

植被根吸水对植被斑图的影响研究*

阿卜杜许库尔·热合曼, 阿布都热西提·阿布都外力[†]

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830046)

摘要: 土地沙漠化是目前世界面临的重大问题. 因此, 研究植被斑图对防治土壤沙漠化具有一定的实际意义. 文章基于已有的植被斑图模型, 建立了具有交叉扩散项的新模型, 分析了该模型对应的常微分方程和偏微分方程非负常数平衡点的稳定性. 通过数值模拟验证了该模型的有效性.

关键词: 植被斑图; 交叉扩散; 稳定性; 数值模拟

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2020.08.29.0001

中图分类号: O242.21 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2021)05-0556-07

引文格式: 阿卜杜许库尔·热合曼, 阿布都热西提·阿布都外力. 植被根吸水对植被斑图的影响研究[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2021, 38(5): 556-562.

英文引文格式: Abuduxukuer Reheman, Abudurexiti Abuduwalli. Study on the effect of plant root water absorption on vegetation pattern[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2021, 38(5): 556-562.

Study on the Effect of Plant Root Water Absorption on Vegetation Pattern

Abuduxukuer Reheman, Abudurexiti Abuduwalli

(School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830046, China)

Abstract: Land desertification is a major problem facing the world. Therefore, studying vegetation patterns has certain practical significance for preventing and controlling soil desertification. In this paper, based on the existing vegetation pattern model, a new model with cross diffusion term is established, and the stability of non negative constant equilibrium point of ordinary differential equation and partial differential equation corresponding to the model is analyzed. Numerical simulations verified that the model has a certain significance in preventing soil water loss.

Key words: vegetation pattern; cross diffusion; stability; numerical simulation

0 引言

干旱-半干旱的生态系统覆盖了地球约 40% 的陆地面积^[1-2], 沙漠化进程成为全世界面临的重要生态问题. 此外, 联合国可持续发展司表示, 沙漠化和土壤水流失的加剧影响世界约 25% 的人口生存^[3]. 了解植被斑图模式的产生机制是治理荒漠化的前提^[4]. 因此, 干旱-半干旱区植被斑图的形成是生态动力学家关注的重要课题之一.

众所周知, 在不同的区域会观察到许多种不同的植被斑图模型^[4], 比如: 点状分布的植被斑图、间隙状分布的植被斑图、斑纹状灌木丛植被斑图、环状草丛植被斑图、迷宫形分布的植被斑图以及带状分布的植被斑图^[5-10]. 一般来讲, 植被斑图模型的形成与水资源匮乏、植物对水的竞争、水扩散和流动的分布、牲畜的放牧、气候的变化、土地特征以及土壤中毒素有关^[9,11-14]. 最近对于干旱生态系统中植被斑图空间组织和植物与有限资源之间的正反馈效应方面已取得了很大的进展^[15]. Lefever 和 Lejeune^[16]建立的模型指出植被模式的形成仅取决于植物的特征. Klausmeier^[6]构建的模型中, 考虑了土壤水分动态, 并指出植物增加局部水分利用率更有利于

* 收稿日期: 2020-08-29

基金项目: 国家自然科学基金项目(10971024).

作者简介: 阿卜杜许库尔·热合曼(1990-), 男, 硕士生, 从事计算数学研究, E-mail: xukuer@126.com.

[†] 通讯作者: 阿布都热西提·阿布都外力(1963-), 男, 博士, 教授, 从事计算数学研究, E-mail: reshita@xju.edu.cn.

它们的生长. Okayasu 和 Riretkerk 等人^[10,17] 引入水平衡并分解为土壤水和地表水, 指出这两个水资源与植被的不同相互作用.

了解植被斑图模型的产生机制以及对环境的适应能力是研究气候变化和过度放牧破坏自然平衡而导致的荒漠化的重要前提^[18]. Reinier 等人^[19]提出了包括物种(灌木)、土壤水及地表水-植物系统:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} = cg_{\max} \frac{W}{W+k_1} P - dP + D_1 \Delta P, \\ \frac{\partial W}{\partial t} = \alpha \frac{P+k_2 f_0}{P+k_2} O - g_{\max} \frac{WP}{W+k_1} - rW + D_2 \Delta W, \\ \frac{\partial O}{\partial t} = R - \alpha \frac{P+k_2 f_0}{P+k_2} O + D_3 \Delta O, \end{cases} \quad (1)$$

其中: P 表示植物量或者密度 (g/m^2), W, O 分别表示土壤水量和地表水量或密度 (mm); $cg_{\max} P$ 是植物生长率; c 表示植物吸收水分转化为植物生长的过程 ($g/mm\ m^2$); g_{\max} 表示植物最大的土壤比吸水量 ($g\ m^2/mm\ d$); k_1 表示半饱和常数 (mm); d 表示由于死亡率和放牧造成的植物密度的特定损失率 (d^{-1}); αO 表示地表水渗透率, αO 是描述地表水最大入渗率的术语; $\alpha O f_0$ 为无植物时的最小入渗量 (如果 $P=0$); α 表示可渗透的地表水比例 (d^{-1}); k_2 表示入渗饱和常数 (g/m^2); f_0 表示在没有植物的情况下最小的水分渗入量 (无刚度); r 表示由于蒸发和排水造成的特定土壤水分损失 (mm). R 表示降雨量 (mm/d); D_1, D_2, D_3 分别表示植被密度扩散 (m^2/d), 土壤水和地表水的扩散 (m^2/d). Δ 表示拉普拉斯算子.

土壤水扩散反馈, 是指由于土壤水浓度差引起水定向流动的一种反馈形式, 它属于正反馈^[16]. 植物的生长需要水分, 植被根部对水分的吸收使得它所在位置的水浓度降低, 与周围位置的水形成一定的浓度差, 这种浓度差引起周围位置的水到植被所在位置的定向流动 (从高浓度到低浓度). 在干旱-半干旱地区, 水资源是相当有限的, 植被相互之间会竞争水资源. 因此, 在模型 (1) 的基础下, 考虑植被根部对水分的吸收能力, 引入交叉扩散项的模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} = cg_{\max} \frac{W}{W+k_1} P - dP + D_1 \Delta P, \\ \frac{\partial W}{\partial t} = \alpha \frac{P+k_2 f_0}{P+k_2} O - g_{\max} \frac{WP}{W+k_1} - rW + \Delta(D_2 W - D_{21} P), \\ \frac{\partial O}{\partial t} = R - \alpha \frac{P+k_2 f_0}{P+k_2} O + D_3 \Delta O, \end{cases} \quad (2)$$

其中: D_{21} 的大小体现土壤水扩散反馈的强度, 间接地反映了植被根部对土壤水的吸收能力. $\Delta(D_2 W - D_{21} P)$ 描述了植被对水的扩散的影响. 反应方程 g_1, g_2, g_3 可以写成如下形式:

$$\begin{aligned} g_1(P, W, O) &= cg_{\max} \frac{W}{W+k_1} P - dP, \\ g_2(P, W, O) &= \alpha \frac{P+k_2 f_0}{P+k_2} O - g_{\max} \frac{WP}{W+k_1} - rW, \\ g_3(P, W, O) &= R - \alpha \frac{P+k_2 f_0}{P+k_2} O. \end{aligned}$$

本文先分析模型 (2) 对应的常微分方程的常数解的稳定性, 然后在常微分方程稳定性基础上分析偏微分系统的稳定性, 并得到了植被斑图产生的参数条件, 最后通过有限差分法验证了模型.

1 Turing 不稳定性

首先分析模型 (2) 对应的常微分方程

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = g_1(P, W, O), \\ \frac{dW}{dt} = g_2(P, W, O), \\ \frac{dO}{dt} = g_3(P, W, O), \end{cases} \quad (3)$$

通过简单的计算,可以得到模型(3)有两个常数平衡点,分别是裸土平衡点 E_1 和具有植物的平衡点 E_2 .

$$E_1 = \left(0, \frac{R}{r}, \frac{R}{\alpha f_0}\right), E_2 = \left(\frac{cR}{d} - \frac{crk_1}{cg_{\max} - d}, \frac{dk_1}{cg_{\max} - d}, \frac{R}{\alpha} \frac{P_2 + k_2}{P_2 + k_2 f_0}\right),$$

其中: $P_2 = \frac{cR}{d} - \frac{crk_1}{cg_{\max} - d}$. E_2 为正平衡点的条件为

$$R > \frac{drk_1}{cg_{\max} - d}, \quad cg_{\max} > d.$$

将模型(3)在平衡点 $E = (P^*, W^*, O^*)$ 线性化

$$\begin{cases} \frac{d\bar{P}}{dt} = \frac{dg_1}{dP}\bar{P} + \frac{dg_1}{dW}\bar{W} + \frac{dg_1}{dO}\bar{O}, \\ \frac{d\bar{W}}{dt} = \frac{dg_2}{dP}\bar{P} + \frac{dg_2}{dW}\bar{W} + \frac{dg_2}{dO}\bar{O}, \\ \frac{d\bar{O}}{dt} = \frac{dg_3}{dP}\bar{P} + \frac{dg_3}{dW}\bar{W} + \frac{dg_3}{dO}\bar{O}. \end{cases}$$

线性化方程的矩阵为

$$\Phi_t = A\Phi,$$

其中

$$A = \frac{dF(E)}{d(P, W, O)} = \begin{pmatrix} cg_{\max} \frac{W}{W+k_1} - d & cg_{\max} \frac{k_1}{(W+k_1)^2} P & 0 \\ \alpha \frac{k_2(1-f_0)}{(P+k_2)^2} O - g_{\max} \frac{W}{W+k_1} & g_{\max} \frac{k_1}{(W+k_1)^2} P - r & \alpha \frac{P+k_2 f_0}{P+k_2} \\ -\alpha \frac{k_2 - k_2 f_0}{(P+k_2)^2} & 0 & -\alpha \frac{P+k_2 f_0}{P+k_2} \end{pmatrix}.$$

E_1 和 $E_2 = (P_2, W_2, O_2)$ 的 Jacobi 矩阵为

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} \frac{R}{R+rk_1} - d & 0 & 0 \\ \alpha \frac{(1-f_0)}{k_2} - \frac{R}{R+rk_1} & -r & \alpha f_0 \\ -\alpha \frac{(1-f_0)}{k_2} & 0 & -\alpha f_0 \end{pmatrix}, \quad J(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 \\ -\beta & -\nu & \delta \\ -\eta & 0 & -\delta \end{pmatrix},$$

其中

$$\alpha_1 = cg_{\max} k_1 \frac{P_2}{(W_2 + k_1)^2}, \quad \beta = g_{\max} \frac{W_2}{W_2 + k_1} + \alpha k_2 \frac{f_0 - 1}{(P_2 + k_2)^2} O_2, \\ \nu = r + k_1 g_{\max} \frac{P_2}{(W_2 + k_1)^2}, \quad \delta = \alpha \frac{P_2 + k_2 f_0}{(P_2 + k_2)^2}, \quad \eta = \frac{\alpha k_2 (1 - f_0)}{(P_2 + k_2)^2} O_2.$$

由于 $f_0 < 1$ (地表水渗入地下水的比例在 P 中没有增加), 可知 $\alpha_1, \beta, \delta, \nu, \eta$ 是正常数.

定理 1 (1) 如果 $cg_{\max} \frac{R}{R+rk_1} < d$, 那么模型(3)的平衡点 E_1 是稳定的.

(2) 如果 $cg_{\max} \frac{R}{R+rk_1} > d, \delta^2 \nu + \delta \nu^2 + \alpha_1 \beta \nu > \alpha_1 \delta \eta$, 那么模型(3)的平衡点 E_2 是稳定的.

证明 (1) 求特征值 $\det(\lambda I - J(E_1)) = 0$ 得

$$\lambda_1 = cg_{\max} \frac{R}{R+rk_1} - d, \quad \lambda_2 = -r, \quad \lambda_3 = -\alpha f_0.$$

当 $cg_{\max} \frac{R}{R+rk_1} < d$ 时, $\lambda_1 < 0$, 模型(3)在平衡点 E_1 上稳定的.

(2) 直接求平衡点 E_2 特征值比较复杂, 因此利用一元三次函数的性质和零点二分法确定平衡点 E_2 的特征值即可. 求特征方程 $N(\lambda) = \det(\lambda I - J(E_2))$ 得

$$N(\lambda) = \det(\lambda I - J(E_2)) = \lambda^3 + s\lambda^2 + l\lambda + h,$$

其中: $s = \delta + \nu, h = \delta \alpha_1 \beta + \alpha_1 \delta \eta, l = \delta \nu + \alpha_1 \beta$. 显然 s, l 和 h 是正常数. $N(0) = h, N(-s) = -sl + h$. 由 $h > 0$, 至少存在一个负实根的零点.

假设 $N(-s) = -sl + h > 0$, 相当于

$$\delta^2\nu + \delta\nu^2 + \alpha_1\beta\nu < \alpha_1\delta\eta,$$

则 $N(0)N(-s) > 0$, 可知 $\lambda_1 \in (-\infty, -s)$. 由一元三次方程根的性质知

$$\lambda_2 + \lambda_3 = -s - \lambda_1 > 0,$$

容易知道 λ_2, λ_3 具有正实部的根.

假设 $N(-s) = -sl + h < 0$, 相当于

$$\delta^2\nu + \delta\nu^2 + \alpha_1\beta\nu > \alpha_1\delta\eta,$$

则 $N(0)N(-s) < 0$, $\lambda_1 \in (-s, 0)$. 由一元三次方程根的性质知

$$\lambda_2 + \lambda_3 = -s - \lambda_1 < 0,$$

λ_2, λ_3 是负实根或者具有负实部的根.

假设 $N(-s) = -sl + h = 0$, 得到 $\lambda_1 = -s, \lambda_2 = -\sqrt{-l}, \lambda_3 = \sqrt{-l}$. 因为特征值 λ_2, λ_3 的实部为零, 所以不符合 Turing 斑图产生原理.

因此, 当 $cg_{\max} \frac{R}{R+rk_1} > d, \delta^2\nu + \delta\nu^2 + \alpha_1\beta\nu > \alpha_1\delta\eta$ 时, 模型 (3) 的平衡点 E_2 是稳定的.

在恒定平衡点 $E = (P_*, W_*, O_*)$ 上, 模型 (2) 的线性化系统可以写为

$$\Phi_t = (D\Delta + A)\Phi,$$

其中 A 在前面已定义,

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ -D_{21} & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{pmatrix}.$$

为研究方便, 模型 (2) 的边界条件设定为

$$\partial_n \Phi = (0, 0, 0)^T.$$

定义用 $\{(\mu_j, \varphi_j)\}_{j=1}^\infty$ 表示特征值函数

$$\begin{aligned} -\Delta\varphi &= \mu\varphi, \\ \partial_n\varphi &= 0, \end{aligned}$$

排列使得 $0 = \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots$ 并且 $\int_\Omega \varphi_i \varphi_j dx = \delta_i^j$. 然后通过 Fourier 展开, 有

$$\Phi(x, t) = \sum_{i=1}^\infty \varphi_j(x) e^{(-\mu D + A)t} \int_\Omega \varphi_j(y) \Phi(y, 0) dy.$$

因此, 线性化问题的稳定性取决于矩阵 $-\mu D + A$ 的特征值, 其中 $\mu \in \{\mu_i\}_{i=1}^\infty$.

定理 2 如果 $cg_{\max} \frac{R}{R+rk_1} < d$, 那么模型 (2) 的平衡点 E_1 是稳定的.

证明 当 $E = E_1$ 时, 求 $-\mu D + J(E_1)$ 的特征值. $\det(\lambda I + \mu D - J(E_1)) = 0$, 解得

$$\lambda_1 = -\mu D_1 + cg_{\max} \frac{R}{R+rk_1} - d, \lambda_2 = -(r + \mu D_2), \lambda_3 = -(\alpha f_0 + \mu D_3).$$

当 $cg_{\max} \frac{R}{R+rk_1} < d$ 时, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$.

注: 裸土平衡点上常微分系统和偏微分系统都是线性稳定的, 所以该平衡点上不产生植被斑图.

当 $cg_{\max} \frac{R}{R+rk_1} > d$ 时, 有另外的正平衡点 $E = E_2$. 我们有以下的不稳定性定理.

定理 3 假设 $cg_{\max} \frac{R}{R+r k_1} > d$, 模型 (2) 有一个正平衡点 E_2 . 并有以下结论:

(1)(a) 如果 $\alpha_1 \delta \eta < \delta \nu(\delta + \nu) + \nu \alpha_1 \beta$, $D_{21} < \min(D_{21}^*, D_{21}^{**})$, 那么平衡点 E_2 是稳定的;

(b) 如果 $\alpha_1 \delta \eta < \delta \nu(\delta + \nu) + \nu \alpha_1 \beta$, $D_{21} > \min(D_{21}^*, D_{21}^{**})$, 那么平衡点 E_2 是不稳定的.
这里 D_{21}^* 和 D_{21}^{**} 分别表示:

$$D_{21}^* = \min_{i \geq 1} \left\{ \frac{D_1(\mu_i D_2 + \nu)}{\alpha_1} + \frac{\beta}{\mu_i} - \frac{\delta \eta}{\mu_i(\mu_i D_3 + \nu)} \right\},$$

$$D_{21}^{**} = \min_{i \geq 1} \left\{ \frac{(\mu_i D_1 + \mu_i D_3 + \delta)(\mu_i D_2 + \mu_i D_3 + \delta + \nu)}{\alpha_1 \mu_i} + \frac{\beta}{\mu_i} - \frac{\delta \eta}{\mu_i(\mu_i D_1 + \mu_i D_2 + \nu)} \right\}.$$

(2) 当 $\alpha_1 \delta \eta > \delta \nu(\delta + \nu) + \nu \alpha_1 \beta$ 时, 那么平衡点 E_2 是不稳定的.

证明 和定理 1 中(2)的证明方法一样, 直接求平衡点 E_2 的特征值比较复杂, 利用一元三次函数的性质和零点二分法确定平衡点 E_2 的特征值即可. 求平衡点 E_2 的特征函数

$$M(\lambda) = \det(\lambda I - (-\mu D + J(E_2))) = \lambda^3 + S\lambda^2 + L\lambda + H,$$

其中

$$S = \mu(D_1 + D_2 + D_3) + \delta + \nu,$$

$$H = (\mu D_3 + \delta)(\mu D_1(\mu D_2 + \nu) + \alpha_1 \beta - \alpha_1 \mu D_{21}) + \alpha_1 \delta \eta,$$

$$L = (\mu D_3 + \delta)(\mu D_1 + \mu D_2 + \nu) + \mu D_1(\mu D_2 + \nu) + \alpha_1 \beta - \alpha_1 \mu D_{21}.$$

S, L 和 H 是实常数, 其中的 $S > 0$.

先证(1). 当 $H < 0$ 时, 存在一个正实数根(见图 1). $H < 0$ 相当于

$$\alpha_1 \mu D_{21} > D_1 \mu(\mu D_2 + \nu) + \alpha_1 \beta + \frac{\alpha_1 \delta \eta}{\mu D_3 + \nu}.$$

定义

$$D_{21}^* = \min_{i \geq 1} \left\{ \frac{D_1(\mu_i D_2 + \nu)}{\alpha_1} + \frac{\beta}{\mu_i} + \frac{\delta \eta}{\mu_i(\mu_i D_3 + \nu)} \right\}.$$

当 $D_{21} > D_{21}^*$ 时, 有 $H < 0$, 因此模型 (2) 是不稳定的.

当 $H > 0$ 时, 容易知道 $M(\lambda)$ 存在一个实根 $\lambda_1 < 0$.

(a) 假设 $H > 0, -SL + H > 0$, 有 $\lambda_1 < -S$ (见图 2). 由 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -S$, 有

$$\lambda_2 + \lambda_3 = -S - \lambda_1 > 0.$$

因此至少存在一个正实部根. $-SL + H > 0$ 相当于

$$\alpha_1 \mu D_{21} > (\mu D_1 + \mu D_3 + \delta)(\mu D_2 + \mu D_3 + \delta + \nu) + \alpha_1 \beta - \frac{\alpha_1 \delta \eta}{\mu D_1 + \mu D_2 + \nu}.$$

假设 $\alpha_1 \delta \eta < \delta \nu(\delta + \nu) + \nu \alpha_1 \beta$, 定义

$$D_{21}^{**} = \min_{i \geq 1} \left\{ \frac{(\mu_i D_1 + \mu_i D_3 + \delta)(\mu_i D_2 + \mu_i D_3 + \delta + \nu)}{\alpha_1 \mu_i} + \frac{\beta}{\mu_i} - \frac{\delta \eta}{\mu_i(\mu_i D_1 + \mu_i D_2 + \nu)} \right\},$$

当 $D_{21} > D_{21}^{**}$ 时, 有 $H > SL$.

(b) 假设 $H > 0, -SL + H < 0$, 得知 $L > 0$, 有 $\lambda_1 > -S$ (见图 3). 可以将另外的两个根 λ_2, λ_3 的和的形式表示出来, 即

$$\lambda_2 + \lambda_3 = -S - \lambda_1 < 0.$$

因为 $S, L, H > 0, M(0) = H > 0$, 不存在正实根. 因此 λ_2, λ_3 是负实根或者具有负实部的共轭复根. $-SL + H < 0$ 相当于

$$\alpha_1 \mu D_{21} < (\mu D_1 + \mu D_3 + \delta)(\mu D_2 + \mu D_3 + \delta + \nu) + \alpha_1 \beta - \frac{\alpha_1 \delta \eta}{\mu D_1 + \mu D_2 + \nu}.$$

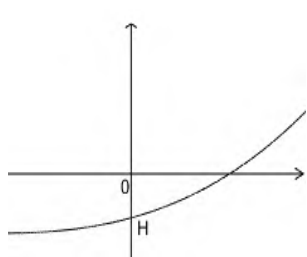


图1 $H < 0$

Fig 1 $H < 0$

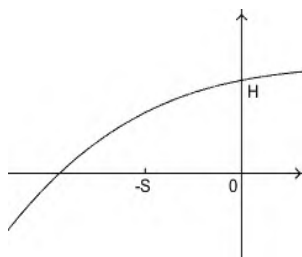


图2 $-SL + H < 0$

Fig 2 $-SL + H < 0$

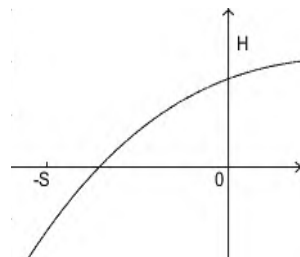


图3 $-SL + H > 0$

Fig 3 $-SL + H > 0$

假设 $\alpha_1\delta\eta < \delta\nu(\delta+\nu) + \nu\alpha_1\beta$, 当 $D_{21} < D_{21}^{**}$ 时, 有 $SL > H$.

综合 $D_{21} < \min(D_{21}^*, D_{21}^{**})$ 时, 有 $SL > H > 0$. $D_{21} > \min(D_{21}^*, D_{21}^{**})$ 时, 有 $SL < H$.

(2) 假设 $\alpha_1\delta\eta > \delta\nu(\delta+\nu) + \nu\alpha_1\beta$, $\mu = \mu_1 = 0$ 时, $H > SL$.

图灵不稳定性是指常数平衡点对于常微分方程是稳定的, 但对于偏微分方程是不稳定的. 因此模型 (2) 带交叉扩散时会产生 Turing 不稳定性^[20].

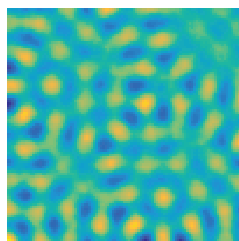
2 数值模拟

利用有限差分法^[21]进行模型 (2) 的二维数值模拟, 研究区域是干旱-半干旱地区, 参考灌木类的植被做植物模型. 由于条件有限, 无法实地调查, 因此本文选取文献[10]的参数值. 模型 (2) 的参数值

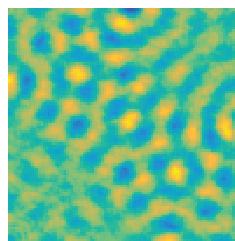
$$c = 10, g_{\max} = 0.05, k_1 = 5, d = 0.25, \alpha = 0.2, f_0 = 0.2,$$

$$k_2 = 5, r = 0.2, R = 1, D_1 = 0.1, D_2 = 0.1, D_3 = 100.$$

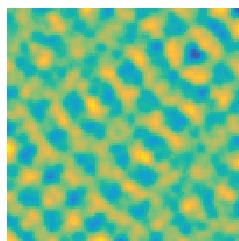
下面随机取初始值 $P_0 = 0, W_0 = 5, O_0 = 25$, 研究区间 50×50 作为固定, 取不同交叉扩散率 D_{21} , 进行了数值模拟.



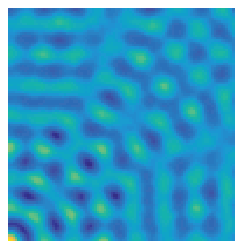
a $D_{21} = 0.01$



b $D_{21} = 0.02$



c $D_{21} = 0.05$



d $D_{21} = 0.1$

图4 干旱区内植被分布状态的二维模拟结果

Fig 4 Two dimensional simulation results of vegetation distribution in arid area

从图 4 可知, D_{21} 的变化会影响植被的分布状态, 深黄色表示植物密度高或者植物量多. 由图 4(a) 可知, D_{21} 很小时对模型的影响不大, 由图 4(b), 图 4(c) 可知, D_{21} 足够大时形成斑图形式. 由图 4(d) 可知, D_{21} 比较高时, 植物密度减少或者植物量较少. 因此 D_{21} 的大小会影响植被斑图的形成.

3 结论

本文主要研究了植被斑图的产生原理. 利用偏微分方程的线性稳定性方法得到了产生 Turing 斑图的条件. 通过数值模拟可以知道, 植物根部可以防止有限的水资源的流失. 用数学语言来说, 在水-植被动力系统各个参数的影响下会出现图灵(不)稳定性. 因此进一步研究半干旱-干旱区域植被斑图模型的形成机制, 对防止土壤沙漠化具有重要的实际意义.

参考文献:

- [1] THOMAS D, KNIGHT M, WIGGS G. Remobilization of southern African desert dune systems by twenty-first century global warming[J]. *Nature*, 2005, 435(7046): 1218-1221.
- [2] SCHRÖTER D, CRAMER W, LEEMANS R, et al. Ecosystem service supply and vulnerability to global change in Europe[J]. *Science*, 2005(310): 1333-1337.
- [3] KEFI S, RIETKERK M, KATUL G G. Vegetation pattern shift as a result of rising atmospheric CO₂ in arid ecosystems[J]. *Theoretical Population Biology*, 2008, 74(4): 332-344.
- [4] 王小利. 几类生态模型的分支研究[D]. 重庆: 西南大学, 2016.
WANG X L. Bifurcation analysis of some ecological models[D]. Chongqing: Southwest University, 2016.(in Chinese)
- [5] COUTERON P, LEJEUNE O. Periodic spotted patterns in semi-arid vegetation explained by a propagation-inhibition model[J]. *Journal of Ecology*, 2001, 89(4): 616-628.
- [6] KLAUSMEIER C A. Regular and irregular patterns in semiarid vegetation[J]. *Science*, 1999, 284(5421): 1826-1828.
- [7] KOCH A J, MEINHARTDT H. Biological pattern formation: from basic mechanisms to complex structures[J]. *Review of Modern Physics*, 1994, 66(4): 1481.
- [8] MEINHARTDT H. Pattern formation in biology: a comparison of models and experiments[J]. *Reports on Progress in Physics*, 1992, 55(6): 797.
- [9] MERON E, GILAD E, HARDENBER J V, et al. Vegetation patterns along a rainfall gradient[J]. *Chaos Solitons and Fractals*, 2004, 19(2): 367-376.
- [10] RIETKERK M, BOERLIJST M C, LANGEVELDE F V, et al. Self-organization of vegetation in arid ecosystems[J]. *The American Naturalist*, 2002, 160(4): 524-530.
- [11] HARDENBER J V, MERON E, SHACHAK M, et al. Diversity of vegetation patterns and desertification[J]. *Physical Review Letters*, 2001, 87(19): 198101.
- [12] DEBLAUWE V, BARBIER N, COUTERON P, et al. The global biogeography of semi-arid periodic vegetation patterns[J]. *Global Ecology and Biogeography*, 2010, 17(6): 715-723.
- [13] RIETKERK M, KOPPEL V D J. Regular pattern formation in real ecosystems[J]. *Trends in Ecology and Evolution*, 2008, 23(3): 169-175.
- [14] MARASCO A, IUORIO A, CARTENI F, et al. Water limitation and negative plant-soil feedback explain vegetation patterns along rainfall gradient[J]. *Procedia Environ Sci*, 2013, 19(6): 139-147.
- [15] 王翠花. 半干旱区域的植被斑图动力学[D]. 太原: 山西大学, 2018.
WANG C H. Vegetation pattern dynamics in seme-arid environment[D]. Taiyuan: Shanxi University, 2018.(in Chinese)
- [16] LEFEVER R, LEJEUNE O. On the origin of tiger bush[J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 1997, 59(2): 263-294.
- [17] OKAYASU T, AIZAWA Y. Systematic analysis of periodic vegetation patterns[J]. *Progress of Theoretical Physics*, 2001, 106(4): 705-720.
- [18] SHNERB N M, SARAH P, LAVEE H, et al. Reactive glass and vegetation patterns[J]. *Physical Review Letters*, 2002, 90(3): 038101.
- [19] HILLERISLAMBERS R, RIETKERK M, FRANK D B, et al. Vegetation pattern formation in semi-arid grazing systems[J]. *Ecology*, 2001, 82(1): 50-61.
- [20] TURING A M. The chemical basis of morphogenesis[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1952, 237(641): 37-72.
- [21] 陆金甫, 关治. 偏微分方程数值解法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
LU J F, GUAN Z. Numerical solution of partial differential equations[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.(in Chinese)

责任编辑: 赵新科