

两种分裂点连接运算图的 Randić 谱*

卢志琴, 马小玲[†]

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

摘要: 对一个连通正则图 G_1 与任意一个正则图 G_2 , 基于分裂图 $SP(G_1)$ 与图 G_2 的两种运算, 考虑对应新图类的Randić (规范化拉普拉斯, 规范化无符号拉普拉斯)谱. 利用这些结果, 构造了关于上述三个矩阵的非正则的同谱图, 并且计算了新构造图的度基尔霍夫指数和生成树的数目.

关键词: Randić谱; 规范化拉普拉斯谱; 规范化无符号拉普拉斯谱; 分裂图; 同谱图; 度基尔霍夫指数; 生成树数目

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2021.11.16.0002

中图分类号: O157.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2022)05-0550-010

引文格式: 卢志琴, 马小玲. 两种分裂点连接运算图的 Randić 谱[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2022, 39(5): 550-559.

英文引文格式: LU Zhiqin, MA Xiaoling. The Randić spectrum of two types of splitting-vertex join graphs[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2022, 39(5): 550-559.

The Randić Spectrum of Two Types of Splitting-Vertex Join Graphs

LU Zhiqin, MA Xiaoling

(School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China)

Abstract: For a connected regular graph G_1 and an arbitrary regular graph G_2 , we determine the Randić (respectively, normalized Laplacian and normalized signless Laplacian) spectra of two types of graph operations on G_1 and G_2 involving the SP -graph of G_1 . Moreover, applying these results, we construct some non-regular simultaneous cospectral graphs for the Randić, normalized Laplacian and normalized signless Laplacian matrices, and compute the degree Kirchhoff index and the number of spanning trees of the newly constructed graphs.

Key words: Randić spectrum; normalized Laplacian spectrum; normalized signless Laplacian spectrum; splitting graph; cospectral graphs; degree Kirchhoff index; the number of spanning trees

0 引言

本文考虑的所有图均为简单且无向的图. 设 $G = (V(G), E(G))$ 是一个图, 顶点集为 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 边集为 $E(G)$. 图 G 的邻接矩阵记为 $A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$, 如果 v_i 和 v_j 是邻接的, 则 $a_{ij} = 1$; 否则, $a_{ij} = 0$. 设 $d_i = d_G(v_i)$ 是 G 中点 v_i 的度, $D(G) = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ 是对角矩阵. 1975年, Randić提出了Randić指标, 定义为^[1]

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{d_u d_v}}.$$

2010年, Bozkurt等^[2]引入了Randić矩阵, 简记为 R 矩阵. Randić矩阵被定义为 $R = (r_{ij})_{n \times n} = D^{-\frac{1}{2}}(G)A(G)D^{-\frac{1}{2}}(G)$, 即: 当 v_i 和 v_j 是邻接时, $r_{ij} = 1/\sqrt{d_i d_j}$; 否则, $r_{ij} = 0$.

根据定义, 图 G 的规范化拉普拉斯矩阵和规范化无符号拉普拉斯矩阵分别定义为 $\mathcal{L}(G) = I_n - D^{-1/2}(G)A(G)D^{-1/2}(G)$ 和 $\mathcal{Q}(G) = I_n + D^{-1/2}(G)A(G)D^{-1/2}(G)$, 其中 I_n 为 n 阶单位矩阵. 对于矩阵 $M_{n \times n}$, 我们用 $f_M(x)$ 表示 M 的

* 收稿日期: 2021-11-16

基金项目: 新疆维吾尔自治区自然科学基金(2021D01C069); 新疆维吾尔自治区优秀青年科技人才项目(2019Q016); 新疆维吾尔自治区高校科研计划(XJEDU20211001).

作者简介: 卢志琴(1995-), 女, 硕士生, 从事图论及其应用的研究, E-mail: 3051377685@qq.com.

[†] 通讯作者: 马小玲(1981-), 女, 博士, 副教授, 主要从事图论及其应用的研究, E-mail: mxling2018@163.com.

特征多项式, 即 $f_M(x) = \det(xI_n - M)$. 因此, $f_{R(G)}(x), f_{\mathcal{L}(G)}(x), f_{\mathcal{Q}(G)}(x)$ 是 Randić 矩阵 (规范化拉普拉斯矩阵, 规范化无符号拉普拉斯矩阵) 的特征多项式, 它的根是 Randić 矩阵 (规范化拉普拉斯矩阵, 规范化无符号拉普拉斯矩阵) 的特征值. 将 $R(G), \mathcal{L}(G)$ 和 $\mathcal{Q}(G)$ 的特征值分别表示为:

$$\begin{aligned} \gamma_1(G) &\geq \gamma_2(G) \geq \dots \geq \gamma_n(G), \\ \delta_1(G) &< \delta_2(G) \leq \dots \leq \delta_n(G), \\ \eta_1(G) &\geq \eta_2(G) \geq \dots \geq \eta_n(G). \end{aligned}$$

注意到 $\delta_1(G) = 0$. 显然, Randić 矩阵与规范化拉普拉斯矩阵和规范化无符号拉普拉斯矩阵有直接的联系 (见文献[3]): $\mathcal{L}(G) = I_n - R(G), \mathcal{Q}(G) = I_n + R(G)$. 如果 γ_i 是 R 特征值, 则 \mathcal{L} 的特征值 δ_i 和 \mathcal{Q} 的特征值 η_i 分别可以表达为:

$$\delta_i = 1 - \gamma_i, \quad \eta_i = 1 + \gamma_i, \quad 1 \leq i \leq n \tag{1}$$

因此, 同一个图 G 的 \mathcal{L} 矩阵和 \mathcal{Q} 矩阵的特征值可以被 R 矩阵的特征值所确定. $R(G), \mathcal{L}(G), \mathcal{Q}(G)$ 矩阵的特征值及其重数的集合称为 R -谱 (\mathcal{L} -谱, \mathcal{Q} -谱). 两个图如果有相同的 R -谱 (\mathcal{L} -谱, \mathcal{Q} -谱), 则称其为 R 同谱 (\mathcal{L} 同谱, \mathcal{Q} 同谱).

近年来, 一些学者研究了由图运算构造的图的谱性质. 在这个研究方向上有一些著名的图运算, 例如: 不交并、笛卡儿积、Kronocker 积、强积、字典积、冠运算、边冠运算、邻接冠等. 这些图的谱结果见文献[4-9]. 两个图的连接运算^[10]是它们的不交并, 将一个图的每个顶点连接到另一个图的每个顶点上, 并且保持两个图中的原有边. 一个图 G 的分裂图^[11]记为 $SP(G)$, 是将 G 的每个点 u 做一个拷贝 u' , 然后将 u' 与 u 的所有邻点相连而得到的图. 新增加的点集记为 $S(G)$, 即 $S(G) = V(SP(G)) \setminus V(G)$. 现在我们基于分裂图, 给出以下两种类型的图运算.

定义 1 设 G_1 和 G_2 是两个点不交的图, 点数分别为 n_1 和 n_2 . 则

(i) G_1 和 G_2 的分裂 V -点连接图, 记为 $G_1 \vee G_2$, 是将 $SP(G_1)$ 中 $V(G_1)$ 的每个点与 G_2 中的每个点连接而得到的图.

(ii) G_1 和 G_2 的分裂 S -点连接图, 记为 $G_1 \wedge G_2$, 是将 $SP(G_1)$ 中 $S(G_1)$ 的每个点与 G_2 中的每个点连接而得到的图.

注意到如果 G_i 有 n_i 个点和 m_i 条边, $i = 1, 2$, 则 $G_1 \vee G_2$ 有 $2n_1 + n_2$ 个点和 $3m_1 + n_1n_2 + m_2$ 条边, $G_1 \wedge G_2$ 有 $2n_1 + n_2$ 个点和 $3m_1 + n_1n_2 + m_2$ 条边.

例 1 设 G_1 和 G_2 分别为圈 C_4 和完全图 K_2 . 两个图 $C_4 \vee K_2$ 和 $C_4 \wedge K_2$ 如图 1 所示.

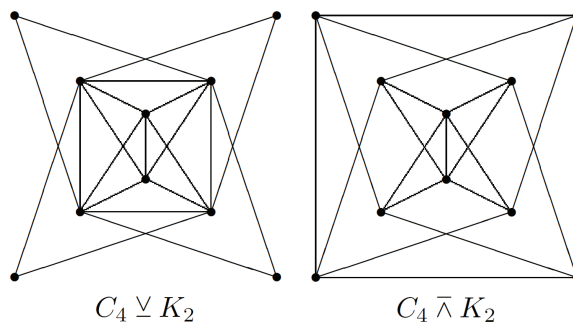


图 1 C_4 和 K_2 的分裂 V -点连接图和分裂 S -点连接图

1 准备工作

对于任意整数 k, n_1 和 n_2, I_k 记为 k 阶单位矩阵, $\mathbf{1}_k$ 记为 k 阶全 1 列向量, $J_{n_1 \times n_2}$ 是所有项为 1 的 $n_1 \times n_2$ 阶矩阵.

引理 1^[12] 设 M_1, M_2, M_3, M_4 分别为 $p \times p, p \times q, q \times p, q \times q$ 矩阵且 M_1 和 M_4 是可逆的. 则

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} &= \det(M_1) \cdot \det(M_4 - M_3M_1^{-1}M_2) \\ &= \det(M_4) \cdot \det(M_1 - M_2M_4^{-1}M_3), \end{aligned}$$

其中 $M_1 - M_2M_4^{-1}M_3$ 和 $M_4 - M_3M_1^{-1}M_2$ 分别称为 M_4 和 M_1 的 Schur 补.

引理 2^[4] 设 A 是一个 $n \times n$ 阶实矩阵, $J_{n \times n}$ 为 $n \times n$ 阶矩阵, 其所有元素都为 1. 则

$$\det(A + \alpha J_{n \times n}) = \det(A) + \alpha \mathbf{1}_n^T \text{adj}(A) \mathbf{1}_n,$$

其中 α 是一个实数, $\text{adj}(A)$ 是 A 的伴随矩阵.

引理 3^[13] 对任意实数 $c, d > 0$, 我们有

$$(cI_n - dJ_{n \times n})^{-1} = \frac{1}{c}I_n + \frac{d}{c(c - nd)}J_{n \times n}.$$

根据电网络理论, Klein和Randić^[14]提出了一个名为电阻距离的距离函数. 给定图 G 中任意一对顶点 v_i 和 v_j , 设 $\{i\}$ 表示 v_i 和 v_j 之间的电阻距离.

Chen和Zhang^[15]证明了电阻距离可以自然地用规范化拉普拉斯矩阵的特征值和特征向量表示, 并引入了另一个图不变量, 定义为 $Kf^*(G) = \sum_{i < j} d_i d_j \{i\}$, 称为度基尔霍夫指数^[16-17]. 它与图的规范化拉普拉斯谱密切相关(见引理4 (i)).

引理 4 设 G 为 n 个点, m 条边的连通图, $\{0 = \delta_1 < \delta_2 \leq \dots \delta_n\}$ 是 G 的 $\mathcal{L}(G)$ 的谱, 则

(i)^[15] G 的度基尔霍夫指数为

$$Kf^*(G) = 2m \sum_{i=2}^n \frac{1}{\delta_i}.$$

(ii)^[18] G 的生成树数目 $\tau(G)$ 有下列式子

$$\prod_{i=1}^n d_i \prod_{k=2}^n \delta_k = 2m\tau(G).$$

$n \times n$ 矩阵 M 的 M -冠^[16-17] 记为 $\Gamma_M(x)$, 被定义为 $(xI_n - M)^{-1}$ 矩阵的所有元素的和, 即:

$$\Gamma_M(x) = \mathbf{1}_n^T (xI_n - M)^{-1} \mathbf{1}_n \quad (2)$$

引理 5^[19] 如果 M 是一个 n 阶矩阵且行和等于常数 t , 则 $\Gamma_M(x) = \frac{n}{x-t}$.

2 分裂 V -点连接图的谱

在这一部分中, 我们得到了两个正则图的分裂 V -点连接图的 R -谱, \mathcal{L} -谱, \mathcal{Q} -谱以及相关谱的一些应用.

设 G_i 是 n_i 个点的 r_i -正则图, $i = 1, 2$. 根据定义1(i), $G_1 \vee G_2$ 的点可以由 $V(G_1) \cup S(G_1) \cup V(G_2)$ 构成, 其中 $V(G_1) = \{v_1, v_2, \dots, v_{n_1}\}$, $S(G_1) = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_{n_1}\}$, $V(G_2) = \{u_1, u_2, \dots, u_{n_2}\}$.

显然, $G_1 \vee G_2$ 的点的度为:

$$d_{G_1 \vee G_2}(v_i) = 2r_1 + n_2, \quad i = 1, 2, \dots, n_1,$$

$$d_{G_1 \vee G_2}(v'_i) = r_1, \quad i = 1, 2, \dots, n_1,$$

$$d_{G_1 \vee G_2}(u_j) = r_2 + n_1, \quad j = 1, 2, \dots, n_2.$$

2.1 分裂 V -点连接图的 R -谱

$G_1 \vee G_2$ 的邻接矩阵和对角矩阵可按 $V(G_1)$, $S(G_1)$ 和 $V(G_2)$ 的顺序表示为如下块矩阵形式:

$$A(G_1 \vee G_2) = \begin{pmatrix} A(G_1) & A(G_1) & J_{n_1 \times n_2} \\ A(G_1) & O_{n_1 \times n_1} & O_{n_1 \times n_2} \\ J_{n_2 \times n_1} & O_{n_2 \times n_1} & A(G_2) \end{pmatrix},$$

$$D(G_1 \vee G_2) = \begin{pmatrix} 2r_1 + n_2 I_{n_1} & O_{n_1 \times n_1} & O_{n_1 \times n_2} \\ O_{n_1 \times n_1} & r_1 I_{n_1} & O_{n_1 \times n_2} \\ O_{n_2 \times n_1} & O_{n_2 \times n_1} & (r_2 + n_1) I_{n_2} \end{pmatrix},$$

则 $G_1 \vee G_2$ 的 Randić 矩阵可表示为:

$$\begin{aligned} R(G_1 \vee G_2) &= D^{-\frac{1}{2}}(G_1 \vee G_2) A(G_1 \vee G_2) D^{-\frac{1}{2}}(G_1 \vee G_2) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2r_1 + n_2} A(G_1) & cA(G_1) & bJ_{n_1 \times n_2} \\ cA(G_1) & O_{n_1 \times n_1} & O_{n_1 \times n_2} \\ bJ_{n_2 \times n_1} & O_{n_2 \times n_1} & \frac{1}{r_2 + n_1} A(G_2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中 b 为常量, 其值为 $\frac{1}{\sqrt{(2r_1+n_2)(r_2+n_1)}}$, c 为常量, 其值为 $\frac{1}{\sqrt{2r_1^2+r_1n_2}}$.

定理 1 设 G_i 是有 n_i 个点的 r_i -正则图, $i = 1, 2$. 则 $G_1 \vee G_2$ 的 Randić 谱为:

- (i) $\frac{r_2\gamma_j(G_2)}{r_2+n_1}$ 对于每一个 $j = 2, 3, \dots, n_2$;
- (ii) 方程的两个根 $(2r_1+n_2)x^2 - r_1\gamma_i(G_1)x - r_1\gamma_i^2(G_1) = 0$ 对于每一个 $i = 2, 3, \dots, n_1$;
- (iii) 方程的三个根 $(2r_1r_2+r_2n_2+2r_1n_1+n_1n_2)x^3 - (3r_1r_2+r_1n_1+r_2n_2)x^2 - (r_1n_1+n_1n_2)x + r_1r_2 = 0$.

证明 $G_1 \vee G_2$ 的 Randić 矩阵的特征多项式是

$$\begin{aligned} f_{R(G_1 \vee G_2)}(x) &= \det(xI_{2n_1+n_2} - R(G_1 \vee G_2)) \\ &= \det \begin{pmatrix} xI_{n_1} - \frac{1}{2r_1+n_2}A(G_1) & -cA(G_1) & -bJ_{n_1 \times n_2} \\ -cA(G_1) & xI_{n_1} & O_{n_1 \times n_2} \\ -bJ_{n_2 \times n_1} & O_{n_2 \times n_1} & xI_{n_2} - \frac{1}{r_2+n_1}A(G_2) \end{pmatrix} \\ &= \det(xI_{n_2} - \frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)) \cdot \det(S) \\ &= \prod_{j=1}^{n_2} (x - \frac{r_2\gamma_j(G_2)}{r_2+n_1}) \cdot \det(S), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} xI_{n_1} - \frac{1}{2r_1+n_2}A(G_1) & -cA(G_1) \\ -cA(G_1) & xI_{n_1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -bJ_{n_1 \times n_2} \\ O_{n_1 \times n_2} \end{pmatrix} (xI_{n_2} - \frac{1}{r_2+n_1}A(G_2))^{-1} \begin{pmatrix} -bJ_{n_2 \times n_1} & O_{n_2 \times n_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xI_{n_1} - \frac{1}{2r_1+n_2}A(G_1) & -cA(G_1) \\ -cA(G_1) & xI_{n_1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I_{n_1 \times n_2} \\ O_{n_1 \times n_2} \end{pmatrix} b^2 \mathbf{1}_{n_2} (\mathbf{1}_{n_2}^T (xI_{n_2} - \frac{1}{r_2+n_1}A(G_2))^{-1} \mathbf{1}_{n_2}) \mathbf{1}_{n_2}^T \begin{pmatrix} I_{n_2 \times n_1} & O_{n_2 \times n_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xI_{n_1} - \frac{1}{2r_1+n_2}A(G_1) & -cA(G_1) \\ -cA(G_1) & xI_{n_1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I_{n_1 \times n_2} \\ O_{n_1 \times n_2} \end{pmatrix} b^2 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x) J_{n_2 \times n_2} \begin{pmatrix} I_{n_2 \times n_1} & O_{n_2 \times n_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xI_{n_1} - \frac{1}{2r_1+n_2}A(G_1) - b^2 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x) J_{n_1 \times n_1} & -cA(G_1) \\ -cA(G_1) & xI_{n_1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

通过应用引理1, S 是 $xI_{n_2} - \frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)$ 的 Schur 补. 再次应用引理1, 得到以下结果

$$\begin{aligned} \det(S) &= \det(xI_{n_1}) \det(xI_{n_1} - \frac{1}{2r_1+n_2}A(G_1) - b^2 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x) J_{n_1 \times n_1} - \frac{c^2}{x} A^2(G_1)) \\ &= x^{n_1} \left(\det(xI_{n_1} - \frac{1}{2r_1+n_2}A(G_1) - \frac{c^2}{x} A^2(G_1)) \right. \\ &\quad \left. - b^2 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x) \mathbf{1}_{n_1}^T \text{adj}(xI_{n_1} - \frac{1}{2r_1+n_2}A(G_1) - \frac{c^2}{x} A^2(G_1)) \mathbf{1}_{n_1} \right) \\ &= x^{n_1} \det(xI_{n_1} - \frac{1}{2r_1+n_2}A(G_1) - \frac{c^2}{x} A^2(G_1)) \\ &\quad \times \left[1 - b^2 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x) \mathbf{1}_{n_1}^T (xI_{n_1} - \frac{1}{2r_1+n_2}A(G_1) - \frac{c^2}{x} A^2(G_1))^{-1} \mathbf{1}_{n_1} \right] \\ &= x^{n_1} \det(xI_{n_1} - \frac{1}{2r_1+n_2}A(G_1) - \frac{c^2}{x} A^2(G_1)) \times \left[1 - b^2 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x) \Gamma_{\frac{1}{2r_1+n_2}A(G_1) + \frac{c^2}{x} A^2(G_1)}(x) \right] \\ &= x^{n_1} \det(xI_{n_1} - \frac{r_1}{2r_1+n_2}R(G_1) - \frac{c^2 r_1^2}{x} R^2(G_1)) \times \left[1 - \frac{n_1 n_2 b^2}{(x - \frac{r_2}{r_2+n_1})(x - \frac{r_1}{2r_1+n_2} - \frac{c^2 r_1^2}{x})} \right] \\ &= x^{n_1} \prod_{i=1}^{n_1} \left(x - \frac{r_1}{2r_1+n_2} \gamma_i(G_1) - \frac{c^2 r_1^2}{x} \gamma_i^2(G_1) \right) \times \left[1 - \frac{n_1 n_2 b^2}{(x - \frac{r_2}{r_2+n_1})(x - \frac{r_1}{2r_1+n_2} - \frac{c^2 r_1^2}{x})} \right], \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
f_{R(G_1 \vee G_2)}(x) &= x^{n_1} \prod_{j=1}^{n_2} \left(x - \frac{r_2 \gamma_j(G_2)}{r_2 + n_1} \right) \prod_{i=1}^{n_1} \left(x - \frac{r_1}{2r_1 + n_2} \gamma_i(G_1) - \frac{c^2 r_1^2}{x} \gamma_i^2(G_1) \right) \cdot \left[1 - \frac{n_1 n_2 b^2}{\left(x - \frac{r_2}{r_2 + n_1} \right) \left(x - \frac{r_1}{2r_1 + n_2} - \frac{c^2 r_1^2}{x} \right)} \right] \\
&= x^{n_1} \cdot \frac{(r_2 + n_1)x - r_2}{r_2 + n_1} \cdot \frac{(2r_1 + n_2)x^2 - r_1 x - r_1}{x^{n_1} (2r_1 + n_2)} \prod_{j=2}^{n_2} \frac{(r_2 + n_1)x - r_2 \gamma_j(G_2)}{r_2 + n_1} \\
&\quad \times \prod_{i=2}^{n_1} \left(\frac{(2r_1 + n_2)x^2 - r_1 \gamma_i(G_1)x - r_1 \gamma_i^2(G_1)}{2r_1 + n_2} \right) \left[1 - \frac{n_1 n_2 b^2}{\left(x - \frac{r_2}{r_2 + n_1} \right) \left(x - \frac{r_1}{2r_1 + n_2} - \frac{c^2 r_1^2}{x} \right)} \right] \\
&= \prod_{j=2}^{n_2} \frac{(r_2 + n_1)x - r_2 \gamma_j(G_2)}{r_2 + n_1} \prod_{i=2}^{n_1} \left(\frac{(2r_1 + n_2)x^2 - r_1 \gamma_i(G_1)x - r_1 \gamma_i^2(G_1)}{2r_1 + n_2} \right) \\
&\quad \times \frac{(2r_1 r_2 + r_2 n_2 + 2r_1 n_1 + n_1 n_2)x^3 - (3r_1 r_2 + r_1 n_1 + r_2 n_2)x^2 - (r_1 n_1 + n_1 n_2)x + r_1 r_2}{(2r_1 + n_2)(r_2 + n_1)}.
\end{aligned}$$

因此, 定理1得证.

2.2 分裂 V -点连接图的 $\mathcal{L}(Q)$ -谱

值得注意的是, 对于一个图 G , 有 $\mathcal{L}(G) = I - R(G)$, $Q(G) = I + R(G)$. 因此, 图的规范化(无符号)拉普拉斯谱可以用图的Randić谱表示. 根据Randić谱与规范化(无符号)拉普拉斯谱之间的关系, 以及定理1, 我们得到定理2和3.

定理 2 设 G_i 是有 n_i 个点的 r_i -正则图, $i = 1, 2$. 则 $G_1 \vee G_2$ 的规范化拉普拉斯谱为:

- (i) $\frac{n_1 + r_2(1 - \gamma_j(G_2))}{r_2 + n_1}$ 对于每一个 $j = 2, 3, \dots, n_2$;
- (ii) 方程的两个根 $(2r_1 + n_2)x^2 - (4r_1 + 2n_2 - r_1 \gamma_i(G_1))x + n_2 + 2r_1 - r_1 \gamma_i^2(G_1) - r_1 \gamma_i(G_1) = 0$ 对于每一个 $i = 2, 3, \dots, n_1$;
- (iii) 方程的三个根 $(2r_1 r_2 + r_2 n_2 + 2r_1 n_1 + n_1 n_2)x^3 - (3r_1 r_2 + 2r_2 n_2 + 5r_1 n_1 + 3n_1 n_2)x^2 + (r_2 n_2 + 3r_1 n_1 + 2n_1 n_2)x = 0$.

证明 首先, 根据等式(1)和定理1 (i), 得到了 G 的规范化拉普拉斯谱的部分特征值

$$1 - \frac{r_2 \gamma_j(G_2)}{r_2 + n_1} = \frac{n_1 + r_2(1 - \gamma_j(G_2))}{r_2 + n_1},$$

其中 $j = 2, 3, \dots, n_2$.

其次, 根据定理1 (ii), 我们知道 $G_1 \vee G_2$ 的一些Randić特征值是方程 $(2r_1 + n_2)x^2 - r_1 \gamma_i(G_1)x - r_1 \gamma_i(G_1) = 0$ 的两个根, 对于 $i = 2, 3, \dots, n_1$. 则 $G_1 \vee G_2$ 的规范化拉普拉斯特征值为方程的两个根:

$$(2r_1 + n_2)(1 - x)^2 - r_1 \gamma_i(G_1)(1 - x) - r_1 \gamma_i^2(G_1) = 0 \quad (3)$$

其中 $\gamma_i (i = 2, 3, \dots, n_1)$ 是 $R(G_1)$ 的特征值. 通过化简方程(3), 我们得到

$$(2r_1 + n_2)x^2 - (4r_1 + 2n_2 - r_1 \gamma_i(G_1))x + n_2 + 2r_1 - r_1 \gamma_i^2(G_1) - r_1 \gamma_i(G_1) = 0.$$

由此得出定理2 (ii)的结果.

最后, 根据定理1 (iii), $G_1 \vee G_2$ 的一些规范化拉普拉斯特征值是方程的三个根:

$$(2r_1 r_2 + r_2 n_2 + 2r_1 n_1 + n_1 n_2)(1 - x)^3 - (3r_1 r_2 + r_1 n_1 + r_2 n_2)(1 - x)^2 - (r_1 n_1 + n_1 n_2)(1 - x) + r_1 r_2 = 0.$$

通过化简, 我们得到

$$(2r_1 r_2 + r_2 n_2 + 2r_1 n_1 + n_1 n_2)x^3 - (3r_1 r_2 + 2r_2 n_2 + 5r_1 n_1 + 3n_1 n_2)x^2 + (r_2 n_2 + 3r_1 n_1 + 2n_1 n_2)x = 0.$$

故定理2得证.

利用规范化拉普拉斯特征值与 G 的度基尔霍夫指数和生成树数目的关系, 我们用 G_1 和 G_2 的Randić特征值来考虑 $G_1 \vee G_2$ 的度基尔霍夫指数和生成树数目.

推论 1 设 G_i 是有 n_i 个点, m_i 条边的 r_i -正则图, $i = 1, 2$. 则 $G_1 \vee G_2$ 的度基尔霍夫指数为:

$$\begin{aligned}
Kf^*(G_1 \vee G_2) &= (6m_1 + 2m_2 + 2n_1 n_2) \left(\frac{3r_1 r_2 + 2r_2 n_2 + 5r_1 n_1 + 3n_1 n_2}{r_2 n_2 + 3r_1 n_1 + 2n_1 n_2} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=2}^{n_1} \frac{4r_1 + 2n_2 - r_1 \gamma_i(G_1)}{n_2 + 2r_1 - r_1 \gamma_i^2(G_1) - r_1 \gamma_i(G_1)} + \sum_{j=2}^{n_2} \frac{r_2 + n_1}{n_1 + r_2(1 - \gamma_j(G_2))} \right) \quad (4)
\end{aligned}$$

证明 由引理4 (i)可知 $Kf^*(G) = 2m \sum_{i=2}^n \frac{1}{\delta_i}$, 其中 δ_i 为 G 的规范化拉普拉斯特征值. 因此, 度基尔霍夫指数 $Kf^*(G_1 \vee G_2)$ 计算如下.

首先, 应用定理2 (i), 得到

$$\delta_i(G_1 \vee G_2) = \frac{n_1 + r_2(1 - \gamma_j(G_2))}{r_2 + n_1} \tag{5}$$

其中 $j = 2, 3, \dots, n_2$. 因此

$$\frac{1}{\delta_i(G_1 \vee G_2)} = \frac{r_2 + n_1}{n_1 + r_2(1 - \gamma_j(G_2))} \tag{6}$$

接下来, 通过定理2 (ii), 方程(7)的根 β_1, β_2 就是 $G_1 \vee G_2$ 的规范化拉普拉斯特征值.

$$(2r_1 + n_2)x^2 - (4r_1 + 2n_2 - r_1\gamma_i(G_1))x + n_2 + 2r_1 - r_1\gamma_i^2(G_1) - r_1\gamma_i(G_1) = 0 \tag{7}$$

其中 $\gamma_i (i = 2, 3, \dots, n_1)$ 为 $R(G_1)$ 的特征值.

因此, 根据韦达定理, 我们有

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1\beta_2} = \frac{4r_1 + 2n_2 - r_1\gamma_i(G_1)}{n_2 + 2r_1 - r_1\gamma_i^2(G_1) - r_1\gamma_i(G_1)}, \quad i = 2, 3, \dots, n_2. \tag{8}$$

最后, 根据定理2 (iii), 我们得到 $\delta_1(G_1 \vee G_2) = 0$. 即有方程

$$(2r_1r_2 + r_2n_2 + 2r_1n_1 + n_1n_2)x^3 - (3r_1r_2 + 2r_2n_2 + 5r_1n_1 + 3n_1n_2)x^2 + (r_2n_2 + 3r_1n_1 + 2n_1n_2)x = 0 \tag{9}$$

设方程(9)的另外两个根可以表示为 x_1, x_2 . 根据韦达定理, 我们有

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{3r_1r_2 + 2r_2n_2 + 5r_1n_1 + 3n_1n_2}{r_2n_2 + 3r_1n_1 + 2n_1n_2} \tag{10}$$

注意到 $|E(G_1 \vee G_2)| = 3m_1 + n_1n_2 + m_2$. 结合等式(6), (8)和(10)可以得到 $G_1 \vee G_2$ 的度基尔霍夫度指数, 如式(4)所示.

推论 2 设 G_i 是有 n_i 个点, m_i 条边的 r_i -正则图, $i = 1, 2$. 则 $G_1 \vee G_2$ 的生成树数目为:

$$\tau(G_1 \vee G_2) = \frac{r_1^{n_1}(r_2n_2 + 3r_1n_1 + 2n_1n_2)}{6m_1 + 2m_2 + 2n_1n_2} \left(\prod_{i=2}^{n_1} (n_2 + 2r_1 - r_1\gamma_i^2(G_1) - r_1\gamma_i(G_1)) \cdot \prod_{j=2}^{n_2} (n_1 + r_2(1 - \gamma_j(G_2))) \right) \tag{11}$$

证明 使用引理4 (ii), 我们知道

$$\tau(G) = \frac{\prod_{i=1}^n d_i \prod_{k=2}^n \delta_k}{2m} \tag{12}$$

为了得到结果, 我们考虑 $G_1 \vee G_2$ 的规范化拉普拉斯特征值如下:

由方程(7), 我们得到

$$\beta_1\beta_2 = \frac{n_2 + 2r_1 - r_1\gamma_i^2(G_1) - r_1\gamma_i(G_1)}{2r_1 + n_2} \tag{13}$$

其中 $\gamma_i (i = 2, 3, \dots, n_1)$ 为 $R(G_1)$ 的特征值.

由方程(9), 我们得到

$$x_1x_2 = \frac{r_2n_2 + 3r_1n_1 + 2n_1n_2}{2r_1r_2 + r_2n_2 + 2r_1n_1 + n_1n_2} \tag{14}$$

通过上述等式(12)和 $\prod_{i=1}^n d_i = (2r_1 + n_2)^{n_1} r_1^{n_1} (r_2 + n_1)^{n_2}$, 结合等式(5), (13)和(14)可以得到 $G_1 \vee G_2$ 的生成树数目, 如式(11)所示.

定理 3 设 G_i 是有 n_i 个点的 r_i -正则图, $i = 1, 2$. 则 $G_1 \vee G_2$ 的规范化无符号拉普拉斯谱为:

- (i) $\frac{n_1 + r_2(1 + \gamma_j(G_2))}{r_2 + n_1}$ 对于每一个 $j = 2, 3, \dots, n_2$;
- (ii) 方程的两个根 $(2r_1 + n_2)x^2 + (4r_1 + 2n_2 - r_1\gamma_i(G_1))x + n_2 + 2r_1 - r_1\gamma_i(G_1) + r_1\gamma_i^2(G_1) = 0$ 对于每一个 $i = 2, 3, \dots, n_1$;
- (iii) 方程的三个根 $(2r_1r_2 + r_2n_2 + 2r_1n_1 + n_1n_2)x^3 - (9r_1r_2 + 4r_2n_2 + 7r_1n_1 + 3n_1n_2)x^2 + (12r_1r_2 + 5r_2n_2 + 7r_1n_1 + 2n_1n_2)x - 2r_1n_1 - 4r_1r_2 - 2r_2n_2 = 0$.

证明 定理 3 可以很容易地通过定理 2 的类似证明得到.

3 分裂 S -点连接图的谱

在这一节中, 我们主要考虑两个正则图的分裂 S -点连接图的 R -谱, \mathcal{L} -谱, \mathcal{Q} -谱以及一些相关的应用.

设 G_i 是 n_i 个点的 r_i -正则图, $i = 1, 2$. 根据定义1 (ii), $G_1 \bar{\wedge} G_2$ 的点可以由 $V(G_1) \cup S(G_1) \cup V(G_2)$ 构成, 其中 $V(G_1) = \{v_1, v_2, \dots, v_{n_1}\}$, $S(G_1) = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_{n_1}\}$, $V(G_2) = \{u_1, u_2, \dots, u_{n_2}\}$.

显然, $G_1 \bar{\wedge} G_2$ 的点的度为:

$$\begin{aligned} d_{G_1 \bar{\wedge} G_2}(v_i) &= 2r_1, & i &= 1, 2, \dots, n_1, \\ d_{G_1 \bar{\wedge} G_2}(v'_i) &= r_1 + n_2, & i &= 1, 2, \dots, n_1, \\ d_{G_1 \bar{\wedge} G_2}(u_j) &= r_2 + n_1, & j &= 1, 2, \dots, n_2. \end{aligned}$$

3.1 分裂 S -点连接图的 R -谱

$G_1 \bar{\wedge} G_2$ 的邻接矩阵和对角矩阵可按 $V(G_1)$, $S(G_1)$ 和 $V(G_2)$ 的顺序表示为块矩阵形式:

$$A(G_1 \bar{\wedge} G_2) = \begin{pmatrix} A(G_1) & A(G_1) & O_{n_1 \times n_2} \\ A(G_1) & O_{n_1 \times n_1} & J_{n_1 \times n_2} \\ O_{n_2 \times n_1} & J_{n_2 \times n_1} & A(G_2) \end{pmatrix},$$

$$D(G_1 \bar{\wedge} G_2) = \begin{pmatrix} 2r_1 I_{n_1} & O_{n_1 \times n_1} & O_{n_1 \times n_2} \\ O_{n_1 \times n_1} & (r_1 + n_2) I_{n_1} & O_{n_1 \times n_2} \\ O_{n_2 \times n_1} & O_{n_2 \times n_1} & (r_2 + n_1) I_{n_2} \end{pmatrix},$$

则 $G_1 \bar{\wedge} G_2$ 的Randić矩阵可表示为:

$$\begin{aligned} R(G_1 \bar{\wedge} G_2) &= D^{-\frac{1}{2}}(G_1 \bar{\wedge} G_2) A(G_1 \bar{\wedge} G_2) D^{-\frac{1}{2}}(G_1 \bar{\wedge} G_2) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} r_1 A(G_1) & f A(G_1) & O_{n_1 \times n_2} \\ f A(G_1) & O_{n_1 \times n_1} & e J_{n_1 \times n_2} \\ O_{n_2 \times n_1} & e J_{n_2 \times n_1} & \frac{1}{r_2 + n_1} A(G_2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中 e 为常量, 其值为 $\frac{1}{\sqrt{(r_1 + n_2)(r_2 + n_1)}}$, f 为常量, 其值为 $\frac{1}{\sqrt{2r_1^2 + 2r_1 n_2}}$.

定理 4 设 G_i 是有 n_i 个点的 r_i -正则图, $i = 1, 2$. 则 $G_1 \bar{\wedge} G_2$ 的Randić谱为:

(i) $\frac{r_2 \gamma_j(G_2)}{r_2 + n_1}$ 对于每一个 $j = 2, 3, \dots, n_2$;

(ii) 方程的两个根 $(2r_1 + 2n_2)x^2 - (r_1 + n_2)\gamma_i(G_1)x - r_1 \gamma_i^2(G_1) = 0$ 对于每一个 $i = 2, 3, \dots, n_1$;

(iii) 方程的三个根 $(2r_1 r_2 + 2r_2 n_2 + 2r_1 n_1 + 2n_1 n_2)x^3 - (3r_1 r_2 + r_1 n_1 + 3r_2 n_2 + n_1 n_2)x^2 + (r_2 n_2 - r_1 n_1 - 2n_1 n_2)x + r_1 r_2 + n_1 n_2 = 0$.

证明 $G_1 \bar{\wedge} G_2$ 的Randić矩阵的特征多项式是

$$\begin{aligned} f_{R(G_1 \bar{\wedge} G_2)}(x) &= \det(xI_{2n_1 + n_2} - R(G_1 \bar{\wedge} G_2)) \\ &= \det \begin{pmatrix} xI_{n_1} - \frac{1}{2r_1} A(G_1) & -f A(G_1) & O_{n_1 \times n_2} \\ -f A(G_1) & xI_{n_1} & -e J_{n_1 \times n_2} \\ O_{n_2 \times n_1} & -e J_{n_2 \times n_1} & xI_{n_2} - \frac{1}{r_2 + n_1} A(G_2) \end{pmatrix} \\ &= \det \left(xI_{n_2} - \frac{1}{r_2 + n_1} A(G_2) \right) \cdot \det(S) \\ &= \prod_{j=1}^{n_2} \left(x - \frac{r_2 \gamma_j(G_2)}{r_2 + n_1} \right) \cdot \det(S), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 S &= \begin{pmatrix} xI_{n_1} - \frac{1}{2r_1}A(G_1) & -fA(G_1) \\ -fA(G_1) & xI_{n_1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} O_{n_1 \times n_2} \\ -eJ_{n_1 \times n_2} \end{pmatrix} \left(xI_{n_2} - \frac{1}{r_2+n_1}A(G_2) \right)^{-1} \begin{pmatrix} O_{n_2 \times n_1} & -eJ_{n_2 \times n_1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} xI_{n_1} - \frac{1}{2r_1}A(G_1) & -fA(G_1) \\ -fA(G_1) & xI_{n_1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} O_{n_1 \times n_2} \\ I_{n_1 \times n_2} \end{pmatrix} e^2 \mathbf{1}_{n_2} \left(\mathbf{1}_{n_2}^T \left(xI_{n_2} - \frac{1}{r_2+n_1}A(G_2) \right)^{-1} \mathbf{1}_{n_2} \right) \mathbf{1}_{n_2}^T \begin{pmatrix} O_{n_2 \times n_1} & I_{n_2 \times n_1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} xI_{n_1} - \frac{1}{2r_1}A(G_1) & -fA(G_1) \\ -fA(G_1) & xI_{n_1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} O_{n_1 \times n_2} \\ I_{n_1 \times n_2} \end{pmatrix} e^2 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x) J_{n_2 \times n_2} \begin{pmatrix} O_{n_2 \times n_1} & I_{n_2 \times n_1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} xI_{n_1} - \frac{1}{2r_1}A(G_1) & -fA(G_1) \\ -fA(G_1) & xI_{n_1} - e^2 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x) J_{n_1 \times n_1} \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

通过应用引理1, S 是 $xI_{n_2} - \frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)$ 的Schur补. 再次应用引理1, 得到以下结果

$$\begin{aligned}
 \det(S) &= \det \left(xI_{n_1} - e^2 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x) J_{n_1 \times n_1} \right) \\
 &\quad \det \left(xI_{n_1} - \frac{1}{2r_1}A(G_1) - f^2 A(G_1) \left(xI_{n_1} - e^2 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x) J_{n_1 \times n_1} \right)^{-1} A(G_1) \right) \\
 &= x^{n_1} \left(1 - \frac{e^2 n_1 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x)}{x} \right) \\
 &\quad \det \left(xI_{n_1} - \frac{1}{2r_1}A(G_1) - f^2 A(G_1) \left(\frac{1}{x} I_{n_1} + \frac{e^2 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x)}{x(x - e^2 n_1 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x))} J_{n_1 \times n_1} \right) A(G_1) \right) \\
 &= x^{n_1} \left(1 - \frac{e^2 n_1 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x)}{x} \right) \\
 &\quad \det \left(xI_{n_1} - \frac{1}{2r_1}A(G_1) - \frac{f^2}{x} A^2(G_1) - \frac{e^2 f^2 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x)}{x(x - e^2 n_1 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x))} A(G_1) J_{n_1 \times n_1} A(G_1) \right) \\
 &= x^{n_1} \left(1 - \frac{e^2 n_1 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x)}{x} \right) \\
 &\quad \det \left(xI_{n_1} - \frac{1}{2r_1}A(G_1) - \frac{f^2}{x} A^2(G_1) - \frac{r_1^2 e^2 f^2 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x)}{x(x - e^2 n_1 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x))} J_{n_1 \times n_1} \right) \\
 &= x^{n_1} \left(1 - \frac{e^2 n_1 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x)}{x} \right) \left(\det \left(xI_{n_1} - \frac{1}{2r_1}A(G_1) - \frac{f^2}{x} A^2(G_1) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{r_1^2 e^2 f^2 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x)}{x(x - e^2 n_1 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x))} \mathbf{1}_{n_1}^T \text{adj} \left(xI_{n_1} - \frac{1}{2r_1}A(G_1) - \frac{f^2}{x} A^2(G_1) \right) \mathbf{1}_{n_1} \right) \\
 &= x^{n_1} \left(1 - \frac{e^2 n_1 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x)}{x} \right) \det \left(xI_{n_1} - \frac{1}{2r_1}A(G_1) - \frac{f^2}{x} A^2(G_1) \right) \\
 &\quad \left[1 - \frac{r_1^2 e^2 f^2 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x)}{x(x - e^2 n_1 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x))} \mathbf{1}_{n_1}^T \left(xI_{n_1} - \frac{1}{2r_1}A(G_1) - \frac{f^2}{x} A^2(G_1) \right)^{-1} \mathbf{1}_{n_1} \right] \\
 &= x^{n_1} \left(1 - \frac{e^2 n_1 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x)}{x} \right) \det \left(xI_{n_1} - \frac{1}{2r_1}A(G_1) - \frac{f^2}{x} A^2(G_1) \right) \\
 &\quad \left[1 - \frac{r_1^2 e^2 f^2 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x) \Gamma_{\frac{1}{2r_1}A(G_1) + \frac{f^2}{x} A^2(G_1)}(x)}{x(x - e^2 n_1 \Gamma_{\frac{1}{r_2+n_1}A(G_2)}(x))} \right] \\
 &= x^{n_1} \left(1 - \frac{e^2 n_1 n_2}{x(x - \frac{r_2}{r_2+n_1})} \right) \det \left(xI_{n_1} - \frac{1}{2}R(G_1) - \frac{r_1^2 f^2}{x} R^2(G_1) \right) \\
 &\quad \left[1 - \frac{r_1^2 e^2 f^2 n_1 n_2}{x(x - \frac{n_1 n_2 e^2}{x - \frac{r_2}{r_2+n_1}})(x - \frac{r_2}{r_2+n_1})(x - \frac{1}{2} - \frac{r_1^2 f^2}{x})} \right],
 \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
 f_{R(G_1 \bar{\wedge} G_2)}(x) &= x^{n_1} \left(1 - \frac{e^2 n_1 n_2}{x(x - \frac{r_2}{r_2 + n_1})} \right) \prod_{j=1}^{n_2} \left(x - \frac{r_2 \gamma_j(G_2)}{r_2 + n_1} \right) \prod_{i=1}^{n_1} \left(x - \frac{\gamma_i(G_1)}{2} - \frac{f^2 r_1^2 \gamma_i^2(G_1)}{x} \right) \\
 &\quad \left[1 - \frac{r_1^2 e^2 f^2 n_1 n_2}{x(x - \frac{n_1 n_2 e^2}{x - \frac{r_2}{r_2 + n_1}})(x - \frac{r_2}{r_2 + n_1})(x - \frac{1}{2} - \frac{r_1^2 f^2}{x})} \right] \\
 &= \prod_{j=2}^{n_2} \frac{(r_2 + n_1)x - r_2 \gamma_j(G_2)}{r_2 + n_1} \prod_{i=2}^{n_1} \left(\frac{(2r_1 + 2n_2)x^2 - (r_1 + n_2)\gamma_i(G_1)x - r_1 \gamma_i^2(G_1)}{2r_1 + 2n_2} \right) \\
 &\quad \times \frac{1}{(2r_1 + 2n_2)(r_2 + n_1)} \left((2r_1 + 2n_2)(r_2 + n_1)x^3 - (3r_1 r_2 + r_1 n_1 + 3r_2 n_2 + n_1 n_2)x^2 \right. \\
 &\quad \left. + (r_2 n_2 - r_1 n_1 - 2n_1 n_2)x + r_1 r_2 + n_1 n_2 \right).
 \end{aligned}$$

定理4得证.

3.2 分裂S-点连接图的 $\mathcal{L}(\mathcal{Q})$ -谱

在本节中, 我们应用定理4来计算分裂S-点连接图的规范化(无符号)拉普拉斯谱, 以及度基尔霍夫指数和生成树的数目. 通过对2.2节中定理和推论的类似证明, 我们可以得到以下主要结论.

定理 5 设 G_i 是有 n_i 个点的 r_i -正则图, $i = 1, 2$. 则 $G_1 \bar{\wedge} G_2$ 的规范化拉普拉斯谱为:

- (i) $\frac{n_1 + r_2(1 - \gamma_j(G_2))}{r_2 + n_1}$ 对于每一个 $j = 2, 3, \dots, n_2$;
- (ii) 方程的两个根 $(2r_1 + 2n_2)x^2 - (4r_1 + 4n_2 - r_1 \gamma_i(G_1) - n_2 \gamma_i(G_1))x + 2n_2 + 2r_1 - r_1 \gamma_i(G_1) - r_1 \gamma_i^2(G_1) - n_2 \gamma_i(G_1) = 0$ 对于每一个 $i = 2, 3, \dots, n_1$;
- (iii) 方程的三个根 $(2r_1 r_2 + 2r_1 n_1 + 2r_2 n_2 + 2n_1 n_2)x^3 - (3r_1 r_2 + 3r_2 n_2 + 5r_1 n_1 + 5n_1 n_2)x^2 + (r_2 n_2 + 3r_1 n_1 + 2n_1 n_2)x = 0$.

推论 3 设 G_i 是有 n_i 个点, m_i 条边的 r_i -正则图, $i = 1, 2$. 则 $G_1 \bar{\wedge} G_2$ 的度基尔霍夫指数为:

$$\begin{aligned}
 K f^*(G_1 \bar{\wedge} G_2) &= (6m_1 + 2m_2 + 2n_1 n_2) \left(\frac{3r_1 r_2 + 3r_2 n_2 + 5r_1 n_1 + 5n_1 n_2}{r_2 n_2 + 3r_1 n_1 + 2n_1 n_2} + \sum_{j=2}^{n_2} \frac{n_1 + r_2}{n_1 + r_2(1 - \gamma_j(G_2))} \right) \\
 &\quad + \sum_{i=2}^{n_1} \frac{4r_1 + 4n_2 - r_1 \gamma_i(G_1) - n_2 \gamma_i(G_1)}{2n_2 + 2r_1 - r_1 \gamma_i(G_1) - r_1 \gamma_i^2(G_1) - n_2 \gamma_i(G_1)}.
 \end{aligned}$$

推论 4 设 G_i 是有 n_i 个点, m_i 条边的 r_i -正则图, $i = 1, 2$. 则 $G_1 \bar{\wedge} G_2$ 的生成树数目为:

$$\tau(G_1 \bar{\wedge} G_2) = \frac{r_1^{n_1} (r_2 n_2 + 3r_1 n_1 + 2n_1 n_2)}{6m_1 + 2m_2 + 2n_1 n_2} \left(\prod_{i=2}^{n_1} (2n_2 + 2r_1 - r_1 \gamma_i(G_1) - r_1 \gamma_i^2(G_1) - n_2 \gamma_i(G_1)) \prod_{j=2}^{n_2} (n_1 + r_2(1 - \gamma_j(G_2))) \right).$$

定理 6 设 G_i 是有 n_i 个点的 r_i -正则图, $i = 1, 2$. 则 $G_1 \bar{\wedge} G_2$ 的规范化无符号拉普拉斯谱为:

- (i) $\frac{n_1 + r_2(1 + \gamma_j(G_2))}{r_2 + n_1}$ 对于每一个 $j = 2, 3, \dots, n_2$;
- (ii) 方程的两个根 $(2r_1 + 2n_2)x^2 - (4r_1 + 4n_2 + r_1 \gamma_i(G_1) + n_2 \gamma_i(G_1))x + 2r_1 + 2n_2 + r_1 \gamma_i(G_1) + n_2 \gamma_i(G_1) - r_1 \gamma_i^2(G_1) = 0$ 对于每一个 $i = 2, 3, \dots, n_1$;
- (iii) 方程的三个根 $(2r_1 r_2 + 2r_1 n_1 + 2r_2 n_2 + 2n_1 n_2)x^3 - (9r_1 r_2 + 9r_2 n_2 + 7r_1 n_1 + 7n_1 n_2)x^2 + (13r_2 n_2 + 7r_1 n_1 + 12r_1 r_2 + 6n_1 n_2)x - 2n_1 n_2 - 6n_2 r_2 - 4r_1 r_2 = 0$.

4 非正则的Randić(规范化拉普拉斯和规范化无符号拉普拉斯)同谱图

在这一节中, 我们构造了关于Randić矩阵, 规范化拉普拉斯矩阵和规范化无符号拉普拉斯矩阵的几类非正则同谱图. 根据Randić矩阵, 规范化拉普拉斯矩阵和规范化无符号拉普拉斯矩阵的定义, 得到引理6.

引理 6 如果 G_1 和 G_2 是R-同谱的, 则它们是 \mathcal{L} -图谱并且是 \mathcal{Q} -图谱的.

观察 1 由上一节给出的所有定理可知, 所有分裂V-点、分裂S-点连接图的Randić(规范化拉普拉斯和规范化无符号拉普拉斯)谱取决于正则度, 顶点数和图 G_i ($i = 1, 2$)对应的谱. 此外, 我们注意到, 尽管 G_1 和 G_2 是正则图, $G_1 \vee G_2$ 和 $G_1 \bar{\wedge} G_2$ 是非正则图.

定理 7 设 G_i, H_i 为 r_i -正则图, $i = 1, 2$, 其中 G_1 可以与 H_1 不同. 如果 G_i 和 H_i 是 R -同谱的, $i = 1, 2$, 则 $G_1 \vee G_2$ 和 $H_1 \vee H_2$ 是 R -同谱, \mathcal{L} -同谱并且 \mathcal{Q} -同谱的; $G_1 \bar{\wedge} G_2$ 和 $H_1 \bar{\wedge} H_2$ 也是 R -同谱, \mathcal{L} -同谱并且 \mathcal{Q} -同谱的.

证明 根据引理6和观察1, 很容易得到定理7.

参考文献:

- [1] RANDIĆ M. Characterization of molecular branching[J]. Journal of the American Chemical Society, 1975, 97(23): 6609-6615.
- [2] BOZKURT B, GÜNGÖR A D, GUTMAN I, et al. Randić matrix and randic energy[J]. Match Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 2010, 64(1): 239-250.
- [3] GUTMAN I, FURTULA B, BOZKURT B. On Randić energy[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2014, 442(1): 50-57.
- [4] BARIK S, BAPAT R B, PATI S. On the Laplacian spectra of product graphs[J]. Applicable Analysis and Discrete Mathematics, 2015, 9: 39-58.
- [5] AYGUL M, QIN X J. A note on the integrity of the corona and edge corona of two graphs[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition), 2013, 30(3): 278-281.
- [6] LIN X, ELKIN V, BIAN H. The wiener polarity index of graph operations[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition), 2013, 30(1): 55-60.
- [7] CHENG L L, HUANG Q X. The adjacency spectrum of the corona graph $G_1 \circ K_{m_1, m_2}$ [J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition), 2011, 28(2): 156-162.
- [8] HOU Y, SHIU W C. The spectrum of the edge corona of two graphs[J]. The Electronic Journal of Linear Algebra, 2010, 20(1): 586-594.
- [9] GOPALAPILLAI I. The spectrum of neighborhood corona of graphs[J]. Kragujevac Journal of Mathematics, 2011, 35(3): 493-500.
- [10] HARARY F. Graph theory[M]. Massachusetts: Addison-Wesley, 1994.
- [11] SAMPATHKUMAR E, WALIKAR H B. On the splitting graph of a graph[J]. Journal of the Karnatak University Science, 1981, 35/36: 13-16.
- [12] ZHANG F Z. The schur complement and its applications[M]. New York: Springer, 2005.
- [13] DAS A, PANIGRAHI P. New classes of simultaneous cospectral graphs for adjacency, laplacian and normalized laplacian matrices[J]. Kragujevac Journal of Mathematics, 2019, 43(2): 303-323.
- [14] KLEIN D J, RANDIĆ M. Resistance distance[J]. Journal of Mathematical Chemistry, 1993, 12(1): 81-95.
- [15] CHEN A H, ZHANG B F. Resistance distance and the normalized Laplacian spectrum[J]. Discrete Applied Mathematics, 2007, 155(5): 654-661.
- [16] FENG L, GUTMAN I, YU G. Degree Kirchhoff index of unicyclic graphs[J]. Match Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 2013, 69(3): 629-648.
- [17] HUANG J, LI S C. On the normalized Laplacian, degree-Kirchhoff index and spanning trees of graphs[J]. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 2015, 91(3): 353-367.
- [18] CHUNG F R K. Spectral graph theory[M]. Rhode Island: American Mathematical Society, 1997.
- [19] CUI S Y, TIAN G X. The spectrum and the signless Laplacian spectrum of corona[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2012, 437(7): 1692-1703.

责任编辑: 赵新科