

图的圈和树孤立*

张刚, 吴宝音都仍[†]

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

摘要: 对任一图 G , 如果顶点子集 D 使得 $G-N[D]$ 不包含任何一个 \mathcal{F} 中的 F 图作为子图, 那么 D 被叫做图 G 的一个 \mathcal{F} 孤立集, 其中 \mathcal{F} 是一个连通图集. 图 G 中最小的一个 \mathcal{F} 孤立集 D 的阶数被称为图 G 的 \mathcal{F} 孤立数, 记为 $\iota(G, \mathcal{F})$. 特别的, 当 $\mathcal{F} = \{C_3, K_{1,3}, P_4\}$ 时, 定义 $\iota(G, \{C_3, K_{1,3}, P_4\}) = \iota'_c(G)$. 于是, 图 G 中任一 $\{C_3, K_{1,3}, P_4\}$ 孤立集 D 使得 $G-N[D]$ 只是一些 K_1, K_2 和 P_3 分支, 而 $\iota'_c(G)$ 表示图 G 中最小的一个 $\{C_3, K_{1,3}, P_4\}$ 孤立集 D 的阶数. 本文证明了如果 $G \notin \{C_3, C_7\}$ 是一个顶点数为 n 的连通图, 那么 $\iota'_c(G) \leq \frac{n}{4}$, 且这个上界是最好的.

关键词: 孤立数; 圈; 树; 部分控制

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2021.03.06.0004

中图分类号: O157.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2022)02-0169-07

引文格式: 张刚, 吴宝音都仍. 图的圈和树孤立[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2022, 39(2): 169-175.

英文引文格式: ZHANG Gang, WU Baoyindureng. Isolation of cycles and trees in graphs[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2022, 39(2): 169-175.

Isolation of Cycles and Trees in Graphs

ZHANG Gang, WU Baoyindureng

(School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China)

Abstract: A subset $D \subseteq V(G)$ is called an \mathcal{F} -isolating set of a graph G if $G-N[D]$ contains no subgraph isomorphic to any $F \in \mathcal{F}$, where \mathcal{F} is a family of connected graphs. The \mathcal{F} -isolation number of G , denoted by $\iota(G, \mathcal{F})$, is the minimum cardinality of an \mathcal{F} -isolating set in G . In this paper, take $\mathcal{F} = \{C_3, K_{1,3}, P_4\}$ and denote $\iota(G, \mathcal{F})$ simply by $\iota'_c(G)$, which implies that $\iota'_c(G)$ is the order of a smallest set D such that $G-N[D]$ consists of some K_1, K_2 and P_3 only. We prove that if G is a connected graph of order n and different from C_3 or C_7 , then $\iota'_c(G) \leq \frac{n}{4}$.

Key words: isolation number; cycles; trees; partial domination

0 引言

除非特别说明, 本文中 $G = (V, E)$ 均表示一个顶点集为 $V = V(G)$, 边集为 $E = E(G)$ 的有限简单图. 我们用 $n = |V|$ 与 $m = |E|$ 分别表示图 G 的顶点数与边数. 对任意的 $u, v \in V(G)$, 如果 $uv \in E(G)$, 那么我们称 u 在图 G 中是 v 的一个邻点, 反之亦然. 对任一 $v \in V(G)$, v 的开邻域定义为集合 $N_G(v) = N(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$, v 的闭邻域定义为集合 $N_G[v] = N[v] = N(v) \cup \{v\}$. 另外, $d_G(v) = d(v) = |N(v)|$ 表示顶点 v 在图 G 中的度数. 通常, $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 被称为图 G 的最大度和最小度. 设 S 是 G 的一个顶点子集, 则 S 的开邻域记为 $N_G(S) = N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v) \setminus S$, S 的闭邻域记为 $N_G[S] = N[S] = N(S) \cup S$. 我们用 $G[S]$ 表示图 G 中由 S 导出的子图, 用 $G-S$ 表示图 G 中 $V \setminus S$ 的导出子图. 对于其他未定义的术语和概念, 读者们可参阅文献[1].

设 \mathcal{F} 是一个连通图集, 对任一图 G , 如果顶点子集 D 使得 $G-N[D]$ 不包含任一 \mathcal{F} 中的 F 图作为子图, 那么 D 被叫做图 G 的一个 \mathcal{F} 孤立集, 且图 G 中最小的一个 \mathcal{F} 孤立集 D 的阶数被称为图 G 的 \mathcal{F} 孤立数, 记为 $\iota(G, \mathcal{F})$. 另外, 一个顶点子集 D 被称为图 G 的一个控制集, 如果 $V(G) \setminus D$ 中的每个顶点在 D 中都至少有一个邻点. 图 G 中最小的一个控制集 D 的阶数即是图 G 的控制数, 记为 $\gamma(G)$. 显然, $\iota(G, \{K_1\}) = \gamma(G)$.

* 收稿日期: 2021-03-06

基金项目: 国家自然科学基金项目(12061073).

作者简介: 张刚(1995-), 男, 硕士生, 从事图论及其应用研究, E-mail: gzh_ang@163.com.

[†] 通讯作者: 吴宝音都仍(1972-), 男, 博士, 教授, 主要从事图论及其应用研究, E-mail: baoywu@163.com.

图的孤立,亦被称为部分控制,它是经典控制理论的一种自然推广. 2017年,Caro和Hansberg^[2]首次引入了这些概念.对于该领域进一步的研究,可参阅文献[3-7].除此之外,对于一些经典控制问题,读者们可参阅文献[8-14].

假设 C_n 是一个 n 长圈, T 是一棵树.对于任一正整数 k ,令 $C_k = \{C_i : 3 \leq i \leq k\}$, $T_{k+1} = \{T : |V(T)| = k+1\}$,定义 $\iota(G, C_k \cup T_{k+1}) = \iota_k^{tree}(G)$.显然,图 G 中任一 $C_k \cup T_{k+1}$ 孤立集 D 使得 $G-N[D]$ 由一些树 $T \in \bigcup_{1 \leq i \leq k} T_i$ 构成,而 $\iota_k^{tree}(G)$ 表示图 G 中最小的一个 $C_k \cup T_{k+1}$ 孤立集 D 的阶数.特别的,如果 $k=3$,那么 $C_k \cup T_{k+1} = \{C_3, K_{1,3}, P_4\}$.本文将 $\iota_3^{tree}(G)$ 简记为 $\iota'_c(G)$.于是, $\iota'_c(G)$ 表示图 G 中最小的一个 $\{C_3, K_{1,3}, P_4\}$ 孤立集 D 的阶数,且图 G 中任一 $\{C_3, K_{1,3}, P_4\}$ 孤立集 D 使得 $G-N[D]$ 只是一些 K_1, K_2 和 P_3 分支.本文主要研究图参数 $\iota'_c(G)$,并由此推出了一些其他结果.

1 主要结果

本文得到的主要结论如下,其详细的证明将被放在第2小节进行.

定理1 假设 G 是一个 n 个顶点的连通图,如果 $G \notin \{C_3, C_7\}$,那么 $\iota'_c(G) \leq \frac{n}{4}$,且这个上界是紧的.

2020年,Borg^[3]证明了如果 $G \neq C_3$ 是一个 n 个顶点的连通图,那么 $\iota_c(G) = \iota(G, C) \leq \frac{n}{4}$,这里 $C = \{C_i : i \geq 3\}$.显然,图 G 中任一 C 孤立集 D 使得 $G-N[D]$ 是一个森林,而 $\iota_c(G)$ 表示图 G 中最小的一个 C 孤立集 D 的阶数.根据 \mathcal{F} 孤立的一般定义,图 G 的一个 $\{C_3, K_{1,3}, P_4\}$ 孤立集一定是图 G 的一个 C 孤立集,所以我们有 $\iota_c(G) \leq \iota'_c(G)$.因此,Borg的结果可以看作定理1的一个推论.

推论1 (Borg^[3]) 如果 $G \neq C_3$ 是一个 n 个顶点的连通图,那么 $\iota_c(G) \leq \frac{n}{4}$,且这个上界是紧的.

Caro和Hansberg在文献[2]的最后提出了一个问题:计算一个 n 个顶点连通图 G 中 $\iota(G, T_{k+1})$ 的上下界.这里, $\iota(G, T_{k+1})$ 表示图 G 中最小的一个 T_{k+1} 孤立集 D 的阶数,而 G 中任一 T_{k+1} 孤立集 D 使得 $G-N[D]$ 中每一个连通分支的阶数都小于等于 k .根据 \mathcal{F} 孤立的定义,图 G 的一个 $C_k \cup T_{k+1}$ 孤立集一定是图 G 的一个 T_{k+1} 孤立集,于是我们有 $\iota(G, T_{k+1}) \leq \iota_k^{tree}(G)$.所以,通过定理1,可以推导出如下结果.

推论2 如果 $G \neq C_7$ 是一个 n 个顶点的连通图,那么 $\iota(G, T_4) \leq \frac{n}{4}$,且这个上界是紧的.

实际上,Caro和Hansberg还定义了其他几种类型的孤立^[2],比如 k 孤立.对任一整数 $k \geq 0$,当 $\mathcal{F} = \{K_{1,k+1}\}$ 时,把图的 $\{K_{1,k+1}\}$ 孤立简称为图的 k 孤立.对应的,可以定义 k 孤立集和 k 孤立数的概念.显然,图 G 的一个 $C_k \cup T_{k+1}$ 孤立集一定是图 G 的一个 $k-1$ 孤立集.所以,对任一图 G ,有 $\iota(G, \{K_{1,k}\}) \leq \iota_k^{tree}(G)$.

推论3 (Caro和Hansberg^[2]) 对任一顶点数为 n 的连通图 G ,有 $\iota(G, \{K_{1,3}\}) \leq \frac{n}{4}$,且这个上界是紧的.

受此启发,对任意的正整数 k ,我们希望考虑 $\mathcal{F} = \{P_k\}$ 的情形.由此,提出问题:计算 n 个顶点的连通图 G 中 $\iota(G, \{P_k\})$ 的准确上界.显然,因为图 G 的一个 $C_k \cup T_{k+1}$ 孤立集一定是图 G 的一个 $\{P_{k+1}\}$ 孤立集,有 $\iota(G, \{P_{k+1}\}) \leq \iota_k^{tree}(G)$.

推论4 如果 $G \neq C_7$ 是一个 n 个顶点的连通图,那么 $\iota(G, \{P_4\}) \leq \frac{n}{4}$,且这个上界是紧的.

定义 $girth(G)$ 表示图 G 的围长,即是图 G 中最短的一个导出圈的长度.我们提出下列猜想,实际上是定理1的一个推广.

猜想1 假设 $k \geq 4$ 是一个整数,如果 $G \notin C_k \cup \{C_{k+4}\}$ 是一个 n 个顶点的连通图,且有 $girth(G) \geq k$,那么 $\iota_k^{tree}(G) \leq \frac{2n}{k+5}$.

现在我们来考虑定理1中上界 $\frac{n}{4}$ 的紧性.首先,如果 $G \in \{C_4, C_8, P_4\}$,那么 $\iota'_c(G) = \frac{n}{4}$.其次,为了获得更多的极图,我们构造如下的图 G :从任意的一个连通图 H 出发,在 H 的每个点上通过一条边连接一个 C_3 或者一个 C_7 .

2 证明

在这一节,我们将会证明本文的主要定理.下面首先给出几个引理.其中,引理1、引理2、引理3易证,我们将其证明留给读者.

引理1 如果 P_n 是一个 n 长路,那么 $\iota'_c(P_n) \leq \frac{n}{4}$.

引理2 如果 $C_n \notin \{C_3, C_7\}$ 是一个 n 长圈,那么 $\iota'_c(C_n) \leq \frac{n}{4}$.

引理3 假设 \mathcal{F} 是一个连通图集,对于任一图 G ,如果 G_1, G_2, \dots, G_k 是其全部的连通分支,那么 $\iota(G, \mathcal{F}) =$

$$\sum_{i=1}^k \iota(G_i, \mathcal{F}).$$

引理4 假设 \mathcal{F} 是一个连通图集, $G = (V, E)$ 是一个有限简单图. 对于任意一个顶点子集 S , 如果 $G[S]$ 中有一个 \mathcal{F} 孤立集 D , 且使得 $E(S \setminus N[D], V \setminus S) = \emptyset$, 那么 $\iota(G, \mathcal{F}) \leq |D| + \iota(G - S, \mathcal{F})$.

证明 设 D' 是 $G - S$ 的一个 \mathcal{F} 孤立集, 且 $|D'| = \iota(G - S, \mathcal{F})$. 我们仅需证明 $D \cup D'$ 是 G 的一个 \mathcal{F} 孤立集即可. 反证如下, 假设 $G - N[D \cup D']$ 中存在一个 \mathcal{F} 中的 F 图作为其子图. 根据 D 和 D' 的选择, 我们有 $V(F) \subseteq (S \setminus N[D]) \cup ((V \setminus S) \setminus N[D'])$, $V(F) \cap (S \setminus N[D]) \neq \emptyset$ 和 $V(F) \cap ((V \setminus S) \setminus N[D']) \neq \emptyset$. 然而, 这是不可能的, 因为 F 是连通的且 $E(S \setminus N[D], V \setminus S) = \emptyset$.

引理5 如果 G 是一个顶点数为 $n = 7$ 的连通图, 且 $G \neq C_7$, 那么 $\iota'_c(G) \leq 1$.

证明 设 D 是图 G 的一个 $\{C_3, K_{1,3}, P_4\}$ 孤立集. 因为 G 是一个连通图且有 $n = 7$, 所以 $\Delta(G) \geq 2$. 如果 $\Delta(G) = 2$, 因为 $G \neq C_7$, 则 $G = P_7$ 且 $\iota'_c(P_7) = 1$. 如果 $\Delta(G) \geq 4$, 则存在一个顶点 $v \in V(G)$ 使得 $|V(G - N[v])| \leq 2$. 所以此时 $D = \{v\}$ 就是 G 的一个 $\{C_3, K_{1,3}, P_4\}$ 孤立集, 并且有 $\iota'_c(G) \leq |D| = 1$. 因此以下我们假设 $\Delta(G) = 3$.

令 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_7\}$, 设 $N(v_1) = \{v_2, v_3, v_4\}$, $V(G) \setminus N[v_1] = \{v_5, v_6, v_7\}$. 如果 $|E(G - N[v_1])| \leq 2$, 则取 $D = \{v_1\}$, 于是 $\iota'_c(G) \leq |D| = 1$. 所以 $G - N[v_1] \cong C_3$. 因为 G 是连通的, 根据其对称性, 此时我们不妨假设 $v_2v_5 \in E(G)$, 显然 $N(v_5) = \{v_2, v_6, v_7\}$. 注意到如果 $v_3v_4 \notin E(G)$, 则取 $D = \{v_5\}$, 而此时 $\iota'_c(G) \leq |D| = 1$. 因此我们假设 $v_3v_4 \in E(G)$. 如果此时 $d_G(v_2) = 3$, 那么 $G - N[v_2] \neq C_3$, 所以我们可以取 $D = \{v_2\}$, 同时有 $\iota'_c(G) \leq |D| = 1$. 显然 $\{v_1, v_5\} \subseteq N(v_2)$, 所以 $d_G(v_2) = 2$. 如果 $\{v_3, v_4, v_6, v_7\}$ 中存在一个顶点 x 使得 $d_G(x) = 3$, 那么 $d_{G - N[x]}(v_2) = 1$, 所以可取 $D = \{x\}$, 进而有 $\iota'_c(G) \leq |D| = 1$. 因此, 对于每个 $x \in \{v_3, v_4, v_6, v_7\}$, $d_G(x) = 2$, 那么当前可取 $D = \{v_2\}$, 也有 $\iota'_c(G) \leq |D| = 1$.

为了方便起见, 如果图 G 的一个连通分支同构于 C_3 或者 C_7 , 那么我们称之为坏分支, 反之我们称之为好分支.

定理 1 的证明: 我们的证明是通过归纳 n 进行. 顶点数小于等于 3 的连通图, 除了 C_3 , 只有 3 个, 分别是 K_1, K_2 和 P_3 . 显然, 对于每个 $G \in \{K_1, K_2, P_3\}$, 均有 $\iota'_c(G) = 0 < \frac{n}{4}$. 以下假设 $n \geq 4$. 又因为 G 是一个连通图, 所以 $\Delta(G) \geq 2$. 如果 $\Delta(G) = 2$, 那么 $G \in \{P_n, C_n\}$. 根据引理 1 和引理 2, 除了 $G \in \{C_3, C_7\}$, 有 $\iota'_c(G) \leq \frac{n}{4}$. 显然, 此时符合我们所需证明的结论.

因此 $\Delta(G) \geq 3$. 此时选择一个最大度顶点 v , 即 $d(v) = \Delta(G)$. 如果 $\Delta(G) = n - 1$, 那么 $\iota'_c(G) \leq |\{v\}| = 1 \leq \frac{n}{4}$. 所以令 $\Delta(G) \leq n - 2$, 接着我们将进一步考虑 $G' = G - N[v]$. 设 \mathcal{H}_b 与 \mathcal{H}_g 分别是 G' 中所有好分支与所有坏分支构成的集合. 根据归纳假设, 对于每个 $H \in \mathcal{H}_g$, 有 $\iota'_c(H) \leq \frac{|V(H)|}{4}$.

如果 $\mathcal{H}_b = \emptyset$, 显然 $\{v\}$ 是 $G[N[v]]$ 的一个 $\{C_3, K_{1,3}, P_4\}$ 孤立集, 根据引理 3 和引理 4, 我们有

$$\iota'_c(G) \leq |\{v\}| + \iota'_c(G') = |\{v\}| + \sum_{H \in \mathcal{H}_g} \iota'_c(H) \leq 1 + \sum_{H \in \mathcal{H}_g} \frac{|V(H)|}{4} \leq \frac{n}{4}.$$

因此, 假设 $\mathcal{H}_b \neq \emptyset$. 现在选择另一个顶点 $x \in N(v)$ 使得 $x \in N(H) \cap N(v)$, 这里 H 是 \mathcal{H}_b 中的某个坏分支. 对于某个 $y \in V(H)$, 设 $xy \in E(G)$. 另外, 设 $\mathcal{H}_b^x = \{H : H \in \mathcal{H}_b \text{ 且 } N(H) \cap N(v) = \{x\}\}$, $\mathcal{H}_g^x = \{H : H \in \mathcal{H}_g \text{ 且 } N(H) \cap N(v) = \{x\}\}$. 显然, $\mathcal{H}_g^x \subseteq \mathcal{H}_g$, 且对于每个 $H \in \mathcal{H}_g^x$, 有 $\iota'_c(H) \leq \frac{|V(H)|}{4}$.

情况 1 存在某个 $x \in N(v)$, $\mathcal{H}_b^x \neq \emptyset$.

设 c_3 与 c_7 分别是 \mathcal{H}_b^x 中同构于 C_3 与 C_7 的连通分支个数. 根据当前的假设, 可得 $c_3 + c_7 = |\mathcal{H}_b^x| \geq 1$. 令 $X = \{x\} \cup \bigcup_{H \in \mathcal{H}_b^x} V(H)$. 所以 $G - X = \sum_{H \in \mathcal{H}_g^x} H + (G - X)_v$, 这里 $(G - X)_v$ 表示 $G - X$ 中包含顶点 v 的那个分支. 对于每个 $H \in \mathcal{H}_b^x$, 取

$$D_H = \begin{cases} \{x\}, & \text{如果 } H \cong C_3, \\ \{x, y_3^H\}, & \text{如果 } H \cong C_7, \end{cases}$$

其中 y_3^H 表示每个同构于 C_7 的坏分支 H 中一个距离 y 为 3 的点, 如图 1 所示. 显然, $\bigcup_{H \in \mathcal{H}_b^x} D_H$ 是 $G[X]$ 的一个 $\{C_3, K_{1,3}, P_4\}$ 孤立集.

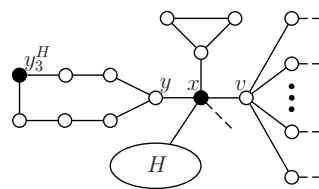


图 1 存在某个 $x \in N(v)$ 使得 $\mathcal{H}_v^x \neq \emptyset$

子情况 1.1 $(G - X)_v \notin \{C_3, C_7\}$.

根据归纳假设, 再结合引理 3 和引理 4, 我们有

$$\begin{aligned} \iota'_c(G) &\leq \left| \bigcup_{H \in \mathcal{H}_v^x} D_H \right| + \iota'_c(G - X) \\ &= 1 + c_7 + \sum_{H \in \mathcal{H}_v^x} \iota'_c(H) + \iota'_c((G - X)_v) \\ &\leq 1 + c_7 + \sum_{H \in \mathcal{H}_v^x} \frac{|V(H)|}{4} + \frac{|V((G - X)_v)|}{4} \\ &= 1 + c_7 + \frac{1}{4}(n - 1 - 3c_3 - 7c_7) \\ &= \frac{n}{4} + \frac{3}{4}(1 - c_3 - c_7) \\ &\leq \frac{n}{4}. \end{aligned}$$

下面我们仍需要解决 $(G - X)_v \in \{C_3, C_7\}$ 的情况, 此时取 $Y = X \cup V((G - X)_v)$. 显然, $G - Y = \sum_{H \in \mathcal{H}_v^x} H$.

子情况 1.2 $(G - X)_v \cong C_3$.

因为 $x \in D_H$, 所以 $\bigcup_{H \in \mathcal{H}_v^x} D_H$ 也是 $G[Y]$ 的一个 $\{C_3, K_{1,3}, P_4\}$ 孤立集. 根据归纳假设, 再结合引理 3 和引理 4, 我们有

$$\begin{aligned} \iota'_c(G) &\leq \left| \bigcup_{H \in \mathcal{H}_v^x} D_H \right| + \iota'_c(G - Y) \\ &= 1 + c_7 + \sum_{H \in \mathcal{H}_v^x} \iota'_c(H) \\ &\leq 1 + c_7 + \sum_{H \in \mathcal{H}_v^x} \frac{|V(H)|}{4} \\ &= 1 + c_7 + \frac{1}{4}(n - 1 - 3 - 3c_3 - 7c_7) \\ &= \frac{n}{4} - \frac{3}{4}(c_3 + c_7) \\ &< \frac{n}{4}. \end{aligned}$$

子情况 1.3 $(G - X)_v \cong C_7$.

设 v_3 表示 $(G - X)_v$ 中距离 v 为 3 的一个点. 此时, 不难看出 $\{v_3\} \cup \bigcup_{H \in \mathcal{H}_v^x} D_H$ 是 $G[Y]$ 的一个 $\{C_3, K_{1,3}, P_4\}$ 孤立集. 根据归纳假设, 再结合引理 3 和引理 4, 我们有

$$\begin{aligned} \iota'_c(G) &\leq |\{v_3\} \cup \bigcup_{H \in \mathcal{H}_v^x} D_H| + \iota'_c(G - Y) \\ &= 2 + c_7 + \sum_{H \in \mathcal{H}_v^x} \iota'_c(H) \\ &\leq 2 + c_7 + \sum_{H \in \mathcal{H}_v^x} \frac{|V(H)|}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 + c_7 + \frac{1}{4}(n - 1 - 7 - 3c_3 - 7c_7) \\
 &= \frac{n}{4} - \frac{3}{4}(c_3 + c_7) \\
 &< \frac{n}{4}.
 \end{aligned}$$

情况 2 任意一个 $x \in N(v)$, $\mathcal{H}_b^x = \emptyset$.

根据当前的假设, 等价的, 对于任意一个 $H \in \mathcal{H}_b$, 有 $|N(H) \cap N(v)| \geq 2$. 下面的证明, 我们将分为两种子情况来讨论.

子情况 2.1 存在一个 $H \in \mathcal{H}_b$, $H \cong C_3$.

取定 $C_3 \cong H' \in \mathcal{H}_b$. 设 $V(H') = \{y, y_1, y_2\}$. 同时, 不妨假设 $xy \in E(G)$. 令 $X = \{x\} \cup V(H')$. 于是, $G - X = \sum_{H \in \mathcal{H}_b^x} H + (G - X)_v$, 其中 $(G - X)_v$ 表示 $G - X$ 中包含顶点 v 的那个分支. 显然, 此时 $\{y\}$ 是 $G[X]$ 的一个 $\{C_3, K_{1,3}, P_4\}$ 孤立集.

子情况 2.1.1 $(G - X)_v \notin \{C_3, C_7\}$.

根据归纳假设, 再结合引理 3 和引理 4, 我们有

$$\begin{aligned}
 l'_c(G) &\leq |\{y\}| + l'_c(G - X) \\
 &= |\{y\}| + \sum_{H \in \mathcal{H}_b^x} l'_c(H) + l'_c((G - X)_v) \\
 &\leq 1 + \sum_{H \in \mathcal{H}_b^x} \frac{|V(H)|}{4} + \frac{|V((G - X)_v)|}{4} \\
 &= 1 + \frac{n - 4}{4} \\
 &= \frac{n}{4}.
 \end{aligned}$$

因此, 我们假设 $(G - X)_v \in \{C_3, C_7\}$. 令 $Y = X \cup V((G - X)_v)$, 有 $G - Y = \sum_{H \in \mathcal{H}_b^x} H$.

子情况 2.1.2 $(G - X)_v \cong C_3$.

设 $V((G - X)_v) = \{v, x_1, x_2\}$, 于是 $N(v) = \{x, x_1, x_2\}$, $\Delta(G) = d_G(v) = 3$, 如图 2 所示. 如果 $G - Y = \emptyset$, 那么根据引理 5, 有 $l'_c(G) \leq 1 < \frac{n}{4}$. 因此 $G - Y \neq \emptyset$, 进而有 $d_{G[Y]}(x) = 2$. 因为 $|N(H') \cap N(v)| \geq 2$ 且 $\Delta(G) = 3$, 这里不妨假设 $x_1 y_2 \in E(G)$, 所以我们有 $N(x_1) = \{v, x_2, y_2\}$ 与 $d_G(x_1) = \Delta(G) = 3$. 由于 $d_{G - N[x_1]}(y_1) = 1$, 显然 $G - N[x_1]$ 一定是一个好分支. 根据之前的讨论, 可得 $l'_c(G) \leq \frac{n}{4}$ 的结果.

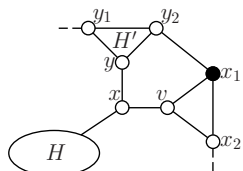


图 2 $H' \cong C_3 \cong (G - X)_v$

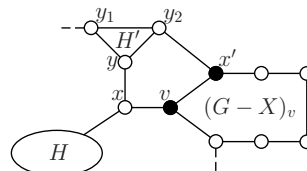


图 3 $H' \cong C_3$, 但 $(G - X)_v \cong C_7$

子情况 2.1.3 $(G - X)_v \cong C_7$.

结合当前假设, 我们也可得到 $\Delta(G) = d_G(v) = 3$, 如图 3 所示. 因为 $|N(H') \cap N(v)| \geq 2$, 所以存在 x' 使得 $x' \in (N(H') \cap N(v)) \setminus \{x\}$. 注意到 $\{v, x'\}$ 是 $G[Y]$ 的一个 $\{C_3, K_{1,3}, P_4\}$ 孤立集, 因此根据引理 3 和引理 4, 以及归纳假设, 我们有

$$l'_c(G) \leq |\{v, x'\}| + l'_c(G - Y) = 2 + \sum_{H \in \mathcal{H}_b^x} l'_c(H) \leq 2 + \sum_{H \in \mathcal{H}_b^x} \frac{|V(H)|}{4} < \frac{n}{4}.$$

子情况 2.2 任意一个 $H \in \mathcal{H}_b$, $H \cong C_7$.

令 $Z = N[v] \cup \bigcup_{H \in \mathcal{H}_b} V(H)$, 于是 $G - Z = \sum_{H \in \mathcal{H}_b} H$. 设 $\Delta = \Delta(G)$, $b = |\mathcal{H}_b|$. 显然, $\Delta \geq 3$, $b \geq 1$. 用 y_3^H 表示每个同构于 C_7 的坏分支 H 中距离 y 为 3 的一个点. 此时我们不难看到 $N(v) \cup \bigcup_{H \in \mathcal{H}_b} \{y_3^H\}$ 和 $\{v\} \cup \bigcup_{H \in \mathcal{H}_b} \{y, y_3^H\}$ 分别是 $G[Z]$ 的两个 $\{C_3, K_{1,3}, P_4\}$ 孤立集. 因此, 根据归纳假设, 再结合引理 3 和引理 4, 我们有如下 (1) 和 (2)

两个式子.

$$\begin{aligned}
 \iota'_c(G) &\leq |N(v) \cup \bigcup_{H \in \mathcal{H}_b} \{y_3^H\}| + \iota'_c(G-Z) \\
 &= \Delta + b + \sum_{H \in \mathcal{H}_g} \iota'_c(H) \\
 &\leq \Delta + b + \sum_{H \in \mathcal{H}_g} \frac{|V(H)|}{4} \\
 &= \Delta + b + \frac{1}{4}(n-1-\Delta-7b) \\
 &= \frac{n}{4} + \frac{3\Delta-3b-1}{4}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 \iota'_c(G) &\leq |\{v\} \cup \bigcup_{H \in \mathcal{H}_b} \{y, y_3^H\}| + \iota'_c(G-Z) \\
 &= 1 + 2b + \sum_{H \in \mathcal{H}_g} \iota'_c(H) \\
 &\leq 1 + 2b + \sum_{H \in \mathcal{H}_g} \frac{|V(H)|}{4} \\
 &= 1 + 2b + \frac{1}{4}(n-1-\Delta-7b) \\
 &= \frac{n}{4} + \frac{b-\Delta+3}{4}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

通过式 (1) 和式 (2), 如果 $\Delta \leq b$ 或者 $b \leq \Delta - 3$, 那么我们已经可以得到 $\iota'_c(G) \leq \frac{n}{4}$ 的结论, 证明结束. 因此, 下面我们不妨假设 $\Delta - 2 \leq b \leq \Delta - 1$, 并针对这一情况再次展开讨论.

子情况 2.2.1 存在两个 $H_1, H_2 \in \mathcal{H}_b$ 使得某个 $x' \in N(H_1) \cap N(H_2) \cap N(v)$.

不妨假设当前的情况如图 4 所示, 于是可观察到 $\{v, x', y_3^{H_1}, y_3^{H_2}\} \cup \bigcup_{H \in \mathcal{H}_b \setminus \{H_1, H_2\}} \{y, y_3^H\}$ 是 $G[Z]$ 的一个 $\{C_3, K_{1,3}, P_4\}$ 孤立集. 所以, 根据归纳假设, 再结合引理 3 和引理 4, 我们有

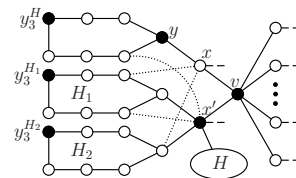


图 4 存在一个 $x' \in N(v)$ 使得 $x' \in N(H_1) \cap N(H_2)$

$$\begin{aligned}
 \iota'_c(G) &\leq |\{v, x', y_3^{H_1}, y_3^{H_2}\} \cup \bigcup_{H \in \mathcal{H}_b \setminus \{H_1, H_2\}} \{y, y_3^H\}| + \iota'_c(G-Z) \\
 &= 4 + 2(b-2) + \sum_{H \in \mathcal{H}_g} \iota'_c(H) \\
 &\leq 4 + 2(b-2) + \sum_{H \in \mathcal{H}_g} \frac{|V(H)|}{4} \\
 &= 4 + 2(b-2) + \frac{1}{4}(n-1-\Delta-7b) \\
 &= \frac{n}{4} + \frac{b-\Delta-1}{4} \\
 &\leq \frac{n}{4} + \frac{\Delta-1-\Delta-1}{4} \\
 &< \frac{n}{4}.
 \end{aligned}$$

子情况 2.2.2 任意两个 $H_1, H_2 \in \mathcal{H}_b$, $N(H_1) \cap N(H_2) \cap N(v) = \emptyset$.

因为对于每个 $H \in \mathcal{H}_b$, $|N(H) \cap N(v)| \geq 2$, 所以当前的条件暗示着 $\Delta \geq 2b$. 再结合 $\Delta - 2 \leq b$, 我们有 $\Delta \leq 4$ 和 $b \leq 2$. 因此, $\Delta \in \{3, 4\}$, $b \in \{1, 2\}$. 于是, 现在我们仅需再考虑 Δ 和 b 两两组组合可能出现的四种子情况即可. 然而, 当 $\Delta = 3$ 且 $b = 2$ 时, 如图 5 所示, 我们已在子情况 2.2.1 进行了讨论. 当 $\Delta = 4$ 且 $b = 1$ 时, 如图 6 所示, 该子情况已经与 $\Delta - 2 \leq b$ 矛盾.

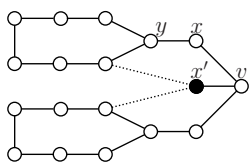


图 5 $\Delta=3$ 且 $b=2$

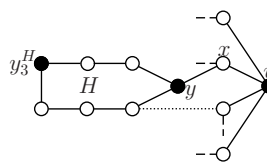


图 6 $\Delta=4$ 且 $b=1$

最后我们来讨论 $\Delta=3$ 且 $b=1$ 和 $\Delta=4$ 且 $b=2$ 两种子情况. 如果 $\Delta=3$ 且 $b=1$, 如图 7 所示, 那么我们假设 $\mathcal{H}_b = \{H'\}$, $xy, x'y' \in E(G)$, 其中 $x, x' \in N(v)$, $y, y' \in V(H')$, 且 $x \neq x', y \neq y'$. 令 $X = \{x, x'\} \cup V(H')$. 因为 $d_{G-X}(v) = d_G(v) - 2 = \Delta - 2 = 3 - 2 = 1$, 所以 $G - X$ 中一定没有坏分支. 显然, 此时 $\{y, y'\}$ 是 $G[X]$ 的一个 $\{C_3, K_{1,3}, P_4\}$ 孤立集. 根据归纳假设, 再结合引理 3 和引理 4, 我们有

$$\iota'_c(G) \leq |\{y, y'\}| + \iota'_c(G - X) \leq 2 + \frac{|V(G - X)|}{4} = 2 + \frac{n - 9}{4} < \frac{n}{4}.$$

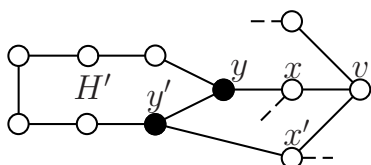


图 7 $\Delta=3$ 且 $b=1$

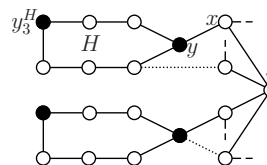


图 8 $\Delta=4$ 且 $b=2$

如果 $\Delta=4$ 且 $b=2$, 那么假设 $\mathcal{H}_b = \{H'_1, H'_2\}$, 如图 8 所示. 令 $Z = N[v] \cup V(H'_1) \cup V(H'_2)$. 由于 $N(H'_1) \cap N(H'_2) \cap N(v) = \emptyset$, 因而 $\bigcup_{H \in \{H'_1, H'_2\}} \{y, y_3^H\}$ 是 $G[Z]$ 的一个 $\{C_3, K_{1,3}, P_4\}$ 孤立集. 根据归纳假设, 再结合引理 3 和引理 4, 我们有

$$\iota'_c(G) \leq \left| \bigcup_{H \in \{H'_1, H'_2\}} \{y, y_3^H\} \right| + \iota'_c(G - Z) \leq 4 + \frac{|V(G - Z)|}{4} = 4 + \frac{n - 19}{4} < \frac{n}{4}.$$

到此完成定理 1 的证明.

参考文献:

- [1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory[M]. New York: Springer, 2008.
- [2] CARO Y, HANSBERG A. Partial domination: the isolation number of a graph[J]. Filomat, 2017, 31: 3925-3944.
- [3] BORG P. Isolation of cycles[J]. Graphs Combin, 2020, 36: 631-637.
- [4] BORG P, KAEMAWICHANURAT P. Partial domination of maximal outerplanar graphs[J]. Discrete Appl Math, 2020, 283: 306-314.
- [5] BORG P, FENECH K, KAEMAWICHANURAT P. Isolation of k -cliques[J]. Discrete Math, 2020, 343: 111879.
- [6] FAVARON O, KAEMAWICHANURAT P. Inequalities between the K_k -isolation number and the independent K_k -isolation number of a graph[J]. Discrete Appl Math, 2021, 289: 93-97.
- [7] TOKUNAGE S, JIARASUKSAKUN T, KAEMAWICHANURAT P. Isolation number of maximal outerplanar graphs[J]. Discrete Appl Math, 2019, 267: 215-218.
- [8] CHELLALI M, FAVARON O, HANSBERG A, et al. K -domination and k -independence in graphs: a survey[J]. Graphs Combin, 2012, 28: 1-55.
- [9] CHELVAM T T, SIVAGAMI M. Domination in cayley graphs: a survey[J]. AKCE Int J Graphs Comb, 2019, 16: 27-40.
- [10] DESORMEAUX W J, HENNING M A. Paired domination in graphs: a survey and recent results[J]. Util Math, 2014, 94: 101-166.
- [11] GODDARD W, HENNING M A. Independent domination in graphs: a survey and recent results[J]. Discrete Math, 2013, 313: 839-854.
- [12] HAYNES T W, HEDETNIEMI S T, SLATER P J. Fundamentals of domination in graphs[M]. New York: Marcel Dekker Inc, 1998.
- [13] HAYNES T W, HENNING M A, ZHANG P. A survey of stratified domination in graphs[J]. Discrete Math, 2009, 309: 5806-5819.
- [14] HENNING M A. A survey of selected recent results on total domination in graphs[J]. Discrete Math, 2009, 309: 32-63.