{(1 - \kappa_1) \Lambda_1} \mathcal{R}_{01}^h, \quad b = B(\mathcal{R}_{01}^h - 1) - \frac{\beta_{vh} \mu_v B (\mathcal{R}_{01}^v - 1)}{(\mu_1 + m) \beta_{vv}}, \quad c = \frac{(1 - \kappa_1) \beta_{vh} \mu_v \Lambda_1 (\mathcal{R}_{01}^v - 1)}{(\mu_1 + m) \beta_{vv}}.$$

显然当  $\mathcal{R}_{01}^h > 1$  时  $a < 0$ , 当  $\mathcal{R}_{01}^v > 1$  时  $c > 0$ . 因此, 当  $\mathcal{R}_{01} > 1$  时, 方程  $g(x) = 0$  存在唯一的正根, 即模型(1)存在唯一的地方病平衡态.

由于地方病平衡态的表达式相对复杂, 这就导致在验证特征方程的根都具有负实部时的阈值条件下很难验证. 虽然这个工作可以借助数学软件来完成, 但是整个过程过于繁琐且得到的条件很难验证. 因此, 此处仅讨论  $\kappa_1 = \beta_{vh} = 0$  时模型(1)地方病平衡态的稳定性.

**定理 5** 若  $\kappa_1 = \beta_{vh} = 0$  且  $\mathcal{R}_{01} > 1$ , 则模型(1)的地方病平衡态  $E_1^*$  是局部渐近稳定的.

**证明** 当  $\kappa_1 = 0$  时,  $S_1^* = BD/\beta_1(D + p_1 \alpha_1)$ . 模型(1)在地方病平衡态  $E_1^*$  处的局部稳定性可由其特征方程决定

$$(\lambda + \beta_{vv} I_v^* + \mu_v)(\lambda - \beta_{vv} S_v^* + \mu_v)(\lambda + \gamma_1 + \mu_1)(\lambda + \mu_1) H_2(\lambda) = 0 \tag{5}$$

这里,  $H_2(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ 且

$$\begin{aligned} a_1 &= C + \mu_1 + m + B + D - \beta_1 S_1^* = C + \mu_1 + m + B + D - \frac{BD}{D + p_1 \alpha_1} > C + \mu_1 + m + D, \\ a_2 &= (C + \mu_1 + m)(B + D) + BD - \beta_1 S_1^*(\mu_1 + m + D + p_1 \alpha_1) > C(B + D) + (\mu_1 + m)D, \\ a_3 &= BCD - (\mu_1 + m)\beta_1 D S_1^* + (\mu_1 + m)BD - (\mu_1 + m)\beta_1 p_1 \alpha_1 S_1^* = BCD, \end{aligned}$$

$C = \beta_1(A_1^* + p_1 I_1^*) = (\mu_1 + m)(\mathcal{R}_{01}^h - 1)$ . 显然, 当 $\mathcal{R}_{01}^h > 1$ 时, 则 $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ 且

$$\begin{aligned} & a_1 a_2 - a_3 \\ &= (C + \mu_1 + m + B + D - \beta_1 S_1^*) [(C + \mu_1 + m)(B + D) + BD - \beta_1 S_1^*(\mu_1 + m + D + p_1 \alpha_1)] - BCD \\ &\geq CD^2 + C(B + D)(C + \mu_1 + m) + (\mu_1 + m)D(C + \mu_1 + m + D) > 0. \end{aligned}$$

因此, 由Routh-Hurwitz准则可知, 当 $\mathcal{R}_{01} > 1$ 时, 特征方程 $H_2(\lambda) = 0$ 的所有特征根均具有负实部. 进而, 特征方程(5)的所有特征根均具有负实部. 即, 模型(1)的地方病平衡态 $E_1^*$ 是局部渐近稳定的.

关于模型(1)中疾病的一致持久性有下面的结论.

**定理 6** 若 $\beta_{vh} = 0$ 且 $\mathcal{R}_{01} > 1$ , 则模型(1)是一致持久的. 即, 存在正常数 $\varepsilon$ , 使得 $\liminf_{t \rightarrow \infty} (S_1(t), A_1(t), I_1(t), Q_1(t), R_1(t), S_v(t), I_v(t)) \geq (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$ .

**证明** 由模型(1)的第一个和第六个方程可知

$$\frac{dS_1(t)}{dt} \geq \Lambda_1 - \left( \frac{\beta_1 \Lambda_1}{\mu_1 + m} + \mu_1 + m \right) S_1(t), \quad \frac{dS_v(t)}{dt} \geq \Lambda_v - \left( \frac{\beta_{vv} \Lambda_v}{\mu_v} + \mu_v \right) S_v(t),$$

故

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} S_1(t) \geq \frac{\Lambda_1(\mu_1 + m)}{\beta_1 \Lambda_1 + (\mu_1 + m)^2} := \varepsilon_1, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} S_v(t) \geq \frac{\Lambda_v \mu_v}{\beta_{vv} \Lambda_v + \mu_v^2} := \varepsilon_6.$$

类似的, 若 $\liminf_{t \rightarrow \infty} I_v(t) \geq \varepsilon_7 > 0$ , 可以证明存在常数 $\varepsilon_2 > 0$ 和 $\varepsilon_3 > 0$ 使得 $\liminf_{t \rightarrow \infty} A_1(t) \geq \varepsilon_2, \liminf_{t \rightarrow \infty} I_1(t) \geq \varepsilon_3$ . 进而, 存在常数 $\varepsilon_4 > 0$ 和 $\varepsilon_5 > 0$ 使得 $\liminf_{t \rightarrow \infty} Q_1(t) \geq \varepsilon_4, \liminf_{t \rightarrow \infty} R_1(t) \geq \varepsilon_5$ . 因此, 现只需证明存在正常数 $\varepsilon_7$ 使得 $\liminf_{t \rightarrow \infty} I_v(t) \geq \varepsilon_7$ .

令 $\mathbb{X} = \{(S_1, A_1, I_1, Q_1, R_1, S_v, I_v) \mid S_1 > 0, A_1 \geq 0, I_1 \geq 0, Q_1 \geq 0, R_1 \geq 0, S_v > 0, I_v \geq 0\}$ ,  $\mathbb{X}_0 = \{(S_1, A_1, I_1, Q_1, R_1, S_v, I_v) \in X \mid A_1 + I_1 + I_v > 0\}$ ,  $\partial \mathbb{X}_0 = \mathbb{X} \setminus \mathbb{X}_0 = \{(S_1, A_1, I_1, Q_1, R_1, S_v, I_v) \in X \mid A_1 I_1 I_v = 0\}$ . 显然,  $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{X}_0$ 都是模型(1)的正向不变集. 进一步, 令 $\mathbb{M}_\partial = \{(S_1(0), \dots, I_v(0)) \mid (S_1(t), A_1(t), I_1(t), Q_1(t), R_1(t), S_v(t), I_v(t)) \in \partial \mathbb{X}_0, \forall t \geq 0\}$ . 下面证明  $\mathbb{M}_\partial = \{(S_1, 0, 0, Q_1, R_1, S_v, 0) \mid S_1 > 0, Q_1 \geq 0, R_1 \geq 0, S_v > 0\}$ . 事实上, 如果 $(S_1(0), A_1(0), I_1(0), Q_1(0), R_1(0), S_v(0), I_v(0)) \in \mathbb{M}_\partial$ , 则有 $A_1(t) = I_1(t) = I_v(t) \equiv 0, t \geq 0$ . 如若不然, 假设存在某个 $t_0 \geq 0$ 使得 $A_1(t_0) > 0$ , 或 $I_1(t_0) > 0$ , 或 $I_v(t_0) > 0$ 成立, 则有 $(S_1(t), A_1(t), I_1(t), Q_1(t), R_1(t), S_v(t), I_v(t)) \in \mathbb{X}_0$ . 这与 $(S_1(0), A_1(0), I_1(0), Q_1(0), R_1(0), S_v(0), I_v(0)) \in \mathbb{M}_\partial$ 矛盾.

记 $\omega(S_1(0), A_1(0), I_1(0), Q_1(0), R_1(0), S_v(0), I_v(0))$ 为从初始值 $(S_1(0), A_1(0), I_1(0), Q_1(0), R_1(0), S_v(0), I_v(0)) \in \mathbb{X}$ 出发的解轨线的 $\omega$ 极限集. 令集合 $\Omega' = \cup \{\omega(S_1(0), A_1(0), I_1(0), Q_1(0), R_1(0), S_v(0), I_v(0)) \mid (S_1(0), A_1(0), I_1(0), Q_1(0), R_1(0), S_v(0), I_v(0)) \in \mathbb{M}_\partial\}$ , 则在集合 $\mathbb{M}_\partial$ 上我们有 $A_1(t) = I_1(t) = I_v(t) = 0$ 恒成立. 因此, 在集合 $\mathbb{M}_\partial$ 上, 模型(1)退化为如下子系统

$$\begin{cases} \frac{dS_1(t)}{dt} = \Lambda_1 - (\mu_1 + m)S_1(t) \\ \frac{dQ_1(t)}{dt} = -(\gamma_1 + \mu_1)Q_1(t) \\ \frac{dR_1(t)}{dt} = \gamma_1 Q_1(t) - \mu_1 R_1(t) \\ \frac{dS_v(t)}{dt} = \Lambda_v - \mu_v S_v(t) \end{cases} \quad (6)$$

显然, 模型(6)存在唯一的平衡态 $\tilde{E}_{01} = (\Lambda_1/(\mu_1 + m), 0, 0, \Lambda_v/\mu_v)$ 且是全局渐近稳定的. 因此,  $\tilde{E}_{01}$ 是模型(1)在 $\mathbb{M}_\partial$ 上的唯一平衡态且是全局渐近稳定的. 因此 $\Omega' = \{\tilde{E}_{01}\}$ , 且 $\tilde{E}_{01}$ 为 $\Omega'$ 的一个孤立的非循环的覆盖.

最后, 证明

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} d((S_1(t), A_1(t), I_1(t), Q_1(t), R_1(t), S_v(t), I_v(t)), \tilde{E}_{01}) > 0 \tag{7}$$

其中 $(S_1(t), A_1(t), I_1(t), Q_1(t), R_1(t), S_v(t), I_v(t))$ 是模型(1)满足初值 $(S_1(0), A_1(0), I_1(0), Q_1(0), R_1(0), S_v(0), I_v(0)) \in \mathbb{X}_0$ 的解. 由文献[13]可知, 若 $W^s(\tilde{E}_{01}) \cap \mathbb{X}_0 = \emptyset$ 成立,  $W^s(\tilde{E}_{01})$ 为 $\tilde{E}_{01}$ 的稳定流形, 则(7)成立. 假设 $W^s(\tilde{E}_{01}) \cap \mathbb{X}_0 = \emptyset$ 不成立, 则存在一个 $(S_1(0), A_1(0), I_1(0), Q_1(0), R_1(0), S_v(0), I_v(0)) \in \mathbb{X}_0$ 使得从该初值出发的解 $(S_1(t), A_1(t), I_1(t), Q_1(t), R_1(t), S_v(t), I_v(t)) \in \mathbb{X}_0$ 满足当 $t \rightarrow \infty$ 时, 有

$$S_1(t) \rightarrow \frac{\Lambda_1}{\mu_1 + m}, A_1(t) \rightarrow 0, I_1(t) \rightarrow 0, Q_1(t) \rightarrow 0, R_1(t) \rightarrow 0, S_v(t) \rightarrow \frac{\Lambda_v}{\mu_v}, I_v(t) \rightarrow 0 \tag{8}$$

若 $\mathcal{R}_{01}^h > 1, \mathcal{R}_{01}^v > 1$ , 则可以选取充分小的 $\varepsilon$ , 使得

$$\delta_1 := \frac{[(1 - \kappa_1)\beta_1 D + (1 - \kappa_1)\beta_1 p_1 \alpha_1 + \kappa_1 \beta_1 p_1 B] \left( \frac{\Lambda_1}{\mu_1 + m} - \varepsilon \right)}{BD} - 1 > 0, \delta_2 := \frac{\beta_{vv} \left( \frac{\Lambda_v}{\mu_v} - \varepsilon \right)}{\mu_v} - 1 > 0.$$

进一步, 由(8)可知, 对上述的 $\varepsilon$ , 存在一个 $T > 0$ 使得

$$\left| S_1(t) - \frac{\Lambda_1}{\mu_1 + m} \right| < \varepsilon, \left| S_v(t) - \frac{\Lambda_v}{\mu_v} \right| < \varepsilon, 0 < A_1(t), I_1(t), Q_1(t), R_1(t), I_v(t) < \varepsilon \tag{9}$$

选取 $W(t) = (1 + D/\alpha_1 p_1)A_1(t) + BI_1(t)/\alpha_1 + I_v(t)$ , 则 $W(t)$ 沿模型(1)的全导数为

$$\begin{aligned} \frac{dW(t)}{dt} &= \left(1 + \frac{D}{\alpha_1 p_1}\right) \{ (1 - \kappa_1)[\beta_1 S_1(t)(A_1(t) + p_1 I_1(t)) - BA_1(t)] \} + (\beta_{vv} S_v(t) - \mu_v) I_v(t) \\ &\quad + \frac{B}{\alpha_1} \{ \kappa_1 [\beta_1 S_1(t)(A_1(t) + p_1 I_1(t)) + \alpha_1 A_1(t) - DI_1(t)] \} \\ &\geq \frac{BD}{\alpha_1 p_1} \left[ \frac{[(1 - \kappa_1)\beta_1 D + (1 - \kappa_1)\beta_1 p_1 \alpha_1 + \kappa_1 \beta_1 p_1 B] \left( \frac{\Lambda_1}{\mu_1 + m} - \varepsilon \right)}{BD} - 1 \right] A_1(t) \\ &\quad + \frac{BD}{\alpha_1} \left[ \frac{[(1 - \kappa_1)\beta_1 D + (1 - \kappa_1)\beta_1 p_1 \alpha_1 + \kappa_1 \beta_1 p_1 B] \left( \frac{\Lambda_1}{\mu_1 + m} - \varepsilon \right)}{BD} - 1 \right] I_1(t) + \mu_v \left[ \frac{\beta_{vv} (\Lambda_v / \mu_v - \varepsilon)}{\mu_v} - 1 \right] I_v(t). \end{aligned}$$

故当 $t \rightarrow \infty$ 时,  $W(t) \rightarrow \infty$ . 这与 $W(t)$ 有界矛盾, 故不等式(7)成立. 因此, 根据文献[14]中的定理4.6可知, 存在一个常数 $\varepsilon_7 > 0$ , 使得 $\liminf_{t \rightarrow \infty} I_v(t) \geq \varepsilon_7$ . 令 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_7\}$ , 则有 $\liminf_{t \rightarrow \infty} (S_1(t), A_1(t), I_1(t), Q_1(t), R_1(t), S_v(t), I_v(t)) \geq (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$ .

类似的, 关于模型(2)在 $m = 0$ 时地方病平衡态的存在性与稳定性以及疾病的持久性, 我们有下列结论.

**定理 7** 若 $\kappa_2 = m = 0$ 且 $\mathcal{R}_{02} > 1$ , 则模型(2)的地方病平衡态 $E_2^*$ 是局部渐近稳定的, 这里

$$\begin{aligned} S_2^* &= \frac{(1 - \kappa_2)\Lambda_2 - (\alpha_2 + \theta_2 q_2 + \mu_2)A_2^*}{(1 - \kappa_2)\mu_2}, & I_2^* &= \frac{\kappa_2(\alpha_2 + \theta_2 q_2 + \mu_2) + (1 - \kappa_2)\alpha_2}{(1 - \kappa_2)(q_2 + \mu_2)} A_2^*, \\ R_2^* &= \frac{\gamma_2 Q_2^*}{\mu_2}, & Q_2^* &= \frac{(1 - \kappa_2)(q_2 + \mu_2)\theta_2 q_2 + \kappa_2 q_2(\alpha_2 + \theta_2 q_2 + \mu_2) + (1 - \kappa_2)q_2 \alpha_2}{(1 - \kappa_2)(\mu_2 + q_2)(\mu_2 + \gamma_2)} A_2^*. \end{aligned}$$

**定理 8** 若 $m = 0$ 且 $\mathcal{R}_{02} > 1$ , 则模型(2)是一致持久的. 即, 存在正常数 $\varepsilon$ , 使得 $\liminf_{t \rightarrow \infty} (S_2(t), A_2(t), I_2(t), Q_2(t), R_2(t)) \geq (\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$ .

### 4 全系统的稳定性分析

显然, 全系统(1)和(2)总存在无感染平衡态 $E_0(S_1^0, 0, 0, 0, 0, S_v^0, 0, S_2^0, 0, 0, 0, 0)$ , 其中

$$\begin{aligned} S_1^0 &= \frac{\Lambda_1}{\mu_1 + m}, & S_v^0 &= \frac{\Lambda_v}{\mu_v}, & S_2^0 &= \frac{\Lambda_2}{\mu_2} + \frac{m\Lambda_1}{\mu_2(\mu_1 + m)}, \\ \mathcal{R}_{01}^h &= \frac{(1 - \kappa_1)\beta_1 D + (1 - \kappa_1)\beta_1 p_1 \alpha_1 + \kappa_1 \beta_1 p_1 B}{BD} S_1^0, & \mathcal{R}_{01}^v &= \frac{\beta_{vv} S_v^0}{\mu_v}, \\ \tilde{\mathcal{R}}_{02} &= \frac{(1 - \kappa_2)(q_2 + \mu_2)\beta_2 + (1 - \kappa_2)\beta_2 p_2 \alpha_2 + \kappa_2 \beta_2 p_2 (\alpha_2 + \theta_2 q_2 + \mu_2)}{(\mu_2 + q_2)(\alpha_2 + \theta_2 q_2 + \mu_2)} S_2^0. \end{aligned}$$

令  $\mathcal{R}_0 = \max\{\mathcal{R}_{01}, \tilde{\mathcal{R}}_{02}\}$ , 关于全系统的无感染平衡态的稳定性, 有下面的结论.

**定理 9** 当  $\mathcal{R}_0 < 1$  时, 全系统(1)和(2)的无感染平衡态  $E_0$  是局部渐近稳定的, 而当  $\mathcal{R}_0 > 1$  时, 是不稳定的.

**证明** 全系统(1)和(2)在无感染平衡态  $E_0$  处线性化系统系数矩阵的特征方程为

$$(\lambda + \mu_1 + m)(\lambda + \gamma_1 + \mu_1)(\lambda + \mu_1)(\lambda + \mu_v) [\lambda - \mu_v(\mathcal{R}_{01}^v - 1)] (\lambda + \mu_2) H_1(\lambda) H_3(\lambda) = 0 \quad (10)$$

其中  $H_3(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_2$ ,  $a_1 = \alpha_2 + \theta_2 q_2 + \mu_2 - (1 - \kappa_2)\beta_2 S_2^0 + q_2 + \mu_2 - \kappa_2 \beta_2 p_2 S_2^0$ ,  $a_2 = (\alpha_2 + \theta_2 q_2 + \mu_2)(q_2 + \mu_2)(1 - \tilde{\mathcal{R}}_{02})$ . 通过直接计算可知, 当  $\tilde{\mathcal{R}}_{02} < 1$  时, 有  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ . 因此, 当  $\mathcal{R}_0 < 1$  时, 方程(10)所有特征根皆是负的. 即, 无感染平衡态  $E_0$  是局部渐近稳定的. 而当  $\mathcal{R}_0 > 1$ , 至少有一个特征根为正的, 故无感染平衡态  $E_0$  是不稳定的.

由定理5~定理8, 关于全系统(1)和(2)边界平衡态的存在性与稳定性, 疾病的持久性, 我们有如下结论.

**定理 10** 假设  $\kappa_2 = 0$ , 若  $\mathcal{R}_{01} < 1$  而  $\tilde{\mathcal{R}}_{02} > 1$ , 则全系统(1)和(2)的边界平衡态  $(S_1^0, 0, 0, 0, 0, S_v^0, 0, S_2^*, A_2^*, I_2^*, Q_2^*, R_2^*)$  是局部渐近稳定的.

**定理 11** 若  $\mathcal{R}_{01} > 1$ , 全系统(1)和(2)是一致持久的.

**注** 定理11表明, 如果高风险地区的疫情得不到控制, 那么要么彻底阻断高风险地区向低风险地区的人口流动, 要么对高风险地区的流出人员进行必要的筛查和隔离措施, 把牢外防输入关口.

### 5 数值模拟

为了解释主要的理论结果, 探讨防控措施的有效性, 我们给出相应的数值模拟, 这里使用四阶的Runge-Kutta方法和数学软件MATLAB进行数值模拟. 选取模型的基本参数为

$$\Lambda_1 = 1, \Lambda_2 = 1, \Lambda_v = 1\ 000, \mu_1 = \frac{1}{70 \times 365}, \mu_2 = \frac{1}{70 \times 365}, \mu_v = \frac{1}{1 \times 365},$$

直接计算基本再生数为  $\mathcal{R}_0 = 0.93 < 1$ , 此时染病人口和染病媒介的数量均趋于零, 即无感染平衡态  $E_0$  是局部渐近稳定的, 如图1左图所示. 而当  $\mathcal{R}_0 = 14.878\ 6 > 1$ , 图1右图表明地方病平衡态是局部渐近稳定的.

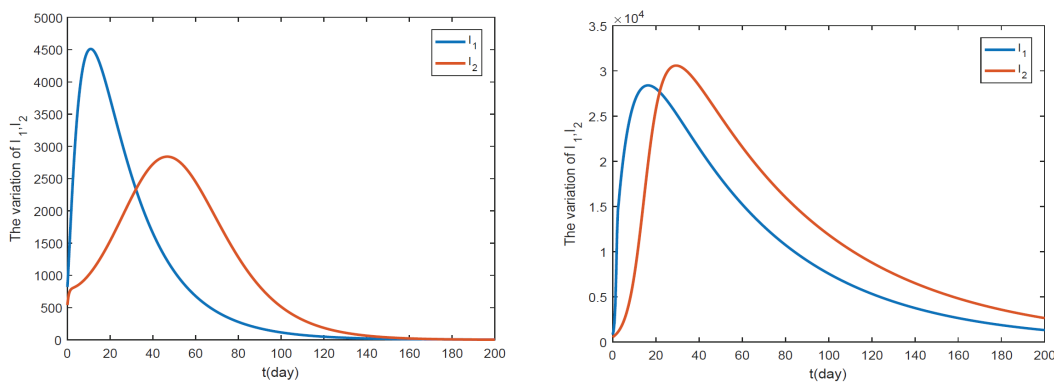


图 1 系统(1)和系统(2)无感染平衡态和地方病平衡态的稳定性

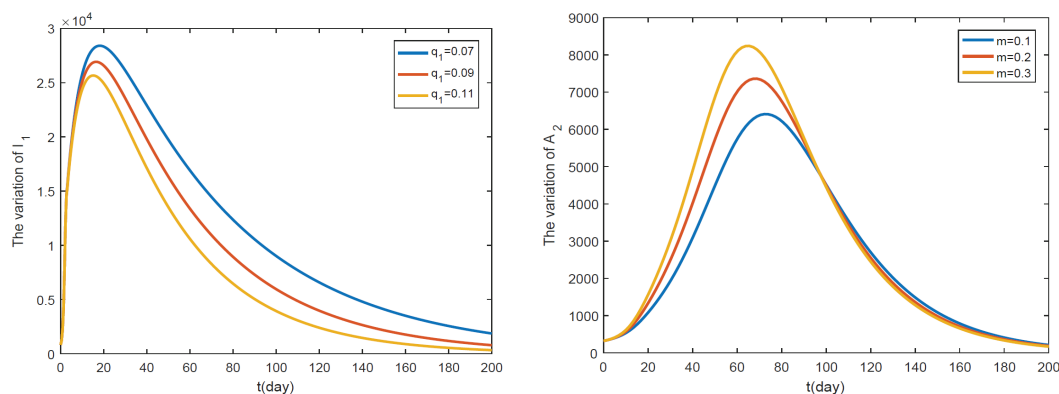


图 2 隔离率  $q_1$  以及迁移率  $m$  对 COVID-19 的影响

下面讨论隔离率和人口迁移率对COVID-19传播的影响. 为此, 依次选取隔离率 $q_1$ 的值为0.07, 0.09, 0.11, 从图2的左图不难看出, 随着 $q_1$ 增大第一个斑块的染病人数显著减小. 换句话说, 在疾病的传播过程中对染病者进行及时有效的隔离, 是控制疾病的重要措施之一. 另一方面, 如果将第一斑块到第二斑块的迁移率 $m$ 的值从0.1增加到0.2和0.3, 图2的右图显示随着 $m$ 的增加, 第二个斑块病例的峰值有明显的增加, 这将对第二斑块的疫情防控带来极大的隐患, 给有限的医疗资源带来严峻挑战, 特别是发展中国家和欠发达地区. 因此, 对本地区的COVID-19的疑似病例或确诊病例进行必要的隔离, 对疫情高风险地区的外来人口实施严格的医学观察依旧是当前乃至今后一段时期疫情防控的重要措施.

## 6 结论与讨论

考虑到地区之间的人口流动和COVID-19传播过程中无症状感染者的普遍存在性, 以及基于当前疫情防控措施, 本文提出了一类具有人口迁移效应和隔离策略的两斑块COVID-19传播数学模型. 首先, 不考虑迁移效应下, 给出了各子系统的基本再生数的精确表达式, 其决定了无感染平衡态和地方病平衡态的存在性与稳定性, 以及疾病的持久性. 进一步, 讨论了全系统的无感染平衡态的稳定性, 以及各斑块基本再生数大于1或小于1的情形下全系统各类边界平衡点的存在性与稳定性, 疾病的持久性.

在当前疫情防控局势依旧严峻, 国内疫情零星散发, 在全国复工复产有序推进下, 人口流动不可避免. 在此背景下, 各个地区如何采取有效的防控措施, 降低疫情对人民生活的影响, 一直是各级政府和疾病防控部门关注的重点问题之一. 依据本文所建立的模型和得到的理论结果与数值模拟, 我们不难发现: (1) 严把高风险地区人员的流出, 特别是对高风险地区流出人员进行必要的筛查并进行医学观察是低风险地区疫情防控的第一道防线; (2) 对于低风险地区内部, 疫情防控的重点应当放在对高风险人群的定期筛查方面, 通过及时的筛查将无症状感染者在感染初期识别出来并进行有效的隔离, 避免疫情反弹.

### 参考文献:

- [1] CHEN T M, RUI J, WANG Q P, et al. A mathematical model for simulating the phase-based transmissibility of a novel coronavirus[J]. *Infectious Diseases of Poverty*, 2020, 9: 24.
- [2] LI Q, GUAN X H, WU P, et al. Early transmission dynamics in Wuhan, China, of novel coronavirus-infected pneumonia[J]. *The New England Journal of Medicine*, 2020, 382(13): 1199-1207.
- [3] TANG B, WANG X, LI Q, et al. Estimation of the transmission risk of the 2019-nCoV and its implication for public health interventions[J]. *Journal of Clinical Medicine*, 2020, 9: 462.
- [4] SHAO N, ZHONG M, YAN Y, et al. Dynamic models for coronavirus disease 2019 and data analysis[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2020, 43: 4943-4949.
- [5] BRAUER F, VAN DEN DRIESSCHE P. Model for transmission of disease with immigration of infectives[J]. *Mathematical Biosciences*, 2001, 171(2): 143-154.
- [6] WANG W D, MULONE G. Threshold of disease transmission in a patch environment[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2003, 285(1): 321-335.
- [7] WANG W D. Population dispersal and disease spread[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B*, 2004, 4: 797-804.
- [8] WANG W D, ZHAO X Q. An epidemic model in a patchy environment[J]. *Mathematical Biosciences*, 2004, 190(1): 97-112.
- [9] 李怀阳, 张龙. 两斑块单向脉冲扩散两种群竞争系统研究[J]. *新疆大学学报(自然科学版)*, 2012, 29(3): 306-312.
- [10] 徐高, 张龙. 两斑块间具有非对称脉冲扩散的带时滞的捕食食饵系统的分析[J]. *新疆大学学报(自然科学版)*, 2014, 31(3): 280-288.
- [11] MARTCHEVA M, ANTMAN S, HOLMES P. An introduction to mathematical epidemiology[M]. Boston: Springer, 2015.
- [12] LASALLE J P. The stability of dynamical systems[M]. Philadelphia PA: SIAM, 1976.
- [13] SUN C J, YANG W, ARINO J, et al. Effect of media-induced social distancing on disease transmission in a two patch setting[J]. *Mathematical Biosciences*, 2011, 230: 87-95.
- [14] THIEME H R. Persistence under relaxed point-dissipativity (with application to an endemic model)[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1993, 24: 407-435.