与可测算子相关的广义 Heinz 不等式*

李宝珍[1], 韩亚洲[1,2†]

(1. 新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017; 2. 太原理工大学 数学学院, 山西 太原 030024)

摘　要: 利用双重算子积分的方法给出了 τ-可测算子的广义 Heinz 型次优化不等式, 将相对应的一些矩阵形式的不等式推广到了 τ-可测算子的情形.

关键词: 双重算子积分; 可测算子; Heinz 型次优化不等式

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316. 2021.10.14.0002

中图分类号: O177.1　**文献标识码**: A　**文章编号**: 2096-7675(2022)05-0560-07

引文格式: 李宝珍, 韩亚洲. 与可测算子相关的广义 Heinz 不等式[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2022, 39(5): 560-566+591.

英文引文格式: LI Baozhen, HAN Yazhou. Generalized Heinz inequalities related to measurable operator[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2022, 39(5): 560-566+591.

Generalized Heinz Inequalities Related to Measurable Operator

LI Baozhen[1], HAN Yazhou[1,2]

(*1. School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China;*
2. College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi 030024, China)

Abstract: In this paper, we use the method of double operator integral to give the generalized Heinz type submajorized inequality of the τ-measurable operator, and generalizes some corresponding matrix inequalities to the τ-measurable operator situation.

Key words: double operator integral; measurable operator; Heinz type submajorized inequality

0　引 言

我们用 M_n 表示 $n\times n$ 阶复矩阵构成的集合. 称 M_n 上的范数 $\|\cdot\|_u$ 为酉不变范数, 如果对任意的 $\boldsymbol{A}\in M_n$, 酉矩阵 $\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}\in M_n$, 有 $\|\boldsymbol{UAV}\|_u=\|\boldsymbol{A}\|_u$.

算子范数形式的 Heinz 不等式最早是由 Heinz 在文献 [1] 中给出的. 此后, Heinz 不等式引起了许多学者的关注. 1993 年, Bhatia 与 Davis 在文献 [2] 中得到了酉不变范数形式的 Heinz 不等式

$$\|\boldsymbol{A}^r\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{1-r}+\boldsymbol{A}^{1-r}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^r\|_u\le\|\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XB}\|_u \tag{1}$$

其中 $0\le r\le 1$, $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{X}\in M_n$ 且 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是半正定矩阵. 随后, Zhan 在文献 [3] 中证明了含有参数的 Heinz 不等式

$$\|\boldsymbol{A}^r\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{2-r}+\boldsymbol{A}^{2-r}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^r\|_u\le\|\frac{2}{t+2}(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{X}+t\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{XB}^2)\|_u \tag{2}$$

其中 $r\in[\frac{1}{2},1]$, $t\in(-2,2]$, $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{X}\in M_n$ 且 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是半正定矩阵.

* **收稿日期**: 2021-10-14
基金项目: 国家自然科学基金(11761067); 天山青年计划-优秀科技人才项目(2018Q012).
作者简介: 李宝珍(1994-), 男, 硕士生, 从事泛函分析的研究, E-mail: bzhenli@163.com.
† **通讯作者**: 韩亚洲, 男, 博士, 副教授, 主要从事泛函分析的研究, E-mail: hanyazhou@foxmail.com.

2016 年, Kosaki 在文献 [4] 中把 Heinz 不等式做了如下推广

$$\frac{1}{2}\|\boldsymbol{A}^r\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{1-r}+\boldsymbol{A}^{1-r}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^r\|_u\le\frac{1}{2^n}\|\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\boldsymbol{A}^{\frac{m}{n}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^{\frac{n-m}{n}}\|_u \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{X}$ 是 Hilbert 空间中的有界线性算子, $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\ge 0$, $r\in[\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n}),\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})]$, $n=1,2,3,\cdots$.

最近, Dodds 等在文献 [5] 中把 Heinz 不等式推广到了可测算子的形式, 并给出了一些 τ-可测算子的 Heinz 型次优化不等式.

本文应用文献 [5-6] 中的方法给出了 τ-可测算子的广义 Heinz 型次优化不等式, 并把上述不等式 (2) 和 (3) 推广到了τ-可测算子的情形.

1　准备知识

本文中 $\mathcal{M}$ 表示可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的具有正规忠实半有限迹 τ 的半有限 von Neumann 代数. $\mathcal{M}_+$ 表示 $\mathcal{M}$ 的全体正元构成的锥. $\mathbf{1}$ 表示 $\mathcal{M}$ 中的单位算子, $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ 表示 $\mathcal{M}$ 中所有正交投影构成的格. $\mathcal{M}'$ 表示 $\mathcal{M}$ 的交换子, 记 $\mathcal{M}'=\{x\in\mathcal{B}(\mathcal{H}):xy=yx,\forall y\in\mathcal{M}\}$.

称 x 附属于 $\mathcal{M}$, 若对 $\mathcal{M}'$ 中的任意一个酉元 u, 有 $ux=xu$, 其中 $x:\mathcal{D}(x)\to\mathcal{H}$ 上的闭稠定线性算子. 称附属于$\mathcal{M}$ 的算子 x 关于 τ 可测, 如果对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $e\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$, 使得 $e(\mathcal{H})\subset\mathcal{D}(x)$ 且 $\tau(e^{\perp})\le\varepsilon$. $L_0(\mathcal{M})$ 表示可测算子全体构成的集合.

设 $x\in L_0(\mathcal{M})$, 对于任意的 $t>0$, 我们定义广义奇异值 $\mu_t(x)$ 为

$$\mu_t(x)=\inf\{\|xe\|:e\text{ 是 }\mathcal{M}\text{ 上的一个投影, }\tau(e^{\perp})\le t\}.$$

设 $x,y\in L_0(\mathcal{M})$, 我们称 y 次优化于 x, 若对所有的 $t\ge 0$ 都满足

$$\int_0^t\mu_s(x)\,\mathrm{d}s\le\int_0^{\mathrm{t}}\mu_{\mathrm{s}}(y)\,\mathrm{d}s.$$

在这篇文章中, 我们通常记作 $x\prec\prec y$, 或 $\mu(x)\prec\prec\mu(y)$.

设 E 是 $L_0(\mathcal{M})$ 的线性子空间, $\|\cdot\|_E$ 是它的范数. 我们称 $\|\cdot\|_E$ 为对称范数, 如果 $x\in E$, $y\in L_0(\mathcal{M})$ 且 $\mu(y)\le\mu(x)$ 使得 $y\in E$ 和 $\|y\|_E\le\|x\|_E$. 我们称 $\|\cdot\|_E$ 为完全对称范数, 如果 E 是对称范数并满足下列条件: 若 $x\in E$, $y\in L_0(\mathcal{M})$ 且 $y\prec\prec x$, 则 $y\in E$, $\|y\|_E\le\|x\|_E$. 如果 $E\subseteq L_0(\mathcal{M})$ 依完全对称范数 $\|\cdot\|_E$ 成为 Banach 空间, 我们称 E 为完全对称算子空间. 特别的, 非交换 L_p 空间 $L_p(\mathcal{M})=\{x\in L_0(\mathcal{M}):\|x\|_p=(\tau(|x|^p))^{\frac{1}{p}}<\infty\}$ $(0<p<\infty)$ 为完全对称算子空间. 更多的相关知识见文献 [5-7].

设 $y,z\in L_0(\mathcal{M})$ 是自伴的. 我们介绍一种特殊的函数类 $\mathfrak{A}$, 设

$$\phi:Spec(y)\times Spec(z)\longrightarrow\mathbb{C}$$

为 Borel 函数, $Spec(y),Spec(z)$ 分别为 y,z 的谱集. 称 $\phi\in\mathfrak{A}$, 若存在一个 σ-有限的测度空间 (Ω,Σ,m) 使得

$$\phi(\lambda,\mu)=\int_\Omega f(\lambda,t)g(\mu,t)\,\mathrm{d}m(t) \tag{4}$$

其中

$$f:Spec(y)\times\omega\longrightarrow\mathbb{C},\quad g:Spec(z)\times\omega\longrightarrow\mathbb{C}$$

是有界 $\mathcal{B}(\mathbb{R})\times\Omega$ 可测复值函数并且

$$\int_\Omega\sup_{\lambda\in Spec(y)}|f(\lambda,\omega)|\sup_{\mu\in Spec(z)}|g(\mu,\omega)|\mathrm{d}m(\omega)<\infty \tag{5}$$

定义 1　设 $y,z\in L_0(\mathcal{M})$ 是自伴算子, $\phi\in\mathfrak{A}$. 定义双重积分算子 $T_{\phi,\infty}^{y,z}:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ 为

$$T_{\phi,\infty}^{y,z}(x)=\int_\Omega f(y,\omega)xg(z,\omega)\mathrm{d}\nu(\omega),\quad \mathrm{x}\in\mathcal{M}.$$

其中上述积分在弱*拓扑意义下存在, 即对任意的$a\in L_1(\mathcal{M})$,

$$\tau\left(\left(\int_\Omega f(y,\omega)xg(z,\omega)\mathrm{d}\nu(\omega)\right)a\right)=\int_\Omega \tau(f(y,\omega)xg(z,\omega)a)\mathrm{d}\nu(\omega).$$

由文献 [5] 中的定理 4.5 可知, 上述定义是合理的, 并且双重积分算子 $T_{\phi,\infty}^{y,z}(x)$ 不依赖于 ϕ 的表达式.

定义 2 设 $y,z\in L_0(\mathcal{M})$ 自伴且 $\phi\in\mathfrak{A}$. 定义双重积分算子 $T_{\phi,1}^{y,z}:L_1(\mathcal{M})\to L_1(\mathcal{M})$ 为 $T_{\phi,\infty}^{y,z}$ 到 $L_1(\mathcal{M})\cap\mathcal{M}$ 的限制的唯一延拓(见文献 [5] 中定义 4.10). 而且定义双重积分算子 $T_{\phi,+}^{y,z}:L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}\to L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}$ 为

$$T_{\phi,+}^{y,z}(x)=T_{\phi,1}^{y,z}(u)+T_{\phi,\infty}^{y,z}(v),x=u+v,u\in L_1(\mathcal{M}),v\in\mathcal{M}.$$

由于 $T_{\phi,1}^{y,z}(x)=T_{\phi,\infty}^{y,z}(x),x\in L_1(\mathcal{M})\cap\mathcal{M}$, 所以上述定义是合理的.

定义 3 设 $0\le y,z\in L_0(\mathcal{M})$ 且 $\phi\in\mathfrak{A}$. 若 E 是完全对称算子空间, 则定义双重积分算子 $T_{\phi,E}^{y,z}:E\to E$ 是双重积分算子 $T_{\phi,+}^{y,z}:L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}\to L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}$ 在 E 中的限制.

设 $0\le y,z\in L_0(\mathcal{M})$, $\phi\in\mathfrak{A}$ 且 E 是完全对称算子空间. 如果 $f:Spec(y)\to\mathbb{C}$, $g:Spec(z)\to\mathbb{C}$ 是有界 Borel 函数, $\phi(\lambda,\mu)=f(\lambda)g(\mu),(\lambda,\mu)\in Spec(y)\times Spec(z)$, 因此

$$T_{\phi,E}^{y,z}(x)=f(y)xg(z),x\in E \tag{6}$$

此外, 如果 $\phi_1,\phi_2\in\mathfrak{A}$, $0\le y,z\in L_0(\mathcal{M})$ 且 E 是完全对称算子空间, 容易证明

$$T_{\phi_1+\phi_2,E}^{y,z}=T_{\phi_1,E}^{y,z}+T_{\phi_2,E}^{y,z},\quad T_{\phi_1\phi_2,E}^{y,z}=T_{\phi_1,E}^{y,z}T_{\phi_2,E}^{y,z} \tag{7}$$

本文的主要结果证明中不但要用到上述双重积分算子的性质, 还将用到如下引理.

引理 1[5] 设 $0\le y,z\in L_0(\mathcal{M})$ 且 $\phi\in\mathfrak{A}$. 则对任意的 $x\in L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}$, 有

$$T_{\phi,+}^{y,z}(x)\prec\prec\left(\int_\Omega \|f(\cdot,t)\|_\infty\|g(\cdot,t)\|_\infty\,\mathrm{d}m(t)\right)x.$$

如果 $E\subseteq L_0(\mathcal{M})$ 是一个完全对称算子空间, 称 $E\subseteq L_1(\mathcal{M})+\mathcal{M}$. 由此可知对任意的 $x\in E$, 有

$$\|T_{\phi,E}^{y,z}\|_{E\to E}\le\int_\Omega \|f(\cdot,t)\|_\infty\|g(\cdot,t)\|_\infty\,\mathrm{d}m(t),$$

其中

$$\|f(\cdot,t)\|_\infty=\sup_{\lambda\in Spec(y)}|f(\lambda,t)|\quad 和\quad \|g(\cdot,t)\|_\infty=\sup_{\mu\in Spec(z)}|g(\mu,t)|,$$

m 是一个 σ-有限测度. 关于双重算子积分的基本性质与具体知识参见文献 [5, 8]. 在下面的证明过程中我们还将用到著名的 Bochner 定理(见文献 [9]), 首先我们回顾一下正定函数的定义.

定义 4 我们称函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 为正定函数, 若对任意的 $x_1,x_2,\cdots,x_s\in\mathbb{R}$ 和 $c_1,c_2,\cdots,c_s\in\mathbb{C}$ 满足

$$\sum_{i,j=1}^{s}c_i\overline{c_j}f(x_i-x_j)\ge 0.$$

引理 2(Bochner's 定理) 若 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 为一个连续的正定函数, 则存在 $\mathbb{R}$ 上的正有限测度 m 使得

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-its}\mathrm{d}m(s),\ t\in\mathbb{R}.$$

2 主要结论

定理 1 设 $E\subseteq L_0(\mathcal{M})$ 是一个完全对称算子空间且 y,z 为 $\mathcal{M}$ 中的可逆正算子. 如果 $r\in[0,1]$ 且 $t\in(-2,0]$, 则

$$\|y^rxz^{2-r}+y^{2-r}xz^r\|_E\le\left\|\frac{2}{t+2}(y^2x+tyxz+xz^2)\right\|_E,\qquad x\in E.$$

证明　设

$$\phi_1(\lambda,\mu):=\lambda^r\mu^{2-r}+\lambda^{2-r}\mu^r,\quad \phi_2(\lambda,\mu):=\frac{2}{t+2}(\lambda^2+t\lambda\mu+\mu^2),$$

且

$$\phi_3(\lambda,\mu):=\begin{cases}\phi_1(\lambda,\mu)/\phi_2(\lambda,\mu), & \lambda,\mu>0;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

首先证明 ϕ_1,ϕ_2 且 ϕ_3 属于 $\mathfrak{A}$. 因为 y,z 为 $\mathcal{M}$中的可逆正算子, 所以存在 $\varepsilon>0$, 使得 $Spec(y)\in[\varepsilon,\|y\|]$ 且 $Spec(z)\in[\varepsilon,\|z\|]$. 令 $f_1^1(\lambda,\omega):=\lambda^r, g_1^1(\mu,\omega):=\mu^{2-r}, f_1^2(\lambda,\omega):=\lambda^{2-r}$ 且 $g_1^2(\mu,\omega):=\mu^r$, 其中 $(\lambda,\omega)\in Spec(y)\times[0,1]$ 且 $(\mu,\omega)\in Spec(z)\times[0,1]$. 计算可知 f_1^1,f_1^2 在 $Spec(y)\times[0,1]$ 上有界, g_1^1,g_1^2 在 $Spec(z)\times[0,1]$ 上有界, 且

$$\int_0^1\|f_1^1(\lambda,\omega)\|_\infty\|g_1^1(\mu,\omega)\|_\infty\,\mathrm{d}\omega<\infty,\quad \int_0^1\|f_1^2(\lambda,\omega)\|_\infty\|g_1^2(\mu,\omega)\|_\infty\,\mathrm{d}\omega<\infty.$$

记

$$\phi_1^1(\lambda,\mu):=\int_0^1\lambda^r\mu^{2-r}\,\mathrm{d}\omega=\int_0^1 f_1^1(\lambda,\omega)g_1^1(\mu,\omega)\,\mathrm{d}\omega,$$
$$\phi_1^2(\lambda,\mu):=\int_0^1\lambda^{2-r}\mu^r\,\mathrm{d}\omega=\int_0^1 f_1^2(\lambda,\omega)g_1^2(\mu,\omega)\,\mathrm{d}\omega,$$

则

$$\phi_1(\lambda,\mu)=\phi_1^1(\lambda,\mu)+\phi_1^2(\lambda,\mu).$$

进而应用 (4) 和 (5) 可知, ϕ_1^1, $\phi_1^2\in\mathfrak{A}$. 再结合文献 [5] 中的引理 4.6, 可得 $\phi_1\in\mathfrak{A}$. 类似地可以证明 $\phi_2\in\mathfrak{A}$.

下证 $\phi_3\in\mathfrak{A}$. 设 $\lambda\in Spec(y)$ 且 $\mu\in Spec(z)$, 令 $\exp(s)=\frac{\lambda}{\mu}$, 通过双曲函数的定义, 我们有

$$\begin{aligned}\phi_3(\lambda,\mu)=\frac{\phi_1(\lambda,\mu)}{\phi_2(\lambda,\mu)}&=\frac{t+2}{2}\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{r-1}+(\frac{\lambda}{\mu})^{1-r}}{\frac{\lambda}{\mu}+t+(\frac{\lambda}{\mu})^{-1}}\\&=\frac{t+2}{2}\frac{\exp(s(r-1))+\exp(s(1-r))}{\exp(s)+t+\exp(-s)}\\&=\frac{t+2}{2}\frac{\cosh(\mathrm{s(1-r)})}{\cosh(\mathrm{s})+\frac{\mathrm{t}}{2}},\end{aligned}$$

其中 $0\le 1-r\le 1$ 且 $-1<\frac{t}{2}\le 0$. 令函数 $f_{r,t}(s)=\frac{\cosh(\mathrm{s(1-r)})}{\cosh(\mathrm{s})+\frac{\mathrm{t}}{2}}$. 由文献 [10] 中的命题 7.3 可知, $f_{r,t}(s)$ 是正定函数且 $f_{r,t}(0)=1$. 应用引理 2, $\mathbb{R}$ 上存在一个正有限测度 m 使得

$$\phi_3(\lambda,\mu)=\frac{t+2}{2}f_{r,t}(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ist}\mathrm{d}m(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^{-it}\mu^{it}\mathrm{d}m(t),$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{\lambda\in Spec(y)}|\lambda^{-it}|\sup_{\mu\in Spec(z)}|\mu^{it}|\mathrm{d}m(t)<\infty.$$

因此 $\phi_3\in\mathfrak{A}$. 进而结合引理 1 与 (6), (7) 可得, 对于任意的 $x\in E$, 有 $\|T^{y,z}_{\phi_3,E}\|\le 1$ 且

$$\begin{aligned}y^rxz^{2-r}+y^{2-r}xz^r&=T^{y,z}_{\phi_1,E}(x)=T^{y,z}_{\phi_3\phi_2,E}(x)\\&=T^{y,z}_{\phi_3,E}(T^{y,z}_{\phi_2,E}(x))\\&=T^{y,z}_{\phi_3,E}(\frac{2}{t+2}(y^2x+tyxz+xz^2)).\end{aligned}$$

故,

$$\begin{aligned}\|T^{y,z}_{\phi_1,E}(x)\|_E&=\|T^{y,z}_{\phi_3,E}(T^{y,z}_{\phi_2,E}(x))\|_E\\&\le\|T^{y,z}_{\phi_2,E}(x)\|_E,\quad x\in E.\end{aligned}$$

定理 2 设 y,z 为 $\mathcal{M}$ 中的可逆正算子且 $E\subseteq L_0(\mathcal{M})$ 是一个完全对称算子空间. 若$s_1,s_2\in\mathbb{R}$ 且满足 $0<|s_1|\leq|s_2|$, 则对$x\in E$, 有

$$\|s_2(y^{s_1+s_2}xz^{s_2-s_1}-y^{s_2-s_1}xz^{s_1+s_2})\|_E\leq\|s_1(y^{2s_2}x-xz^{2s_2})\|_E.$$

证明 设

$$\phi_1(\lambda,\mu)=s_2(\lambda^{s_1+s_2}\mu^{s_2-s_1}-\lambda^{s_2-s_1}\mu^{s_1+s_2}),\quad \phi_2(\lambda,\mu)=s_1(\lambda^{2s_2}-\mu^{2s_2}),$$

且

$$\phi_3(\lambda,\mu)=\begin{cases}\phi_1(\lambda,\mu)/\phi_2(\lambda,\mu), & \lambda,\mu>0;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

此定理的证明与定理 1 类似, 所以我们仅对 $\phi_3\in\mathfrak{A}$ 的情形加以证明. 因为 y,z 为 $\mathcal{M}$ 中的可逆正算子, 所以存在 $\varepsilon>0$ 使得 $Spec(y)\in[\varepsilon,\|y\|]$ 且 $Spec(z)\in[\varepsilon,\|z\|]$. 设 $\lambda\in Spec(y),\mu\in Spec(z)$, 令 $\exp(x)=\frac{\lambda}{\mu}$, 应用双曲函数的定义可知

$$\begin{aligned}\phi_3(\lambda,\mu)&=\frac{\phi_1(\lambda,\mu)}{\phi_2(\lambda,\mu)}=\frac{s_2(\frac{\lambda}{\mu})^{s_1}-(\frac{\lambda}{\mu})^{-s_1}}{s_1\frac{\lambda}{\mu}^{s_2}-(\frac{\lambda}{\mu})^{-s_2}}\\&=\frac{s_2}{s_1}\frac{\exp(xs_1)-\exp(-xs_1)}{\exp(xs_2)-\exp(-xs_1)}\\&=\frac{s_2}{s_1}\frac{\sinh(\mathrm{s_1x})}{\sinh(\mathrm{s_2x})},\end{aligned}$$

其中 $0<|s_1|\leq|s_2|$. 令 $f_{s_1,s_2}(x)=\frac{s_2}{s_1}\frac{\sinh(\mathrm{s_1x})}{\sinh(\mathrm{s_2x})}$. 由于文献 [11] 中命题 2.2 给出 $\log(f_{s_1,s_2}(x)^{-1})$ 是条件负定函数, 根据文献 [12] 中命题 4.4, 可知 $f_{s_1,s_2}(x)$ 是正定函数. 故 $\phi_3\in\mathfrak{A}$, $\phi_3(\lambda,\mu)\leq\lim\limits_{x\to0}f_{s_1,s_2}(x)=1$, 且 $\|T^{y,z}_{\phi_3,E}\|\leq1$. 进而结合引理 1 与等式 (6), (7) 可得,

$$\begin{aligned}&s_2\|(y^{s_1+s_2}xz^{s_2-s_1}-y^{s_2-s_1}xz^{s_1+s_2})\|_E\\=&\|T^{y,z}_{\phi_1,E}(x)\|_E=\|T^{y,z}_{\phi_3\phi_2,E}(x)\|_E\\=&\|T^{y,z}_{\phi_3,E}(T^{y,z}_{\phi_2,E}(x))\|_E\\=&\|T^{y,z}_{\phi_3,E}(s_1(y^{2s_2}x-xz^{2s_2}))\|_E\\\leq&\|s_1(y^{2s_2}x-xz^{2s_2})\|_E,\ x\in E.\end{aligned}$$

定理 3 设 $E\subseteq L_0(\mathcal{M})$ 是一个完全对称算子空间, y,z 为 $\mathcal{M}$ 中的可逆正算子. 则

$$\|(\frac{y^{-1}x+xz^{-1}}{2})^{-1}\|_E\leq\|y^{\frac{1}{2}}xz^{\frac{1}{2}}\|_E,\qquad x\in E.$$

证明 设

$$\phi_1(\lambda,\mu):=(\frac{\lambda^{-1}+\mu^{-1}}{2})^{-1},\quad \phi_2(\lambda,\mu):=\lambda^{\frac{1}{2}}\mu^{\frac{1}{2}},$$

且

$$\phi_3(\lambda,\mu):=\begin{cases}\phi_1(\lambda,\mu)/\phi_2(\lambda,\mu), & \lambda,\mu>0;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

此定理的证明方法与定理 1 的证明类似, 为了阅读方便我们给出完整的证明过程. 由 ϕ_2 的定义可知 $\phi_2\in\mathfrak{A}$ 显然成立. 下证 $\phi_3\in\mathfrak{A}$. 因为 y,z 为 $\mathcal{M}$ 中的可逆正算子, 所以存在 $\varepsilon>0$ 使得 $Spec(y)\in[\varepsilon,\|y\|]$ 且 $Spec(z)\in[\varepsilon,\|z\|]$.

设 $\lambda\in Spec(y),\mu\in Spec(z)$, 令 $\exp(s)=\frac{\lambda}{\mu}$, 由于 $\phi_3(\lambda,\mu)$ 满足 Bochner 定理与文献 [10] 中命题 7.3 的条件, 因此

$$\begin{aligned}\phi_3(\lambda,\mu)&=\frac{\phi_1(\lambda,\mu)}{\phi_2(\lambda,\mu)}=\frac{(\frac{\lambda^{-1}+\mu^{-1}}{2})^{-1}}{\lambda^{\frac12}\mu^{\frac12}}\\&=2\frac{1}{(\frac{\lambda}{\mu})^{\frac12}+(\frac{\lambda}{\mu})^{-\frac12}}=2\frac{1}{\exp(\frac{s}{2})+\exp(-\frac{s}{2})}\\&=\frac{1}{\cosh\frac{s}{2}}=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-ist)\,\frac{\mathrm{d}t}{\cosh(\pi t)}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^{-it}\mu^{it}\,\frac{\mathrm{d}t}{\cosh(\pi t)}.\end{aligned}$$

因为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{|\cosh(\pi t)|}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\cosh(\pi t)}=1,$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{\lambda\in Spec(y)}|\lambda^{-it}|\sup_{\mu\in Spec(z)}|\mu^{it}|\mathrm{d}m(t)<\infty,$$

其中 $\mathrm{d}m(t)=\frac{\mathrm{d}t}{\cosh(\pi t)}$ (见文献 [5] 中命题 5.1). 所以 $\phi_3\in\mathfrak{A}$. 应用文献 [5] 中引理 4.6, 由于 $\phi_1(\lambda,\mu)=\phi_2(\lambda,\mu)\phi_3(\lambda,\mu)$, 因此 $\phi_1\in\mathfrak{A}$. 进而由引理 1 及等式 (6), (7)可得 $\|T^{y,z}_{\phi_3,E}\|\le 1$ 且

$$(\frac{y^{-1}x+xz^{-1}}{2})^{-1}=T^{y,z}_{\phi_1,E}(x)=T^{y,z}_{\phi_3\phi_2,E}(x)=T^{y,z}_{\phi_3,E}(T^{y,z}_{\phi_2,E}(x))=T^{y,z}_{\phi_3,E}(y^{\frac12}xz^{\frac12}),\ x\in E.$$

从而

$$\begin{aligned}\|(\frac{y^{-1}x+xz^{-1}}{2})^{-1}\|_E&=\|T^{y,z}_{\phi_3,E}(y^{\frac12}xz^{\frac12})\|_E\\&\le\|y^{\frac12}xz^{\frac12}\|_E,\quad x\in E.\end{aligned}$$

定理 4 设 $E\subseteq L_0(\mathcal{M})$ 是完全对称算子空间且 y,z 为 $\mathcal{M}$ 中的可逆正算子, 则

$$\|\frac{y^rxz^{1-r}+y^{1-r}xz^r}{2}\|_E\le\|\frac{\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}y^{\frac{m}{n}}xz^{\frac{n-m}{n}}}{2^n}\|_E,\ x\in E,$$

其中 $r\in[\frac12(1-\frac1n),\frac12(1+\frac1n)]$, $n=1,2,3,\cdots$.

证明 此定理的证明方法与定理 1 类似, 其中

$$\phi_1(\lambda,\mu):=\frac{\lambda^r\mu^{1-r}+\lambda^{1-r}\mu^r}{2},\quad\phi_2(\lambda,\mu):=\frac{1}{2^n}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\lambda^{\frac{m}{n}}\mu^{\frac{n-m}{n}},$$

且

$$\phi_3(\lambda,\mu):=\begin{cases}\phi_1(\lambda,\mu)/\phi_2(\lambda,\mu), & \lambda,\mu>0;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

由定理 1 的证明方法可知, 只需证明 $\phi_3\in\mathfrak{A}$ 即可. 因为 y,z 为 $\mathcal{M}$ 中的可逆正算子, 所以存在 $\varepsilon>0$ 使得 $Spec(y)\in[\varepsilon,\|y\|]$ 且 $Spec(z)\in[\varepsilon,\|z\|]$. 设 $\lambda\in Spec(y),\mu\in Spec(z)$, 令 $\exp(2s)=\frac{\lambda}{\mu}$, 由双曲函数的定义与文献 [10] 中的命题 7.3 可知

$$\begin{aligned}\phi_3(\lambda,\mu)&=\frac{\phi_1(\lambda,\mu)}{\phi_2(\lambda,\mu)}=\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{r-\frac12}+(\frac{\lambda}{\mu})^{\frac12-r}}{(\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^{\frac{1}{2n}}+(\frac{\lambda}{\mu})^{-\frac{1}{2n}}}{2})^n}\\&=\frac{\exp(s(2r-1))+\exp(s(1-2r))}{(\frac{\exp(\frac{s}{n})+\exp(\frac{-s}{n})}{2})^n}\\&=\frac{\cosh(\mathrm{s}(2\mathrm{r}-1))}{\cosh^{\mathrm{n}}(\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{n}})},\end{aligned}$$

且 $\phi_3(\lambda,\mu)$ 是正定函数, 其中 $-\frac{1}{n}\le 2r-1\le\frac{1}{n}, n=1,2,3,\cdots$.

因为 $\phi_3(\lambda,\mu)$ 满足文献 [4] 中定理 6 的条件, 因此存在 $\mathbb{R}$ 上的一个概率测度 m 使得

$$\phi_3(\lambda,\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ist}\mathrm{d}m(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^{-\mathrm{it}}\mu^{\mathrm{it}}\mathrm{d}m(t),$$

且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sup_{\lambda\in Spec(y)}|\lambda^{-it}|\sup_{\mu\in Spec(z)}|\mu^{it}|\mathrm{d}m(t)<\infty.$$

从而, $\phi_3\in\mathfrak{A}$.

定理 5 设 $E\subseteq L_0(\mathcal{M})$ 是完全对称算子空间. 如果 y,z 为 $\mathcal{M}$ 中的可逆正算子, 则

$$\|\frac{y^{\frac{2}{3}}x-xz^{\frac{2}{3}}}{2}\|_E\le C_1\|xz^{-\frac{1}{3}}-y^{-\frac{1}{3}}x\|_E,\quad x\in E,$$

其中 $C_1=\max\{\|y\|^{\frac{2}{3}}\|z\|^{\frac{1}{3}},\|y\|^{\frac{1}{3}}\|z\|^{\frac{2}{3}}\}$.

证明 设

$$\phi_1(\lambda,\mu):=\frac{\lambda^{\frac{2}{3}}-\mu^{\frac{2}{3}}}{2},\quad \phi_2(\lambda,\mu):=\mu^{-\frac{1}{3}}-\lambda^{-\frac{1}{3}},$$

且

$$\phi_3(\lambda,\mu):=\begin{cases}\phi_1(\lambda,\mu)/\phi_2(\lambda,\mu), & \lambda,\mu>0;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

由定理 1 中的证明可得 $\phi_1,\phi_2\in\mathfrak{A}$. 我们只需证明 $\phi_3\in\mathfrak{A}$ 即可. 因为 y,z 为 $\mathcal{M}$ 中的可逆正算子, 所以存在 $\varepsilon>0$ 使得 $Spec(y)\in[\varepsilon,\|y\|]$ 且 $Spec(z)\in[\varepsilon,\|z\|]$. 设 $\lambda\in Spec(y),\mu\in Spec(z)$, 令

$$\phi_3^1(\lambda,\mu):=\int_0^1\frac{\lambda^{\frac{2}{3}}\mu^{\frac{1}{3}}}{2}\mathrm{d}\omega,\quad \phi_3^2(\lambda,\mu):=\int_0^1\frac{\lambda^{\frac{1}{3}}\mu^{\frac{2}{3}}}{2}\mathrm{d}\omega.$$

由于

$$\phi_3(\lambda,\mu)=\frac{\phi_1(\lambda,\mu)}{\phi_2(\lambda,\mu)}=\frac{\lambda^{\frac{2}{3}}\mu^{\frac{1}{3}}+\lambda^{\frac{1}{3}}\mu^{\frac{2}{3}}}{2}=\int_0^1\frac{\lambda^{\frac{2}{3}}\mu^{\frac{1}{3}}}{2}\mathrm{d}\omega+\int_0^1\frac{\lambda^{\frac{1}{3}}\mu^{\frac{2}{3}}}{2}\mathrm{d}\omega.$$

因此 $\phi_3(\lambda,\mu)=\phi_3^1(\lambda,\mu)+\phi_3^2(\lambda,\mu)$,

$\int_0^1\frac{1}{2}\sup\limits_{\lambda\in Spec(y)}|\lambda^{\frac{2}{3}}|\sup\limits_{\mu\in Spec(z)}|\mu^{\frac{1}{3}}|\mathrm{d}\omega<\infty$ 和 $\int_0^1\frac{1}{2}\sup\limits_{\lambda\in Spec(y)}|\lambda^{\frac{1}{3}}|\sup\limits_{\mu\in Spec(z)}|\mu^{\frac{2}{3}}|\mathrm{d}\omega<\infty$.

从而 $\phi_3^1,\phi_3^2\in\mathfrak{A}$. 即 $\phi_3\in\mathfrak{A}$. 进而应用引理 1 可得

$$\|T_{\phi_3,E}^{y,z}\|_E\le\frac{1}{2}(\|y\|^{\frac{2}{3}}\|z\|^{\frac{1}{3}}+\|y\|^{\frac{1}{3}}\|z\|^{\frac{2}{3}})\le C_1,$$

其中 $C_1=\max\{\|y\|^{\frac{2}{3}}\|z\|^{\frac{1}{3}},\|y\|^{\frac{1}{3}}\|z\|^{\frac{2}{3}}\}$. 结合等式 (6) 和 (7) 可知, 对于任意的 $x\in E$, 有

$$\|\frac{y^{\frac{2}{3}}x-xz^{\frac{2}{3}}}{2}\|_E=\|T_{\phi_3,E}^{y,z}(y^{-\frac{1}{3}}x-xz^{-\frac{1}{3}})\|_E\le C_1\|xz^{-\frac{1}{3}}-y^{-\frac{1}{3}}x\|_E.$$

通过与定理 1 相类似的讨论, 分别用 $f_{r,r_1}(s)=\frac{\cosh(s(1-2r))}{\cosh(s)+\frac{2r_1}{1-2r_1}}$ 与 $f_{r,\alpha(r)}(s)=\frac{\cosh(s(1-2r))}{\cosh(s)+\frac{1-\alpha(r)}{\alpha(r)}}$ 替代定理 1 中的 $f_{r,t}(s)=\frac{\cosh(s(1-r))}{\cosh(s)+\frac{t}{2}}$, 可知下述结论成立.

定理 6 设 $E\subseteq L_0(\mathcal{M})$ 是一个完全对称算子空间且 y,z 为 $\mathcal{M}$ 中的可逆正算子, $r\in[0,1]$.

(1) 若 $r_1=\min\{r,\frac{1}{2}-r\}$, 则

$$\|y^rxz^{1-r}+y^{1-r}xz^r\|_E\le\|4r_1y^{\frac{1}{2}}xz^{\frac{1}{2}}+(1-2r_1)(yx+xz)\|_E,\quad x\in E.$$

(2) 若 $\alpha(r)=1-4(r-r^2)$, 则

$$\|\frac{y^rxz^{1-r}+y^{1-r}xz^r}{2}\|_E\le\|(1-\alpha(r))y^{\frac{1}{2}}xz^{\frac{1}{2}}+\alpha(r)\frac{yx+xz}{2}\|_E,\quad x\in E.$$

(下转第 591 页)