Sylvester 可测算子方程的解*

许毛丹，闫 成†

(新疆大学 数学与系统科学学院，新疆 乌鲁木齐 830017)

摘　要： 利用非交换空间中的 Fréchet 导数的性质, 研究在半有限 von Neumann 代数上关于可测算子的 Sylvester 方程的解. 进一步, 当可测算子方程是由算子单调函数的反函数进行演算给出时, 我们给出其方程积分形式的解.

关键词： von Neumann 代数; Fréchet 导数; Sylvester 方程; τ 可测算子

DOI： 10.13568/j.cnki.651094.651316. 2021.11.28.0003

中图分类号： O177　**文献标识码：** A　**文章编号：** 2096-7675(2022)04-0432-06

引文格式： 许毛丹, 闫成. Sylvester 可测算子方程的解[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2022, 39(4): 432-437+445.

英文引文格式： XU Maodan, YAN Cheng. The solution of Sylvester equation on trace measurable operators[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2022, 39(4): 432-437+445.

The Solution of Sylvester Equation on Trace Measurable Operators

XU Maodan, YAN Cheng

(*School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China*)

Abstract： In this paper, we study the solution of the Sylvester equation on measurable operators associated with a semifinite von Neumann algebra by using Fréchet derivative properties in noncommutative spaces. Moreover, when the Sylvester equation on measurable operators is given by the inverse of the operator monotone function, we also give the solution of the equation in integral form.

Key words： von Neumann algebra; Fréchet derivative; Sylvester equation; τ-measurable operators

0　引 言

Sylvester 方程是由 Sylvester 在 1884 年引入的线性方程, 他证明了在矩阵上关于此类方程的基本结果[1]. 随后 Sylvester 方程被广泛的应用于算子理论、物理、数值分析和工程上. Dalecki 与 Rosenblum 在文献 [2] 和 [3] 中给出了 Sylvester 方程在算子上的可解性. 特别是 Rosenblum 给出了方程在有界算子和无界算子上解的具体形式[3−4]. Bhatia 和 Rosenthal 在文献 [5] 中给出了 Sylvester 方程在算子矩阵相似性、交换性和超不变子空间等方面的应用. 在文献 [6] 中, Hiai 和 Kosaki 给出许多关于矩阵方程解的积分表达式. 通过这些积分表达式和双重算子积分, Dodds 等在文献 [7] 中研究了对称空间上 Liapounov 方程的解. 此外, 将矩阵算子单调函数的反函数和 Fréchet 导数与积分表示结合, Bhatia 和 Uchiyama 在文献 [8] 中研究了一类矩阵方程的解. 在文献 [9] 中, Sano 给出该矩阵方程在特殊情况下的解.

本文主要讨论关于可测算子的 Sylvester 方程的解. 首先介绍 Fréchet 导数和 τ 可测算子的基本理论. 其次给出算子方程解的积分表达式. 最后讨论关于算子单调函数反函数的解和例子.

1　准备知识

设 $\mathcal{H}$ 是可分的 Hilbert 空间, $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{H}$ 上具有正规忠实半有限迹 τ 的半有限 von Neumann 代数(关于 von

* 收稿日期：2021-11-28
基金项目：国家自然科学基金（11801486）.
作者简介：许毛丹（1995-）, 女, 硕士生, 从事泛函分析的研究, E-mail: 2336472632@qq.com.
† 通讯作者：闫成, 男, 博士, 副教授, 主要从事泛函分析的研究, E-mail: yanchengggg@163.com.

Neumann 代数参阅文献 [10-12]). 设 tr 是矩阵的迹, 则 $\mathbb{M}_2(\mathcal{M})$ 表示由所有包含迹 $\tau_2 = tr\otimes\tau$ 的 2×2 算子矩阵构成的 von Neumann 代数(相关知识请参阅文献 [13]). 我们用 1 和 $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ 定义 $\mathcal{M}$ 上的单位元和投影算子集合. 如果对 $\mathcal{M}$ 的交换子 $\mathcal{M}'$ 中的任一酉元 u 有 $ux=xu$, 则称线性算子 $x:\mathcal{D}(x)\to\mathcal{H}$ 附属于 $\mathcal{M}$, 其中 $\mathcal{D}(x)\subseteq\mathcal{H}$. 我们用 e^x 表示 $\mathcal{H}$ 上自伴算子 x 的谱测度. 对任意 Borel 集 $B\subseteq\mathbb{R}$, 自伴算子 x 附属于 $\mathcal{M}$ 当且仅当 $e^x(B)\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$. 如果对任意 $\delta>0$, 存在 $e\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$, 使得当 $e(\mathcal{H})\in D(x),\tau(e^{\perp})\le\delta$ 时, 则附属于 $\mathcal{M}$ 的闭稠定算子 x 被称为是 τ 可测的. 记 $L_0(\mathcal{M})$ 为 τ 可测算子全体(见文献 [11]). 如果 $x\ge 0$, 则称 x 是正的, 自伴的和 τ 可测的. 设 $x\in L_0(\mathcal{M})$, $s\ge 0$. 则 x 的第 s 个广义奇异值 $\mu_s(x)$ 为

$$\mu_s(x)=\inf\{\|xe\|:e\in\ \mathcal{P}(\mathcal{M}),\ \tau(1-e)\le s\}.$$

我们用 $\mu(x)$ 表示函数 $s\to\mu_s(x)$. 通过广义奇异值的方法, 文献 [14-15] 的作者研究了次优化不等式(有关广义奇异值的基本性质请参阅文献 [16]). 在文献 [7,11] 中, 非交换空间 L_p 和 $L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}$ 的定义为

$$L_p(\mathcal{M})=\{x\in L_0(\mathcal{M}):\mu(x)\in L_p(\mathbb{R})\},\ 1\le p\le\infty,$$
$$L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}=\{x:x=y+z,y\in L_1(\mathcal{M}),z\in\mathcal{M}\},$$

其范数为

$$\|x\|_{L_p(\mathcal{M})}=\|\mu(x)\|_{L_p},\ \|x\|_{L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}}=\inf\{\|y\|_{L_1(\mathcal{M})}+\|z\|_{\mathcal{M}}:x=y+z,\ y\in L_1(\mathcal{M}),\ z\in\mathcal{M}\}.$$

设 X, Y 为两个 Banach 空间, $\mathcal{B}(X,Y)$ 为所有从 X 到 Y 的有界线性算子构成的空间. 若 U 是 X 子集, $f:U\to Y$ 是连续映射. 则映射 $T\in\mathcal{B}(X,Y)$ 被称为 f 在点 $x_0\in U$ 的 Fréchet 导数当且仅当

$$\lim_{\|u\|_X\to 0}\frac{\|f(x_0+u)-f(x_0)-Tu\|_Y}{\|u\|_X}=0.$$

如果 f 在 U 上每一点都可微, 则它在 U 上可微. 我们用 $\mathrm{D}f$ 表示 f 的 Fréchet 导数.

下面定义 f 的逆映射. 设 U 是 X 的开子集, $f:U\to Y$ 在 U 到 Y 的开子集 V 上是同胚映射, 其中 $V=f(U)$. 定义 f 的逆映射为 $f^{-1}:V\to X$. 当 $X=Y=L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}$ 时, 我们有下面的引理. 该引理中用到的技巧是处理算子方程的关键, 特别是在本文中. 引理 2 的证明和文献 [17] 中定理 2.2 的证明类似, 为了方便和准确, 我们给出证明细节.

引理 1　设 X,Y 是 Banach 空间, $U=B(a_0,r)$ 是 X 中闭球, F 是 $U\to Y$ 的映射, 其中 a_0 是中心, r 是半径. 设 $T:X\to Y$ 是连续线性同胚映射. 若对任意 $a_1,a_2\in U$, 存在 $q\in(0,1)$, 有

$$\|F(a_1)-F(a_2)-T(a_1-a_2)\|_Y\le q\|T(a_1-a_2)\|_Y \tag{1}$$

则 (1)　F 在 U上是单射且连续.

(2)　$\|x_1-x_2\|_X\le\frac{\|T^{-1}\|_{Y\to X}}{1-q}\|y_1-y_2\|_Y$, 其中 $y_i=F(x_i)$, $x_i\in U$, $i=1,2$.

证明　(1)　首先证明 F 在 U 上是单射. 设存在 $a_1,a_2\in U$ 使得 $F(a_1)=F(a_2)$. 则由 (1) 可知,

$$\|T(a_1-a_2)\|_Y\le q\|T(a_1-a_2)\|_Y.$$

由于 $q\in(0,1)$, 故 $\|T(a_1-a_2)\|_Y=0$. 从而 $T(a_1)=T(a_2)$. 因为 T 是单射, 所以 $a_1=a_2$.

下证 F 在 U 上连续. 对任意 $a_1,a_2\in U$, 由于 T 连续, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $\|a_1-a_2\|_X\le\delta$ 时, 有$\|T(a_1-a_2)\|_Y\le\frac{\varepsilon}{1+q}$. 因而

$$\begin{aligned}\|F(a_1)-F(a_2)\|_Y&\le\|F(a_1)-F(a_2)-T(a_1-a_2)+T(a_1-a_2)\|_Y\\&\le\|F(a_1)-F(a_2)-T(a_1-a_2)\|_Y+\|T(a_1-a_2)\|_Y\\&\le q\|T(a_1-a_2)\|_Y+\|T(a_1-a_2)\|_Y\\&=(1+q)\|T(a_1-a_2)\|_Y\\&\le\varepsilon.\end{aligned}$$

综上所述, 结论得证.

(2) 设 $x_i \in U$, $b_i = Tx_i \in V_0 = T(U)$, $i = 1, 2$. 则 $F(x_i) = y_i$ 等价于 $F(T^{-1}b_i) = y_i$, $x_i = T^{-1}b_i$. 对 $c_i \in V_0$, 设

$$\begin{aligned} G_1(c_i) &= c_i - F(T^{-1}c_i) + y_1, \\ G_2(c_i) &= c_i - F(T^{-1}c_i) + y_2. \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} \|G_1(c_1) - G_1(c_2)\|_Y &= \|c_1 - c_2 + F(T^{-1}c_2) - F(T^{-1}c_1)\|_Y \\ &= \|F(T^{-1}c_1) - F(T^{-1}c_2) - T(T^{-1}(c_1 - c_2))\|_Y \\ &\le q\|T(T^{-1}(c_1 - c_2))\|_Y \\ &= q\|c_1 - c_2\|_Y, \end{aligned}$$

所以 G_1 在 V_0 上是压缩映射, 类似可得 G_2 是压缩映射. 由不动点定理知, G_i 有唯一不动点, 即 $G_1(b_1) = b_1, G_2(b_2) = b_2$. 从而 $x_i = T^{-1}b_i$ 是方程 $F(x_i) = y_i$ 的唯一解. 因

$$\begin{aligned} \|b_1 - b_2\|_Y &= \|G_1(b_1) - G_2(b_2)\|_Y \\ &= \|G_1(b_1) - G_2(b_1) + G_2(b_1) - G_2(b_2)\|_Y \\ &\le \|G_1(b_1) - G_2(b_1)\|_Y + \|G_2(b_1) - G_2(b_2)\|_Y \\ &= \|y_1 - y_2\|_Y + \|b_1 - b_2 + F(T^{-1}b_2) - F(T^{-1}b_1)\|_Y \\ &= \|y_1 - y_2\|_Y + \|F(x_1) - F(x_2) - T(x_1 - x_2)\|_Y \\ &\le \|y_1 - y_2\|_Y + q\|T(x_1 - x_2)\|_Y \\ &= \|y_1 - y_2\|_Y + q\|b_1 - b_2\|_Y, \end{aligned}$$

故 $\|b_1 - b_2\|_Y \le \frac{1}{1-q}\|y_1 - y_2\|_Y$ 且对 $x_i = F^{-1}(y_i)$, 我们有

$$\|x_1 - x_2\|_X = \|T^{-1}(b_1 - b_2)\|_X \le \|T^{-1}\|_{Y\to X}\|b_1 - b_2\|_Y \le \frac{\|T^{-1}\|_{Y\to X}}{1-q}\|y_1 - y_2\|_Y.$$

引理 2 设 X, Y 是 $L_1(\mathcal{M}) + \mathcal{M}$ 的两个开子集, $\psi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ 是可微同胚映射且 φ 是 ψ 的逆. 若 $\mathrm{D}\psi(a) : X \to Y$ 是连续线性同胚映射且 $a \in X, y \in Y$. 则方程 $\mathrm{D}\psi(a)(x) = y$ 有解

$$x = (\mathrm{D}\psi(a))^{-1}(y) = \mathrm{D}\varphi(\psi(a))(y) \in L_1(\mathcal{M}) + \mathcal{M}.$$

证明 将 $x = (\mathrm{D}\psi(a))^{-1}(y)$ 代入方程 $\mathrm{D}\psi(a)(x) = y$ 中, 我们得到 x 是解. 下证 $(\mathrm{D}\psi(a))^{-1}(y) = \mathrm{D}\varphi(\psi(a))(y)$. 取 X 中任意两点 a_1, a_2, 令 $F_\psi(a_1) = \psi(a_1) - \psi(a_2) - \mathrm{D}\psi(a_1)(a_1 - a_2)$. 因为 ψ 可微, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $\|a_1 - a_2\|_{L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}} \le \delta$ 时, 有

$$\begin{aligned} \|F_\psi(a_1)\|_{L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}} &= \|\psi(a_1) - \psi(a_2) - \mathrm{D}\psi(\mathrm{a}_1)(\mathrm{a}_1 - \mathrm{a}_2)\|_{\mathrm{L}_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}} \\ &\le \varepsilon\|a_1 - a_2\|_{L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}} \\ &\le \varepsilon\|(\mathrm{D}\psi(\mathrm{a}_1))^{-1}\|_{\mathrm{Y}\to\mathrm{X}}\|\mathrm{D}\psi(\mathrm{a}_1)(\mathrm{a}_1 - \mathrm{a}_2)\|_{\mathrm{L}_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}} \\ &= q\|\mathrm{D}\psi(\mathrm{a}_1)(\mathrm{a}_1 - \mathrm{a}_2)\|_{\mathrm{L}_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}} \ (\text{令 } q = \varepsilon\|(\mathrm{D}\psi(\mathrm{a}_1))^{-1}\|_{\mathrm{Y}\to\mathrm{X}} \in (0,1)). \end{aligned}$$

设 $y_i = \psi(a_i) \in L_1(\mathcal{M}) + \mathcal{M}, i = 1, 2$ 且 $\omega = \varphi(y_1) - \varphi(y_2) - T^{-1}(y_1 - y_2)$, 其中 $T = D\psi(a_1)$. 则 $T\omega = T(a_1 - a_2) - \psi(a_1) + \psi(a_2)$. 由引理 1 中的 (2) 知

$$\begin{aligned} \|\omega\|_{L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}} &= \|T^{-1}T\omega\|_{L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}} \le \|T^{-1}\|_{Y\to X}\|T\omega\|_{L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}} \\ &= \|T^{-1}\|_{Y\to X}\|T(a_1 - a_2) - \psi(a_1) + \psi(a_2)\|_{L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\|T^{-1}\|_{Y\to X}\|F_{\psi}(a_1)\|_{L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}}\\
&\le q\|T^{-1}\|_{Y\to X}\|T(a_1-a_2)\|_{L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}}\\
&\le q\|T^{-1}\|_{Y\to X}\|T\|_{X\to Y}\|a_1-a_2\|_{L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}}\\
&\le \frac{q}{1-q}\|T^{-1}\|^2_{Y\to X}\|T\|_{X\to Y}\|y_1-y_2\|_{L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}}.
\end{aligned}
$$

令 $P=\frac{q}{1-q}\|T^{-1}\|^2_{Y\to X}\|T\|_{X\to Y}$, 从上述不等式我们得出结论 $\|\varphi(y_1)-\varphi(y_2)-(\mathrm{D}\psi(a_1))^{-1}(y_1-y_2)\|_{L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}}\le P\|y_1-y_2\|_{L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}}$. 这表明 φ 可微且 $(\mathrm{D}\psi(a))^{-1}(y)=\mathrm{D}\varphi(\psi(a))(y)$.

2　算子方程的解

有关扇形算子的定义请参阅文献 [18]. 我们首先给出下面一个引理.

引理 3　设 $0<a\in\mathcal{M}$ 且 $\psi(a)=a^2$. 则 Fréchet 导数 $\mathrm{D}\psi(a)(x)=ax+xa$ 是单射, 其中 $x\in L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}$.

证明　要证 $\mathrm{D}\psi(a)$ 是单射, 只需证方程 $ax+xa=0$ 有唯一解. 设 x 是齐次方程 $ax+xa=0$ 的解. 对于 $\lambda\in\rho(a)\cap\rho(-a)$, 我们有

$$x(-a-\lambda)^{-1}-(a-\lambda)^{-1}x=0,$$

其中 ρ 是预解集. 令 $t>0$, 将 a 的条件与上述等式结合, 我们可以得到下列积分收敛且

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}e^{t\lambda}(a-\lambda)^{-1}x\mathrm{d}\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}e^{t\lambda}x(-a-\lambda)^{-1}\mathrm{d}\lambda,$$

其中 Γ 为 a 的谱的边界线, 与 $-a$ 的谱分离, 且方向为正. 因 $(-a-\lambda)^{-1}$ 一致有界, 则上述等式右边项消失. 因此,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}e^{t\lambda}(a-\lambda)^{-1}x\mathrm{d}\lambda=0.$$

令 $t\to0$, 通过函数演算可得 $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(a-\lambda)^{-1}\mathrm{d}\lambda=1$ 且 $x=0$. 故 $ax+xa=0$ 的解如果存在, 则唯一.

定理 1　设 $0<a\in\mathcal{M}$. 若 a 的谱在扇形区域 $\{z:z\ne0,-\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}\}$ 上, 则对于 $0\le y\in L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}$, 方程

$$ax+xa=y \tag{2}$$

有解, $x\in L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}$ 且 $x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(\lambda+a^2)^{-1}y(\lambda+a^2)^{-1}\lambda^{\frac12}\mathrm{d}\lambda$.

证明　设 $\varphi(a)=a^{\frac12}$, $\psi(a)=a^2$. 显然 $\psi(a)$ 是同胚映射. 则方程 (2) 可由 ψ 在 a 处的 Fréchet 导数表示为

$$\mathrm{D}\psi(a)(x)=y \tag{3}$$

在文献 [19] 中的 116 页, 我们知道公式 $a^r=\frac{\sin r\pi}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{a}{\lambda+a}\lambda^{r-1}\mathrm{d}\lambda$. 通过变量代换和函数演算, 得到 $\varphi(a)$ 的具体表达式

$$\varphi(a)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}a(\lambda+a)^{-1}\lambda^{-\frac12}\mathrm{d}\lambda.$$

因此,

$$\mathrm{D}\varphi(a)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(\lambda+a)^{-1}y(\lambda+a)^{-1}\lambda^{\frac12}\mathrm{d}\lambda.$$

根据引理 2 可得

$$x=\mathrm{D}\varphi(\psi(a))(y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(\lambda+a^2)^{-1}y(\lambda+a^2)^{-1}\lambda^{\frac12}\mathrm{d}\lambda \tag{4}$$

由引理 3 知 $\mathrm{D}\psi(a)$ 是单射. 将 (4) 代入等式 (3) 中, 得到 x 是方程 (2) 的解. 因 $\|x\|_{L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}}=\|\mathrm{D}\varphi(\psi(a))(y)\|_{L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}}\le\infty$, 故 $x\in L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}$.

定理 2 设 $0<a, b\in\mathcal{M}$. 若 a 和 b 的谱在扇形区域 $\{z:z\neq 0, -\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}\}$ 上, 则方程

$$ax+xb=y, 0\leq y\in L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}$$

有解, $x\in L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}$ 且 $x=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty(\lambda+a^2)^{-1}y(\lambda+b^2)^{-1}\lambda^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda$.

证明 令 $A=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} 0 & x\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 0 & y\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. 因 A, $Y\in(L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M})(\mathbb{M}_2(\mathcal{M}))$, 通过定理 1, 得到 $X\in(L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M})(\mathbb{M}_2(\mathcal{M}))$ 且

$$X=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty(\lambda+A^2)^{-1}Y(\lambda+A^2)^{-1}\lambda^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda.$$

3 算子单调函数

在本节中, 我们研究关于算子单调函数反函数的一些解和例子. 为了方便, 我们引入下列符号. 我们用 $\mathcal{D}$ 定义区间 $(0,\infty)$ 和上下半平面的并集. 设 Q 是一个集合, 其定义为

$$Q=\{\varphi:a\geq b\Rightarrow\varphi(a)\geq\varphi(b)\}.$$

引理 4 设 $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)\in Q$, $\varphi(0)=\lim\limits_{t\downarrow 0}\varphi(t)=0$, $0<a\in\mathcal{M}$. 设 φ 的解析延拓在 $\mathcal{D}$ 上是单叶的且 $\psi:\varphi(\mathcal{D})\to\mathcal{D}$ 是 φ 的反函数. 若 a 的谱在 $\varphi(\mathcal{D})$ 上且 $\psi(a)$ 的谱在 $\mathcal{D}$ 上. 则对 $0\leq y\in L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}$,

$$\mathrm{D}\varphi(a)(y)=by+\int_0^\infty\lambda^2(\lambda+a)^{-1}y(\lambda+a)^{-1}\mathrm{d}\mu(\lambda), b>0.$$

证明 由于 φ 是算子单调函数, 故 $\varphi(z)$ 形式为

$$\varphi(z)=bz+\int_0^\infty\frac{\lambda z}{\lambda+z}\mathrm{d}\mu(\lambda), z\in\mathcal{D}$$

或

$$\varphi(a)=ba+\int_0^\infty\lambda a(\lambda+a)^{-1}\mathrm{d}\mu(\lambda),$$

其中 $b\geq 0$, μ 是正测度, $\int_0^\infty\frac{\lambda}{\lambda+1}\mathrm{d}\mu(\lambda)<\infty$ 且 a 的谱在 $\mathcal{D}$ 上. 令 $h(a)=a^{-1}$, $f(a)=a(\lambda+a)^{-1}=1-\lambda(\lambda+a)^{-1}$. 则对 $0\leq y\in L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}$ 来说, 其导数为 $\mathrm{D}h(a)(y)=-a^{-1}ya^{-1}$, $\mathrm{D}f(a)(y)=\lambda(\lambda+a)^{-1}y(\lambda+a)^{-1}$. 从而

$$\mathrm{D}\varphi(a)(y)=by+\int_0^\infty\lambda^2(\lambda+a)^{-1}y(\lambda+a)^{-1}\mathrm{d}\mu(\lambda)\tag{5}$$

因为 $\int_0^\infty\lambda^2\|(\lambda+a)^{-1}\|^2\mathrm{d}\mu(\lambda)<\infty$, 故 (5) 式的积分项收敛. 事实上, 若 a 的谱在 $\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$ 上, 则 $(\lambda+1)\|(\lambda+a)^{-1}\|$ 有界. 由于

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\|Z\|}\int_0^\infty\lambda\|f(a+Z)-f(a)-\mathrm{D}f(a)(Z)\|\mathrm{d}\mu(\lambda)\\ &\leq\frac{1}{\|Z\|}\int_0^\infty\lambda^2\|(\lambda+a)^{-1}\|\|(\lambda+a)^{-1}-(\lambda+a+Z)^{-1}\|\|Z\|\mathrm{d}\mu(\lambda)\\ &\leq(\int_0^\infty\lambda^2\|(\lambda+a)^{-1}\|^2\|(\lambda+a+Z)^{-1}\|\mathrm{d}\mu(\lambda))\|Z\|\end{aligned}\tag{6}$$

令 $\|Z\|\to 0$, 得到 (6) 式收敛且 (5) 成立.

因此, 我们有如下定理.

定理 3 设 a, y, φ, ψ 和 $\mathcal{D}$ 满足引理 4 中的假设. 若 a 的谱在 $\varphi(\mathcal{D})$ 上, 则对代表元 $\varphi(z)=bz+\int_0^\infty\frac{\lambda z}{\lambda+z}\mathrm{d}\mu(\lambda)$, $b\geq 0$, μ 是正测度, $\int_0^\infty\frac{\lambda}{\lambda+1}\mathrm{d}\mu(\lambda)<\infty$ 来说, 方程

$$\mathrm{D}\psi(a)(x)=y$$

有解且解为

$$x=by+\int_0^\infty \lambda^2(\lambda+\psi(a))^{-1}y(\lambda+\psi(a))^{-1}\mathrm{d}\mu(\lambda).$$

证明　根据引理 2 和引理 4 , 我们得到结论.

例 1　考虑函数 $\varphi(k)=\log(k+1), k>0$. 显然它的解析延拓是 $\varphi(m)=\mathrm{Log}(m+1)$, 其中 $\mathrm{Log}m=\log|m|+i\mathrm{Arg}m$ 是定义在除了 $(-\infty,0]$ 上的对数函数且函数 $\mathrm{Arg}m$ 的取值在 $(-\pi,\pi]$ 上. 令 $\acute{\mathcal{D}}=\mathbb{C}\backslash(-\infty,0]$. 则 φ 的反函数在 $\varphi(\acute{\mathcal{D}})=\{\omega\in\mathbb{C}:-\pi<\mathrm{Im}\omega<\pi\}\backslash(-\infty,0]$ 上的定义为

$$\psi(\omega)=e^{\omega}-1.$$

我们知道 $\varphi(m)$ 的积分表示为

$$\varphi(m)=\int_1^\infty \frac{m}{\lambda+m}\frac{1}{\lambda}\mathrm{d}\lambda.$$

对 $\psi(k)=e^k-1$ 来说, Dyson's 扩张 $e^{a+x}-e^a=\int_0^1 e^{(1-k)a}xe^{k(a+x)}\mathrm{d}k$ 给出

$$\mathrm{D}\psi(a)(x)=\int_0^1 e^{(1-k)a}xe^{ka}\mathrm{d}k.$$

令 $0<a\in\mathcal{M}$ 且它的谱在 $\varphi(\acute{\mathcal{D}})$ 上. 则方程

$$\int_0^1 e^{(1-k)a}xe^{ka}\mathrm{d}k=y$$

有解

$$\begin{aligned}x=\mathrm{D}\varphi(\psi(a))(y)&=\int_1^\infty(\lambda+e^a-1)^{-1}y(\lambda+e^a-1)^{-1}\mathrm{d}\lambda\\&=\int_0^\infty(\lambda+e^a)^{-1}y(\lambda+e^a)^{-1}\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

参考文献:

[1] SYLVESTER J J. Sur l'equation en matrices $px=xq$[J]. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 1884, 99(2): 67-71.

[2] DALECKI Y L. On the asymptotic solution of a vector differential equation[J]. Doklady Akademii Nauk Sssr, 1953, 92: 881-884.

[3] ROSENBLUM M. On the operator equation $BX-XA=Q$[J]. Duke Mathmatical Journal, 1956, 23(2): 263-269.

[4] ROSENBLUM M. The operator equation $BX-XA=Q$ with selfadjoint A and B[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1969, 20(1): 115-120.

[5] BHATIA R, ROSENTHAL P. How and why to solve the operator equation $AX-XB=Y$[J]. Bulletin of the London Mathematical Society, 1997, 29(1): 1-21.

[6] HIAI F, KOSAKI H. Means for matrices and comparison of their norms[J]. Indiana University Mathematics Journal, 1999, 48(3): 899-936.

[7] DODDS P G, DODDS T K, SUKOCHEV F A, et al. Arithmetic-geometric mean and related submajorisation and norm inequalities for τ measurable operators: Part II[J]. Integral Equations and Operator Theory, 2020, 92(4): 1-60.

[8] BHATIA R, UCHIYAMA M. The operator equation $\sum\limits_{i=1}^{n}A^{n-i}XB^i=Y$[J]. Expositiones Mathematicae, 2009, 27(3): 251-255.

[9] SANO T. Fréchet derivatives for operator monotone functions[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2014, 456: 88-92.

[10] DIXMIER J. Von Neumann algebras[M]. Amsterdam: North-Holland Publishing, 1981.

[11] PISIER G, XU Q. Noncommutative $\mathrm{L_P}$-spaces[J]. Handbook of the Geometry of Banach Spaces, 2003, 2: 1459-1517.

[12] TAKESAKI M. Theory of operator algebra I[M]. New York: Springer-Verlag, 1979.

[13] RUAN Z J. Operator spaces[M]. Oxford: Clarendon Press, 2000.

[14] JIANG X Y, HAN Y Z. Some logarithmic submajorisation inequalities related to Heinz mean[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2021, 38(4): 397-406+424.

[15] WANG Y, YAN C. Logarithmic submajorization and symmetric quasi-norm inequalities on operators[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2021, 38(4): 407-424.

(下转第 445 页)