

不确定微分方程中时变参数的极大似然估计*

张贵东, 盛玉红[†]

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

摘要: 对不确定微分方程中的时变参数进行估计. 首先利用不确定极大似然估计的方法获得与观测值时刻对应的时变参数估计值, 然后将这一系列时变参数估计值利用回归分析的方法进行线性或者非线性拟合, 得到时变参数估计. 其次为了验证时变参数估计值的合理性, 给出了带有时变参数的不确定微分方程的 α -轨道及其性质和可决系数 R^2 , 对时变参数是否合理进行了评判. 最后给出一个新型冠状病毒传播模型的数值实例验证估计方法的有效性.

关键词: 不确定理论; 不确定微分方程; 不确定极大似然估计; 时变参数

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2021.09.22.0002

中图分类号: O213.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2022)04-0421-011

引文格式: 张贵东, 盛玉红. 不确定微分方程中时变参数的极大似然估计[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2022, 39(4): 421-431.

英文引文格式: ZHANG Guidong, SHENG Yuhong. Maximum likelihood estimation of time-varying parameters in uncertain differential equations[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2022, 39(4): 421-431.

Maximum Likelihood Estimation of Time-Varying Parameters in Uncertain Differential Equations

ZHANG Guidong, SHENG Yuhong

(School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China)

Abstract: This paper focuses on the estimation of time-varying parameters in uncertain differential equations. Firstly, the time-varying parameter estimates corresponding to the moments of observations were obtained by using the method of uncertain maximum likelihood estimation, and then this series of time-varying parameter estimates were fitted linearly or non-linearly by using the method of regression analysis to obtain the time-varying parameter estimates. Secondly, in order to evaluate the reasonableness of the time-varying parameter estimates, the α -paths and properties of the uncertain differential equations with time-varying parameters and the decidability factor R^2 were given, and the reasonableness of the time-varying parameters was evaluated. Finally, the validity of the approach was tested by using the example of the COVID-19 infectious disease model.

Key words: uncertainty theory; uncertain differential equations; uncertain maximum likelihood estimation; time-varying parameters

0 引言

为了解决使用随机微分方程建模时会出现当时间趋于 0 时其所描述对象的速度趋于无穷的问题, 文献 [1] 在建立不确定理论的基础之上, 提出了刘过程^[2], 由于不确定(刘)过程的提出, 不确定微分方程也被定义出来, 不确定微分方程是另一种对带有噪声影响的系统进行建模的数学工具, 其能够有效地避免上述用随机微分方程建模所产生的问题. 不确定微分方程在很多领域得到了应用, 比如最优控制^[3]、谣言传播^[4]等. 在上述一些领域的

* 收稿日期: 2021-09-22

基金项目: 国家自然科学基金(12061072); 国家重点研发计划项目(2018YFC0825504).

作者简介: 张贵东(1997-), 男, 硕士生, 从事不确定微分方程的研究, E-mail: zgd@stu.xju.edu.cn.

[†] 通讯作者: 盛玉红(1970-), 女, 博士, 副教授, 主要从事不确定理论、不确定微分方程及应用的研究, E-mail: shengyuhong1@sina.com.

研究与应用过程中,演化出了延迟不确定微分方程^[5]、带跳不确定微分方程^[6],等等.对于这些不确定微分方程来说,首要的研究问题是稳定性和解的存在唯一性.在这方面文献[7]研究了多维不确定微分方程解的存在唯一性,文献[8]研究了不确定微分方程的稳定性,文献[9]研究了多因素不确定微分方程的 p -阶矩稳定,等等.其次不确定微分方程中难免会出现一些未知的参数,那么作为不确定微分方程研究的另一个部分,不确定微分方程的参数估计也被提出来.文献[10]首先利用最小二乘的思想获得了不确定微分方程的参数估计,随后文献[11]利用矩的思想得到了不确定微分方程的参数估计,但是矩估计在有些时候不能得到解,于是文献[12]就提出了广义矩估计的概念来弥补这一缺陷.以及利用离散的数据通过 α -轨道的方法获得估计值^[13],文献[14]提出基于解的不确定微分方程的参数估计方法,文献[15]提出高阶不确定微分方程的参数估计,值得一提的是这些方法都是用来估计常数未知参数的,那么如何来估计随着时间变化的参数,文献[16]基于改写的矩估计方法得到了时变参数的估计,然而有时候矩估计方法会失效,并且此研究也未说明获得的时变参数估计是否合理这一问题.

基于上述分析,本文提出一种新的估计时变参数的方法,即改写不确定极大似然估计法,利用样本数据得到一些固定时刻的参数估计值,然后利用拟合的思想将获得的参数估计值进行线性或者非线性拟合,从而获得时变参数估计,并且给出一种时变参数拟合函数是否合理的判断方法,即要求获得的时变参数拟合函数使得所有样本数据都落在两条 α -轨道之间.

1 预备知识

这个部分将介绍不确定理论中的一些基本定理,对于理解下文的推导以及证明十分有帮助.

定义 1^[2-3] 假设 \mathcal{L} 是非空集合 Γ 上的 σ 代数,集函数 $\mathcal{M}: \mathcal{L} \rightarrow [0, 1]$ 称为不确定测度,若其满足下述公理:

公理 1 (正则性) 对于全集 Γ ,有 $\mathcal{M}\{\Gamma\} = 1$,

公理 2 (对偶性) 对于任意的事件 A ,有 $\mathcal{M}\{A\} + \mathcal{M}\{A^c\} = 1$,

公理 3 (次可列可加性) 对于可数事件序列 A_1, A_2, \dots ,有

$$\mathcal{M}\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{M}\{A_i\},$$

并将 $(\Gamma, \mathcal{L}, \mathcal{M})$ 称为不确定空间.

公理 4 (乘积公理) 假设 $(\Gamma_k, \mathcal{L}_k, \mathcal{M}_k)$ ($k=1, 2, \dots$)为不确定空间,则有

$$\mathcal{M}\left\{\prod_{k=1}^{\infty} A_k\right\} = \bigwedge_{k=1}^{\infty} \mathcal{M}_k\{A_k\},$$

其中: A_k 为 Γ_k 中的任意事件.

定义 2^[2] 不确定测度 \mathcal{M} 是一个单调递增集函数,那么对于任给事件 A_1, A_2 ,如果有 $A_1 \subset A_2$,那么有

$$\mathcal{M}(A_1) \leq \mathcal{M}(A_2).$$

定义 3^[2] 假设 ξ 为不确定变量,对于任给定的实数 x ,如果有

$$\Phi(x) = \mathcal{M}\{\xi \leq x\}$$

成立,那么 $\Phi(x)$ 称为不确定变量 ξ 的不确定分布函数.

定义 4^[2] 假设 ξ 为具有正则不确定分布 $\Phi(x)$ 的不确定变量,则逆函数 $\Phi^{-1}(\alpha)$ 称为 ξ 的逆不确定分布.

定义 5^[2] 假设 ξ 为不确定变量,若

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} \mathcal{M}\{\xi \geq x\} dx - \int_{-\infty}^0 \mathcal{M}\{\xi \leq x\} dx$$

两个积分中至少一个有限,那么 $E[\xi]$ 称为不确定变量 ξ 的期望值.并且若 ξ 是具有正则不确定分布 $\Phi(x)$ 的不确定变量,那么期望等价于下面定义

$$E[\xi] = \int_0^1 \Phi^{-1}(\alpha) d\alpha.$$

定义 6^[2] 假设 ξ 是具有有限期望值 e 的不确定变量, 那么

$$V[\xi] = E[(\xi - e)^2]$$

称为不确定变量 ξ 的方差.

定义 7^[3] 不确定过程 C_t 被称为刘过程, 若其满足:

- (1) $C_0 = 0$ 并且对于所有的样本轨道都是 Lipschitz 连续的,
- (2) C_t 具有平稳独立增量,
- (3) 对于 $x \in \mathfrak{R}$, 每个增量 $C_{s+t} - C_s$ 都服从正态不确定分布 $\mathcal{N}(0, t)$, 其分布函数为

$$\Phi_t(x) = \left(1 + \exp\left(-\frac{\pi x}{\sqrt{3t}}\right)\right)^{-1},$$

逆分布函数为

$$\Phi_t^{-1}(\alpha) = \frac{t\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

定义 8^[2] 假设 C_t 为刘过程, f 和 g 为可测实函数, 则

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dC_t$$

称为不确定微分方程.

定义 9^[2] 假设 α 是 $(0, 1)$ 中的数, 如果不确定微分方程

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dC_t \quad (1)$$

可以求解相应的常微分方程

$$dX_t^\alpha = f(t, X_t^\alpha)dt + |g(t, X_t^\alpha)| \Phi^{-1}(\alpha) dt \quad (2)$$

其中: $\Phi^{-1}(\alpha)$ 为标准正态不确定逆分布函数

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{1-\alpha},$$

那么常微分方程 (2) 的解是不确定微分方程 (1) 的 α - 轨道.

2 未知时变参数的不确定极大似然估计

这一部分将推导利用观测数据得到不确定微分方程中未知时变参数的估计值. 考虑带有未知时变参数的不确定微分方程

$$dX_t = f(t, X_t; \mu_t)dt + g(t, X_t; \theta_t)dC_t \quad (3)$$

其中: μ_t 和 θ_t 是需要估计的未知时变参数, 假设有 n 个观测值 $x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}$, 我们利用 m 个观测值估计 μ_{t_j} 和 θ_{t_j} ($j=1, 2, \dots, n-m+1$), 首先对当 $t=t_1$ 时的 μ_{t_1} 和 θ_{t_1} 的极大似然估计值 $\mu_{t_1}^*$ 和 $\theta_{t_1}^*$ 分析如下, 对于不确定微分方程 (3) 进行 Euler 差分, 得

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + f(t_i, X_{t_i}; \mu_{t_1})(t_{i+1} - t_i) + g(t_i, X_{t_i}; \theta_{t_1})(C_{t_{i+1}} - C_{t_i}) \quad (i=1, 2, \dots, m-1),$$

则

$$\frac{X_{t_{i+1}} - X_{t_i} - f(t_i, X_{t_i}; \mu_{t_1})(t_{i+1} - t_i)}{g(t_i, X_{t_i}; \theta_{t_1})(t_{i+1} - t_i)} = \frac{(C_{t_{i+1}} - C_{t_i})}{(t_{i+1} - t_i)},$$

根据定义 7, 知道

$$\frac{(C_{t_{i+1}} - C_{t_i})}{(t_{i+1} - t_i)} \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

那么会有

$$\frac{X_{t_{i+1}} - X_{t_i} - f(t_i, X_{t_i}; \mu_{t_1})(t_{i+1} - t_i)}{g(t_i, X_{t_i}; \theta_{t_1})(t_{i+1} - t_i)} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (4)$$

将观测数据代入方程(4), 则有

$$h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1}) = \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i} - f(t_i, x_{t_i}; \mu_{t_1})(t_{i+1} - t_i)}{g(t_i, x_{t_i}; \theta_{t_1})(t_{i+1} - t_i)},$$

我们不妨将 $h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1})$ 的值视为来自正态不确定分布 $\mathcal{N}(e, \sigma)$ 的 $m-1$ 个样本, $\mathcal{N}(e, \sigma)$ 的不确定分布为

$$\Phi(x) = \left(1 + \exp\left(\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{3}\sigma}\right)\right)^{-1},$$

则其导数为

$$\dot{\Phi}(x) = \frac{\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} \exp\left(\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{3}\sigma}\right)}{\left(1 + \exp\left(\frac{\pi(e-x)}{\sqrt{3}\sigma}\right)\right)^2},$$

可以知道 $\dot{\Phi}(x)$ 随着 $|e-x|$ 的增加而减少, 根据不确定似然函数的定义

$$\begin{aligned} L(e, \sigma | h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1})) &= \prod_{i=1}^{m-1} \dot{\Phi}(h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1})) \\ &= \prod_{i=1}^{m-1} \frac{\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} \exp\left(\frac{\pi(e-h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1}))}{\sqrt{3}\sigma}\right)}{\left(1 + \exp\left(\frac{\pi(e-h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1}))}{\sqrt{3}\sigma}\right)\right)^2} \\ &= \frac{\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} \sum_{i=1}^{m-1} |e - h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1})|\right)}{\left(1 + \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} \sum_{i=1}^{m-1} |e - h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1})|\right)\right)^2}, \end{aligned}$$

那么 e 和 σ 的不确定极大似然估计为求解下面这个最大化问题

$$\max_{e, \sigma > 0} \frac{\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} \sum_{i=1}^{m-1} |e - h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1})|\right)}{\left(1 + \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} \sum_{i=1}^{m-1} |e - h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1})|\right)\right)^2},$$

一方面由于似然函数关于 $\sum_{i=1}^{m-1} |e - h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1})|$ 递减, 那么 e 的不确定极大似然估计值 \tilde{e} 求解如下

$$\min_e \sum_{i=1}^{m-1} |e - h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1})| = \begin{cases} \min_e e - \sum_{i=1}^{m-1} h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1}) & (e \geq h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1})) \\ \min_e \sum_{i=1}^{m-1} h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1}) - e & (e < h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1})) \end{cases},$$

由于 \tilde{e} 为最优值, 则有

$$\tilde{e} - \sum_{i=1}^{m-1} h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1}) = \sum_{i=1}^{m-1} h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1}) - \tilde{e},$$

从而

$$\tilde{e} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{m-1} h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1}) + \sum_{i=1}^{m-1} h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1}) \right),$$

另一方面 σ 的不确定极大似然估计值 $\tilde{\sigma}$, 可以通过求解如下极大问题获得

$$\max_{\sigma > 0} \frac{\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} \sum_{i=1}^{m-1} |\tilde{e} - h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1})|\right)}{\left(1 + \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} \sum_{i=1}^{m-1} |\tilde{e} - h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1})|\right)\right)^2},$$

我们通过求对 $\frac{\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} \sqrt{V_{i=1}^{m-1}} |\tilde{e} - h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1})|\right)}{\left(1 + \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} \sqrt{V_{i=1}^{m-1}} |\tilde{e} - h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1})|\right)\right)^2}$ 求导获得 $\tilde{\sigma}$, 设

$$l(\sigma) = \frac{\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} \sqrt{V_{i=1}^{m-1}} |\tilde{e} - h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1})|\right)}{\left(1 + \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} \sqrt{V_{i=1}^{m-1}} |\tilde{e} - h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1})|\right)\right)^2},$$

则其导数为

$$i(\sigma) = \frac{\exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} y\right) * \left(1 + \frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} y + \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} y\right) - \frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} y * \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} y\right)\right)}{\left(1 + \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} y\right)\right)^3},$$

其中: $y = \sqrt{V_{i=1}^{m-1}} |\tilde{e} - h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1})|$, 那么令 $i(\sigma) = 0$, 则有

$$1 + \frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} y + \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} y\right) - \frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} y * \exp\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} y\right) = 0,$$

令 $\frac{\pi}{\sqrt{3}\sigma} y = \gamma$, 则

$$\tilde{\sigma} = \frac{\pi}{\sqrt{3}\gamma} y,$$

其中: γ 为超越方程 $1 + x + \exp(x) - x \cdot \exp(x) = 0$ 的根, 在数值解中可以近似取为 1.543 4. 由于 $h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1})$ 实际为来自标准正态不确定分布 $\mathcal{N}(0, 1)$ 的 $m - 1$ 个样本, 那么就要有

$$\tilde{e} = 0, \quad \tilde{\sigma} = 1$$

成立, 从而有

$$\begin{cases} \left\{ \bigwedge_{i=1}^{m-1} \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i} - f(t_i, x_{t_i}; \mu_{t_1})(t_{i+1} - t_i)}{g(t_i, x_{t_i}; \theta_{t_1})(t_{i+1} - t_i)} + \bigvee_{i=1}^{m-1} \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i} - f(t_i, x_{t_i}; \mu_{t_1})(t_{i+1} - t_i)}{g(t_i, x_{t_i}; \theta_{t_1})(t_{i+1} - t_i)} = 0 \right. \\ \left. \left| \frac{\pi}{\sqrt{3}\gamma} \bigvee_{i=1}^{m-1} \left| \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i} - f(t_i, x_{t_i}; \mu_{t_1})(t_{i+1} - t_i)}{g(t_i, x_{t_i}; \theta_{t_1})(t_{i+1} - t_i)} \right| \right| = 1 \right\} \end{cases} \quad (5)$$

将方程组 (5) 求解, 我们得到了 $t = t_1$ 时 μ_{t_1} 和 θ_{t_1} 的不确定极大似然估计值 $\mu_{t_1}^*$ 和 $\theta_{t_1}^*$. 下面分析当 $t = t_2$ 时的 μ_{t_2} 和 θ_{t_2} 的不确定极大似然估计值 $\mu_{t_2}^*$ 和 $\theta_{t_2}^*$, 利用差分, 我们可以获得 $h_{i2}(\mu_{t_2}, \theta_{t_2})$ 为

$$h_{i2}(\mu_{t_2}, \theta_{t_2}) = \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i} - f(t_i, x_{t_i}; \mu_{t_2})(t_{i+1} - t_i)}{g(t_i, x_{t_i}; \theta_{t_2})(t_{i+1} - t_i)} \quad (i = 2, 3, \dots, m),$$

同上分析有

$$\begin{cases} \left\{ \bigwedge_{i=2}^m \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i} - f(t_i, x_{t_i}; \mu_{t_2})(t_{i+1} - t_i)}{g(t_i, x_{t_i}; \theta_{t_2})(t_{i+1} - t_i)} + \bigvee_{i=2}^m \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i} - f(t_i, x_{t_i}; \mu_{t_2})(t_{i+1} - t_i)}{g(t_i, x_{t_i}; \theta_{t_2})(t_{i+1} - t_i)} = 0 \right. \\ \left. \left| \frac{\pi}{\sqrt{3}\gamma} \bigvee_{i=2}^m \left| \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i} - f(t_i, x_{t_i}; \mu_{t_2})(t_{i+1} - t_i)}{g(t_i, x_{t_i}; \theta_{t_2})(t_{i+1} - t_i)} \right| \right| = 1 \right\} \end{cases} \quad (6)$$

将方程组 (6) 求解, 即可获得 μ_{t_2} 和 θ_{t_2} 的不确定极大似然估计值 $\mu_{t_2}^*$ 和 $\theta_{t_2}^*$. 以此类推可以获得 $\mu_{t_{n-m+1}}$ 和 $\theta_{t_{n-m+1}}$ 的不确定极大似然估计值 $\mu_{t_{n-m+1}}^*$ 和 $\theta_{t_{n-m+1}}^*$ 为

$$\begin{cases} \left\{ \bigwedge_{i=n-m+1}^{n-1} \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i} - f(t_i, x_{t_i}; \mu_{t_{n-m+1}})(t_{i+1} - t_i)}{g(t_i, x_{t_i}; \theta_{t_{n-m+1}})(t_{i+1} - t_i)} + \bigvee_{i=n-m+1}^{n-1} \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i} - f(t_i, x_{t_i}; \mu_{t_{n-m+1}})(t_{i+1} - t_i)}{g(t_i, x_{t_i}; \theta_{t_{n-m+1}})(t_{i+1} - t_i)} = 0 \right. \\ \left. \left| \frac{\pi}{\sqrt{3}\gamma} \bigvee_{i=n-m+1}^{n-1} \left| \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i} - f(t_i, x_{t_i}; \mu_{t_{n-m+1}})(t_{i+1} - t_i)}{g(t_i, x_{t_i}; \theta_{t_{n-m+1}})(t_{i+1} - t_i)} \right| \right| = 1 \right\} \end{cases}$$

通过上述分析我们获得了 μ_{t_j} 和 θ_{t_j} 的不确定极大似然估计值 $\mu_{t_j}^*$ 和 $\theta_{t_j}^*$ ($j = 1, 2, \dots, n - m + 1$). 接下来, 我们用一个具体的实例分析上述方法.

例 1 考虑带有未知时变参数的不确定微分方程

$$dX_t = \mu_t X_t dt + \theta_t X_t dC_t,$$

假设有 n 个观测值 $x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}$, 我们将利用 m 个数据对于前 $n-m+1$ 个时刻的未知参数 μ_t 和 θ_t 进行估计, 具体步骤如下:

根据差分, 我们可以获得

$$h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1}) = \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i} - \mu_{t_1} x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)}{\theta_{t_1} x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, m-1),$$

根据上述分析, 可得

$$\begin{cases} \bigwedge_{i=1}^{m-1} \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i} - \mu_{t_1} x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)}{\theta_{t_1} x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)} + \bigvee_{i=1}^{m-1} \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i} - \mu_{t_1} x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)}{\theta_{t_1} x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)} = 0 \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}\gamma} \bigvee_{i=1}^{m-1} \left| \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i} - \mu_{t_1} x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)}{\theta_{t_1} x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)} \right| = 1 \end{cases},$$

那么就有

$$\bigwedge_{i=1}^{m-1} \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i}}{x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)} - \mu_{t_1} + \bigvee_{i=1}^{m-1} \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i}}{x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)} - \mu_{t_1} = 0,$$

从而

$$\frac{1}{2} \left(\bigvee_{i=1}^{m-1} \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i}}{x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)} + \bigwedge_{i=1}^{m-1} \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i}}{x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)} \right) = \mu_{t_1}^*,$$

那么

$$\frac{\pi}{\sqrt{3}\gamma} \bigvee_{i=1}^{m-1} \left| \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i} - \mu_{t_1}^* x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)}{x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)} \right| = \theta_{t_1}^*,$$

则

$$\begin{cases} \mu_{t_1}^* = \frac{1}{2} \left(\bigvee_{i=1}^{m-1} \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i}}{x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)} + \bigwedge_{i=1}^{m-1} \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i}}{x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)} \right) \\ \theta_{t_1}^* = \frac{\pi}{\sqrt{3}\gamma} \bigvee_{i=1}^{m-1} \left| \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i} - \mu_{t_1}^* x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)}{x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)} \right| \end{cases},$$

同样的有

$$\begin{cases} \mu_{t_2}^* = \frac{1}{2} \left(\bigvee_{i=2}^m \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i}}{x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)} + \bigwedge_{i=2}^m \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i}}{x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)} \right) \\ \theta_{t_2}^* = \frac{\pi}{\sqrt{3}\gamma} \bigvee_{i=2}^m \left| \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i} - \mu_{t_2}^* x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)}{x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)} \right| \end{cases},$$

以及

$$\begin{cases} \mu_{t_{n-m+1}}^* = \frac{1}{2} \left(\bigvee_{i=n-m+1}^{n-1} \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i}}{x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)} + \bigwedge_{i=n-m+1}^{n-1} \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i}}{x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)} \right) \\ \theta_{t_{n-m+1}}^* = \frac{\pi}{\sqrt{3}\gamma} \bigvee_{i=n-m+1}^{n-1} \left| \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i} - \mu_{t_{n-m+1}}^* x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)}{x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)} \right| \end{cases}.$$

将上述求解得到的估计值 $\mu_{t_j}^*$ 和 $\theta_{t_j}^*$ ($j = 1, 2, \dots, n-m+1$) 看作样本, 现在只需要将所得样本数据进行线性或者非线性拟合, 那么不禁要问什么样的拟合曲线是合理可行的呢? 我们将在第三个部分给出解答.

3 时变参数估计的合理性判断

这部分我们讨论什么样的时变参数估计是合理的可行的. 就含常值参数的不确定微分方程而言, 估计值的好坏可以通过样本轨道夹在 α - 轨道之间来说明, 本文将此方法应用于含有未知时变参数的不确定微分方程中, 来判断时变参数估计的合理性. 首先定义含有时变参数的不确定微分方程的 α - 轨道概念.

定义 10 假设 α 是 $(0, 1)$ 中的数, 如果含有时变参数的不确定微分方程

$$dX_t = f(t, X_t; \mu_t)dt + g(t, X_t; \theta_t)dC_t \tag{7}$$

可以求解相应的常微分方程

$$dX_t^\alpha = f(t, X_t^\alpha; \mu_t)dt + |g(t, X_t^\alpha; \theta_t)| \Phi^{-1}(\alpha) dt \tag{8}$$

其中: $\Phi^{-1}(\alpha)$ 为标准正态不确定逆分布函数

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{1-\alpha},$$

那么常微分方程 (8) 的解是含时变参数不确定微分方程 (7) 的 α - 轨道.

在定义 10 的基础上, 有如下含时变参数不确定微分方程的性质.

定理 1 假设 X_t 和 X_t^α 是含有时变参数不确定微分方程

$$dX_t = f(t, X_t; \mu_t)dt + g(t, X_t; \theta_t)dC_t$$

的解和 α - 轨道, 那么有

$$\mathcal{M}\{X_t \leq X_t^\alpha, \forall t\} = \alpha,$$

$$\mathcal{M}\{X_t > X_t^\alpha, \forall t\} = 1 - \alpha.$$

证明 首先, 对于每一条 α - 轨道, 我们将时间间隔分成两个部分,

$$T^+ = \{t \mid g(t, X_t^\alpha; \theta_t) \geq 0\},$$

$$T^- = \{t \mid g(t, X_t^\alpha; \theta_t) < 0\}.$$

那么显然有 $T^+ \cap T^- = \emptyset$ 和 $T^+ \cup T^- = [0, +\infty)$. 一方面记

$$\Omega_1 = \left\{ \lambda \mid \frac{dC_t(\lambda)}{dt} \leq \Phi^{-1}(\alpha), \forall t \in T^+ \right\},$$

$$\Omega_2 = \left\{ \lambda \mid \frac{dC_t(\lambda)}{dt} \geq \Phi^{-1}(1-\alpha), \forall t \in T^- \right\}.$$

由于 C_t 是独立增量, T^+ 和 T^- 是不相交集合, 那么

$$\mathcal{M}\{\Omega_1\} = \alpha, \mathcal{M}\{\Omega_2\} = \alpha, \mathcal{M}\{\Omega_1 \cap \Omega_2\} = \alpha,$$

则 $\forall \lambda \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, 有

$$g(t, X_t(\lambda); \theta_t) \frac{dC_t}{dt} \leq |g(t, X_t^\alpha; \theta_t)| \Phi^{-1}(\alpha), \forall t,$$

因此对于任意的 t , 有 $X_t(\lambda) \leq X_t^\alpha$, 并且

$$\mathcal{M}\{X_t \leq X_t^\alpha, \forall t\} \geq \mathcal{M}\{\Omega_1 \cap \Omega_2\} = \alpha \tag{9}$$

另一方面记,

$$\Omega_3 = \left\{ \lambda \mid \frac{dC_t(\lambda)}{dt} > \Phi^{-1}(\alpha), \forall t \in T^+ \right\},$$

$$\Omega_4 = \left\{ \lambda \mid \frac{dC_t(\lambda)}{dt} < \Phi^{-1}(1-\alpha), \forall t \in T^- \right\}.$$

由于 C_t 是独立增量, T^+ 和 T^- 是不相交集合, 那么

$$\mathcal{M}\{\Omega_3\} = 1-\alpha, \mathcal{M}\{\Omega_4\} = 1-\alpha, \mathcal{M}\{\Omega_3 \cap \Omega_4\} = 1-\alpha,$$

则 $\forall \lambda \in \Omega_3 \cap \Omega_4$, 有

$$g(t, X_t(\lambda); \theta_t) \frac{dC_t}{dt} > |g(t, X_t^\alpha; \theta_t)| \Phi^{-1}(\alpha), \forall t,$$

因此对于任意的 t , 有 $X_t(\lambda) > X_t^\alpha$, 并且

$$\mathcal{M}\{X_t > X_t^\alpha, \forall t\} \geq \mathcal{M}\{\Omega_3 \cap \Omega_4\} = 1-\alpha \quad (10)$$

由于 $\{X_t \leq X_t^\alpha, \forall t\}$ 和 $\{X_t \not\leq X_t^\alpha, \forall t\}$ 是对立事件, 那么根据对偶公理有

$$\mathcal{M}\{X_t \leq X_t^\alpha, \forall t\} + \mathcal{M}\{X_t \not\leq X_t^\alpha, \forall t\} = 1,$$

由于 $\{X_t \leq X_t^\alpha, \forall t\} \subset \{X_t \not\leq X_t^\alpha, \forall t\}$ 和单调性定理有

$$\mathcal{M}\{X_t \leq X_t^\alpha, \forall t\} + \mathcal{M}\{X_t > X_t^\alpha, \forall t\} \leq 1 \quad (11)$$

根据式(9)~(11)知定理得证.

更直观的上述定理说明样本轨道小于或等于 α -轨道的信度是 α , 即对于固定的时刻 t_1 , 有 $\mathcal{M}\{X_{t_1}^{\alpha_1} \leq X_{t_1} \leq X_{t_1}^{\alpha_2}\} \geq \alpha_2 - \alpha_1$, 那么对于得到的拟合函数 $\hat{\mu}_t$ 和 $\hat{\theta}_t$ 要使得所有观测值 x_t 都包含在两条 α -轨道

$$dX_t^{\alpha_1} = f(t, X_t^{\alpha_1}; \hat{\mu}_t)dt + \left| g(t, X_t^{\alpha_1}; \hat{\theta}_t) \right| \Phi^{-1}(\alpha_1)dt,$$

和

$$dX_t^{\alpha_2} = f(t, X_t^{\alpha_2}; \hat{\mu}_t)dt + \left| g(t, X_t^{\alpha_2}; \hat{\theta}_t) \right| \Phi^{-1}(\alpha_2)dt$$

之间, 一般情况下取 $\alpha_1 \in (0, 0.5]$, $\alpha_2 \in [0.5, 1)$, 此时认为拟合函数 $\hat{\mu}_t$ 和 $\hat{\theta}_t$ 是合理的, 并且 $R^2 = \frac{SSR}{SST}$ 越接近 1 越好, 就 μ_t 而言, 其 $R^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n-m+1} (\hat{\mu}_{t_j} - \bar{\mu})^2}{\sum_{j=1}^{n-m+1} (\mu_{t_j}^* - \bar{\mu})^2}$, 其中: $\hat{\mu}_{t_j}$ 为 $\mu_{t_j}^*$ 的拟合值, $\bar{\mu}$ 为 $\mu_{t_j}^*$ 的均值. 就 θ_t 而言, 也会有类似的 R^2 .

4 数值实例

这一部分我们将利用新冠肺炎数值实例来验证上述方法的可行性.

例 2 假设 X_t 表示 t 时刻中国累计感染新冠肺炎病例数, 那么不确定新型冠状病毒传播模型^[16]为

$$dX_t = \mu_t X_t dt + \theta_t X_t dC_t,$$

接下来对 μ_t 和 θ_t 进行不确定极大似然估计. 从国家卫生健康委员会官网获取 2020 年 2 月 13 日到 3 月 18 日的累计新冠肺炎病例数共 35 个数据, 并且将 2020 年 2 月 13 日记为第 1 天, 以此类推 3 月 18 日记为第 35 天. 我们利用 10 个数据对未知参数 μ_{t_1} 和 θ_{t_1} 进行估计, 那么有

$$h_{i1}(\mu_{t_1}, \theta_{t_1}) = \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i} - \mu_{t_1} x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)}{\theta_{t_1} x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, 9),$$

从而

$$\begin{cases} \mu_{t_1}^* = \frac{1}{2} \left(\bigwedge_{i=1}^9 \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i}}{x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)} + \bigvee_{i=1}^9 \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i}}{x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)} \right) \\ \theta_{t_1}^* = \frac{\pi}{\sqrt{3}\gamma} \bigvee_{i=1}^9 \left| \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i}}{x_{t_i} (t_{i+1} - t_i)} - \mu_{t_1}^* \right| \end{cases},$$

同理有

$$\begin{cases} \mu_{t_2}^* = \frac{1}{2} \left(\bigwedge_{i=2}^{10} \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i}}{x_{t_i}(t_{i+1} - t_i)} + \bigvee_{i=2}^{10} \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i}}{x_{t_i}(t_{i+1} - t_i)} \right) \\ \theta_{t_2}^* = \frac{\pi}{\sqrt{3}\gamma} \bigvee_{i=2}^{10} \left| \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i}}{x_{t_i}(t_{i+1} - t_i)} - \mu_{t_2}^* \right| \end{cases},$$

以及

$$\begin{cases} \mu_{t_{26}}^* = \frac{1}{2} \left(\bigwedge_{i=26}^{34} \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i}}{x_{t_i}(t_{i+1} - t_i)} + \bigvee_{i=26}^{34} \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i}}{x_{t_i}(t_{i+1} - t_i)} \right) \\ \theta_{t_{26}}^* = \frac{\pi}{\sqrt{3}\gamma} \bigvee_{i=26}^{34} \left| \frac{x_{t_{i+1}} - x_{t_i}}{x_{t_i}(t_{i+1} - t_i)} - \mu_{t_{26}}^* \right| \end{cases}.$$

中国累计感染新冠肺炎病例数如表 1 所示, 数据来源于国家卫生健康委员会官网.

表 1 中国累计感染新冠肺炎病例数

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_{t_i}	63 851	66 492	68 500	70 548	72 436	74 185	74 576	75 465	76 288	76 936
i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
t_i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_{t_i}	77 150	77 658	78 064	78 497	78 824	79 251	79 824	80 026	80 151	80 270
i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
t_i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_{t_i}	80 389	80 516	80 591	80 632	80 668	80 685	80 699	80 708	80 725	80 729
i	31	32	33	34	35					
t_i	31	32	33	34	35					
x_{t_i}	80 733	80 737	80 738	80 739	80 739					

那么将观测值代入上述方程组就可以求得估计值 $\mu_{t_j}^*$ 和 $\theta_{t_j}^*$ ($j=1, 2, \dots, 26$), 如表 2 所示.

表 2 μ_t 和 θ_t 的不确定极大似然估计值

j	1	2	3	4	5	6	7
$\mu_{t_j}^*$	2.33×10^{-2}	1.65×10^{-2}	1.63×10^{-2}	1.48×10^{-2}	1.35×10^{-2}	7.35×10^{-3}	7.35×10^{-3}
$\theta_{t_j}^*$	2.13×10^{-2}	1.61×10^{-2}	1.60×10^{-2}	1.41×10^{-2}	1.26×10^{-2}	5.43×10^{-3}	5.43×10^{-3}
j	8	9	10	11	12	13	14
$\mu_{t_j}^*$	6.84×10^{-3}	5.51×10^{-3}	4.40×10^{-3}	4.36×10^{-3}	4.36×10^{-3}	4.36×10^{-3}	4.08×10^{-3}
$\theta_{t_j}^*$	4.83×10^{-3}	3.52×10^{-3}	3.34×10^{-3}	3.43×10^{-3}	3.43×10^{-3}	3.43×10^{-3}	3.72×10^{-3}
j	15	16	17	18	19	20	21
$\mu_{t_j}^*$	3.87×10^{-3}	3.84×10^{-3}	1.37×10^{-3}	8.77×10^{-4}	8.46×10^{-4}	8.46×10^{-4}	8.15×10^{-4}
$\theta_{t_j}^*$	3.99×10^{-3}	4.03×10^{-3}	1.40×10^{-3}	8.54×10^{-4}	9.16×10^{-4}	9.16×10^{-4}	9.16×10^{-4}
j	22	23	24	25	26		
$\mu_{t_j}^*$	4.91×10^{-4}	2.79×10^{-4}	2.29×10^{-4}	1.12×10^{-4}	1.05×10^{-4}		
$\theta_{t_j}^*$	5.29×10^{-4}	2.94×10^{-4}	2.90×10^{-4}	1.30×10^{-4}	1.30×10^{-4}		

根据表 2, 利用 MATLAB 做出的散点图如图 1、图 2 所示.

那么, 根据观测估计值的散点图, 我们使用逻辑递减模型

$$\hat{\mu}_t = \frac{0.0233}{1 + \beta_1 \exp(\beta_2 t)}, \quad \hat{\theta}_t = \frac{0.0213}{1 + \beta_3 \exp(\beta_4 t)},$$

通过 MATLAB 的非线性拟合, 可得 $\hat{\beta}_1 = 0.2077$, $\hat{\beta}_2 = 0.2791$, $\hat{\beta}_3 = 0.1650$ 和 $\hat{\beta}_4 = 0.3312$, 那么就有

$$dX_t = \frac{0.0233X_t}{1+0.2077\exp(0.2791t)}dt + \frac{0.0213X_t}{1+0.1650\exp(0.3312t)}dC_t,$$

根据定义 10, 有

$$dX_t^\alpha = \frac{0.0233X_t^\alpha}{1+0.2077\exp(0.2791t)}dt + \left| \frac{0.0213X_t^\alpha}{1+0.1650\exp(0.3312t)} \right| \Phi^{-1}(\alpha)dt,$$

其中: $\Phi^{-1}(\alpha)$ 为标准正态不确定变量的逆分布函数

$$\Phi^{-1}(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{\alpha}{1-\alpha},$$

则其 α - 轨道图如图 3 所示.

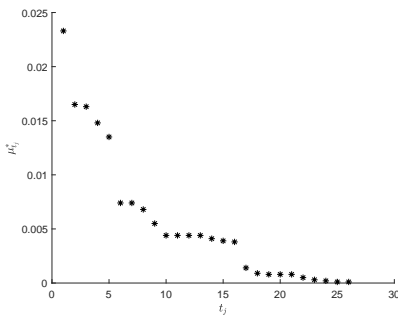


图 1 μ_t^* 的散点图

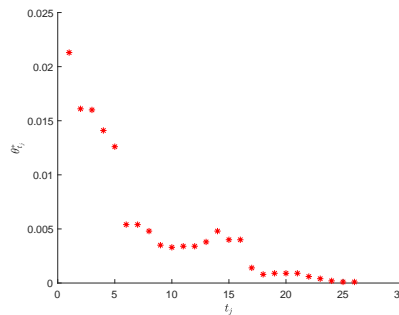


图 2 θ_t^* 的散点图

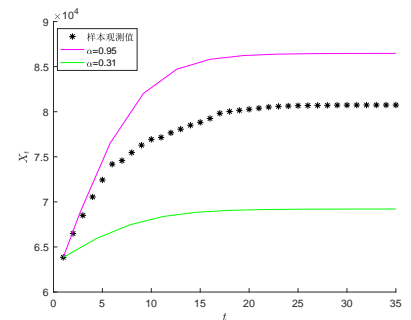


图 3 样本观测值以及 0.95 轨道和 0.31 轨道图

可以看出所有的样本观测值都在 0.95 轨道和 0.31 轨道之间. 并且其拟合图像如图 4、图 5 所示. 其中: R^2 分别为 0.9290 和 0.8908. 那么知道

$$\hat{\mu}_t = \frac{0.0233}{1+0.2077\exp(0.2791t)}, \quad \hat{\theta}_t = \frac{0.0213}{1+0.1650\exp(0.3312t)}$$

是合理可行的, 则不确定新型冠状病毒传播模型为

$$dX_t = \frac{0.0233X_t}{1+0.2077\exp(0.2791t)}dt + \frac{0.0213X_t}{1+0.1650\exp(0.3312t)}dC_t \tag{12}$$

同时我们利用 99- 方法^[17]可以获得 $t_{36} = 36$, 即 2020 年 3 月 19 日 X_t 的逆不确定分布, 如图 6 所示.

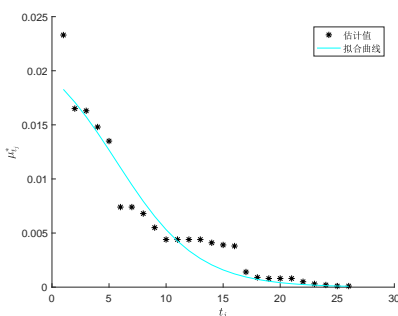


图 4 μ_t^* 的曲线拟合图

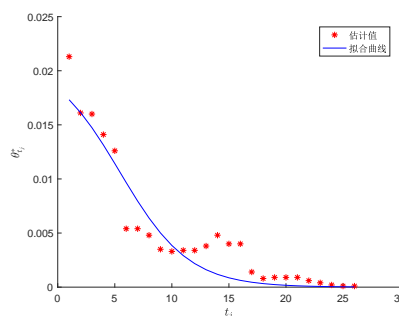


图 5 θ_t^* 的曲线拟合图

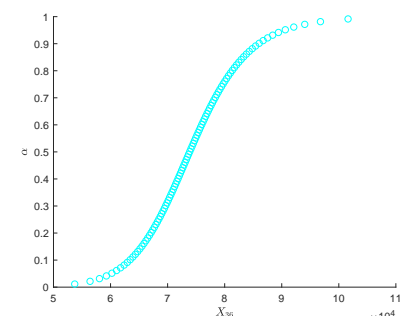


图 6 初值 $X_0=63851$, $t=36$ 时方程 (12) 的 99 表

5 结论

不确定微分方程是不同于随机微分方程的另一处理动态系统问题的数学工具,在很多时候不确定微分方程的使用更加符合实际情况.本文利用不确定极大似然的思想,提出了不确定极大似然估计不确定微分方程中的未知时变参数.随后应用回归拟合的思想获得 μ_t 和 θ_t ,利用含有时变参数的不确定微分方程的 α -轨道方法以及拟合优度指标 R^2 给出了判断拟合函数是否可行的标准.最后一个数值实例,验证了方法的可行性.尽管我们利用不确定极大似然估计得到了不确定微分方程中未知时变参数的估计,但这种方法还是在估计未知常数的基础上改进的,那么未来可以尝试提出新的方法来估计未知时变参数,以及对时变参数进行不确定假设检验.

参考文献:

- [1] LIU B D. Uncertainty theory[M]. Berlin: Springer, 2007.
- [2] LIU B D. Some research problems in uncertainty theory[J]. Journal of Uncertain Systems, 2009, 3(1): 3-10.
- [3] ZHU Y. Uncertain optimal control with application to a portfolio selection model[J]. Cybernetics and Systems, 2010, 41(7): 535-547.
- [4] 孙航. 不确定环境下的SIR谣言传播模型研究[D]. 乌鲁木齐: 新疆大学, 2021.
- [5] BARBACIORU C. Uncertainty functional differential equations for finance[J]. Surveys in Mathematics & Its Applications, 2010, 5: 275-284.
- [6] YAO K. Uncertain calculus with renewal process[J]. Fuzzy Optimization & Decision Making, 2012, 11(3): 285-297.
- [7] JI X, ZHOU J. Multi-dimensional uncertain differential equation: existence and uniqueness of solution[J]. Fuzzy Optimization & Decision Making, 2015, 14(4): 477-491.
- [8] YAO K, GAO J, GAO Y. Some stability theorems of uncertain differential equation[J]. Fuzzy Optimization & Decision Making, 2013, 12(1): 3-13.
- [9] SHENG Y, SHI G. Stability in p-th moment for multifactor uncertain differential equation[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2018, 35(2): 2421-2431.
- [10] SHENG Y, YAO K, CHEN X. Least squares estimation in uncertain differential equations[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2020, 28(10): 2651-2655.
- [11] YAO K, LIU B. Parameter estimation in uncertain differential equations[J]. Fuzzy Optimization & Decision Making, 2020, 19(1): 1-12.
- [12] LIU Z. Generalized moment estimation for uncertain differential equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2021, 392: 125724.
- [13] YANG X, LIU Y, PARK G K. Parameter estimation of uncertain differential equation with application to financial market[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2020, 139: 110026.
- [14] SHENG Y, ZHANG N. Parameter estimation in uncertain differential equations based on the solution[J]. Mathematical Methods in Applied Sciences, 2021, 44(11): 9441-9452.
- [15] ZHANG J, SHENG Y, WANG X. Least squares estimation of high-order uncertain differential equations[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2021, 41(2): 2755-2764.
- [16] LIO W, LIU B. Initial value estimation of uncertain differential equations and zero-day of COVID-19 spread in China[J]. Fuzzy Optimization & Decision Making, 2021, 20(2): 177-188.
- [17] YAO K, CHEN X. A numerical method for solving uncertain differential equations[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2013, 25(3): 825-832.

责任编辑: 赵新科