

路和圈、圈和圈的 Kronecker 积图的超点连通性*

吴丽芸, 田应智[†]

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

摘要: 如果图 G 的每一个最小点割都是某个点的邻点集, 那么 G 是超点连通的, 或者简称为是 $\text{super-}\kappa$ 的. 图 G_1 与 G_2 的 Kronecker 积图是一个点集为 $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$, 边集为 $E(G_1 \times G_2) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) : u_1 u_2 \in E(G_1), v_1 v_2 \in E(G_2)\}$ 的图. 本文证明了对整数 $m \geq 4$ 和奇数 $n \geq 3$, $P_m \times C_n$ 是超点连通的; 对整数 $m \geq 5$ 和奇数 $n \geq 3$, $C_m \times C_n$ 是超点连通的.

关键词: Kronecker 积; 点连通度; 极大点连通性; 超点连通性

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2021.02.17.0001

中图分类号: O157.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2022)02-0176-06

引文格式: 吴丽芸, 田应智. 路和圈、圈和圈的 Kronecker 积图的超点连通性[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2022, 39(2): 176-181.

英文引文格式: WU Liyun, TIAN Yingzhi. Super connected Kronecker products of paths, cycles and cycles[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2022, 39(2): 176-181.

Super Connected Kronecker Products of Paths, Cycles and Cycles

WU Liyun, TIAN Yingzhi

(School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China)

Abstract: A graph G is super connected, or simply $\text{super-}\kappa$, if every minimum vertex-cut isolates a vertex. The Kronecker product $G_1 \times G_2$ of graphs G_1 and G_2 is the graph with vertex set $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ and edge set $E(G_1 \times G_2) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) : u_1 u_2 \in E(G_1), v_1 v_2 \in E(G_2)\}$. In this paper, we prove that $P_m \times C_n$ is $\text{super-}\kappa$ for $m \geq 4$, $n \geq 3$ and n is odd; $C_m \times C_n$ is $\text{super-}\kappa$ for $m \geq 5$, $n \geq 3$ and n is odd.

Key words: Kronecker product; connectivity; maximal connectedness; super connectedness

0 引言

本文主要研究的是无自环和平行边的有限无向图. 设 G 是一个点集为 $V(G)$, 边集为 $E(G)$ 的图. 对于 $V(G)$ 中的每一个点 $v \in V(G)$, $N(v) = N_G(v)$ 表示与点 v 相邻的所有的点的集合, 并且 $d_G(v) = |N_G(v)|$ 称为图 G 中点 v 的度数. $\delta(G)$ 表示图 G 的最小度. 若对 $V(G)$ 中任意一点 v 都有 $d_G(v) = k$, 那么图 G 是 k -正则的. 此外, 若 $V' \subseteq V(G)$, 那么 $G[V']$ 是 G 的由 V' 导出的子图. 未定义的术语和符号可参阅文献 [1].

设 S 是点集 $V(G)$ 的一个子集, 如果 $G - S$ 不连通, 那么称 S 是图 G 的点割. 图 G 的连通度 $\kappa(G)$ 是最小非负整数 k , 使得有 $S \subset V(G)$ 满足 $|S| = k$ 且 $G - S$ 不连通或 $G - S$ 是平凡图 K_1 . 众所周知, $\kappa(G) \leq \delta(G)$. 因此, 当 $\kappa(G) = \delta(G)$ 时, 我们称 G 是极大点连通的. 若图 G 的每一个最小点割都是某个点的邻点集, 那么 G 是超点连通的, 或者简称为是 $\text{super-}\kappa$ 的. 由定义可知, 若图 G 是超点连通的, 则 G 一定是极大点连通的; 反过来不一定成立, 比如对于整数 $k \geq 3$, C_{2k} 是极大点连通的但不是超点连通的.

图 G_1 与 G_2 的 Kronecker 积图是一个点集为 $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$, 边集为 $E(G_1 \times G_2) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) : u_1 u_2 \in E(G_1), v_1 v_2 \in E(G_2)\}$ 的图. 文献 [2] 研究了两个完全图的 Kronecker 积图的点连通度. 文献 [3] 给出了二部图和完全图的 Kronecker 积图的点连通度. 文献 [4] 和文献 [5] 分别独立地证明了文献 [3] 中所提出的关于非

* 收稿日期: 2021-02-17

基金项目: 国家自然科学基金(11861066); 新疆天山青年项目(2018Q066).

作者简介: 吴丽芸(1995-), 女, 硕士生, 从事图论及其应用研究, E-mail: wly95954@163.com.

[†] 通讯作者: 田应智(1983-), 男, 博士, 教授, 从事图论及其应用研究, E-mail: tianyzhxj@163.com.

平凡图与一个完全图的 Kronecker 积图的点连通度的猜想是成立的, 即: $\kappa(G \times K_n) = \min\{n\kappa(G), (n-1)\delta(G)\}$, 其中 $n \geq 3$. 文献 [6] 证明了若 G 是一个极大连通二部图, 那么 $G \times K_n$ ($n \geq 3$) 是超点连通的. 文献 [7] 证明了两个完全图, 路和完全图, 圈和完全图的 Kronecker 积图是超点连通的. 进一步, 文献 [8] 证明了对任一极大连通图 G , 除了 $G \times K_n \cong K_{m,m} \times K_3$ ($m \geq 1$), $G \times K_n$ ($n \geq 3$) 是超点连通的. 之后, 文献 [9] 证明了 $G \times K_n$ ($n \geq 3$) 不是超点连通的当且仅当 $\kappa(G \times K_n) = n\kappa(G)$, 其中 $n \geq 3$ 或 $G \times K_n \cong K_{l,l} \times K_3$ ($l > 0$). 与 Kronecker 积图相关的其他结论可以参阅文献 [10-11].

除了 Kronecker 积图, 乘积图中受到关注最多的是笛卡尔积图. 与笛卡尔积图相关的连通性的研究结果可以参阅文献 [12-18].

现在, 列出一些关于 Kronecker 积图的性质及结论.

性质 1^[19] 设 $G = G_1 \times G_2 = (V(G), E(G))$, 那么

$$(1) |V(G)| = |V(G_1)| \cdot |V(G_2)|,$$

$$(2) |E(G)| = 2|E(G_1)| \cdot |E(G_2)|,$$

$$(3) \text{对任一顶点 } (u, v) \in V(G), d_G(u, v) = d_{G_1}(u) \cdot d_{G_2}(v).$$

定理 1^[20] 若 G_1 与 G_2 是连通图, 那么 $G_1 \times G_2$ 是连通的当且仅当 G_1 与 G_2 中至少有一个图包含奇圈.

1 主要结果

对于两个图 G_1 和 G_2 的 Kronecker 积图, 记 $V_1 = V(G_1) = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$, $V_2 = V(G_2) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. 记 $S_i = \{u_i\} \times V_2$, $i = 1, 2, \dots, m$. 将点 (u_i, v_j) 简记为 ω_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. 那么 $S_i = \{\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{in}\}$, $i = 1, 2, \dots, m$. 因此, 很容易得到 $V_1 \times V_2 = \bigcup_{i=1}^m S_i$. 记 P_m 是有 m 个点的路, C_n 是有 n 个点的圈.

引理 1 对于整数 $m \geq 2$ 和奇数 $n \geq 3$, 有 $\kappa(P_m \times C_n) = 2$.

证明 令 $G = P_m \times C_n$. 当 $m = 2$ 时, 可验证 $G = P_2 \times C_n \cong C_{2n}$, 所以 $\kappa(G) = \kappa(C_{2n}) = 2$.

当 $m \geq 3$ 时. 显然, $\kappa(G) \leq \delta(G) = \delta(P_m) \cdot \delta(C_n) = 2$.

假设 S 是 G 的一个点割集且 $|S| < 2$, 即 $|S| = 1$. 不妨假设 $S = \{\omega_{ij}\}$.

当 $i = 1$ (或 $i = m$) 时. 因为 $P_m[\{u_2, \dots, u_m\}] \times C_n$ 是连通的 (当 $i = m$ 时, $P_m[\{u_1, \dots, u_{m-1}\}] \times C_n$ 是连通的), 并且 $S_1 - S$ 中的每一个点在 S_2 中都存在邻点 (当 $i = m$ 时, $S_m - S$ 中的每一个点在 S_{m-1} 中都存在邻点), 那么 $G - S$ 是连通的, 与假设矛盾.

当 $i = 2$ (或 $i = m - 1$) 时. 若 $m = 3$, 由于 $P_3[\{u_1, u_2\}] \times C_n - S$ 与 $P_3[\{u_2, u_3\}] \times C_n - S$ 都是连通的, 并且 $V(P_3[\{u_1, u_2\}] \times C_n - S) \cap V(P_3[\{u_2, u_3\}] \times C_n - S) = S_2 - S$, 所以通过 $S_2 - S$ 可知 $P_3 \times C_n - S$ 是连通的, 与假设矛盾. 若 $m \geq 4$, 由于 $P_m[\{u_1, u_2\}] \times C_n - S$ 与 $P_m[\{u_3, \dots, u_m\}] \times C_n$ 都是连通的 (当 $i = m - 1$, $P_m[\{u_{m-1}, u_m\}] \times C_n - S$ 与 $P_m[\{u_1, \dots, u_{m-2}\}] \times C_n$ 都是连通的), 并且 $S_2 - S$ 中的点在 S_3 中都存在邻点 (当 $i = m - 1$ 时, $S_{m-1} - S$ 中的点在 S_{m-2} 中都存在邻点), 那么 $G - S$ 是连通的, 与假设矛盾.

当 $3 \leq i \leq m - 2$ 时, 则 $m \geq 5$. 由于 $P_m[\{u_1, \dots, u_{i-1}\}] \times C_n$ 与 $P_m[\{u_{i+1}, \dots, u_m\}] \times C_n$ 都是连通的, 并且 $S_i - S$ 中的每一个点在 S_{i-1} 与 S_{i+1} 中都存在邻点, 那么 $G - S$ 是连通的, 与假设矛盾.

分析上述所有情况, 得到的都是与假设矛盾的结论, 所以 G 中不存在点割集 S 满足 $|S| < 2$. 因此, $\kappa(G) \geq 2$.

又因为已经证明了 $\kappa(G) \leq 2$, 所以可得 $\kappa(G) = 2$.

接下来, 要证明路和圈的 Kronecker 积图的超点连通性. 当 $m = 2$ 时, $P_2 \times C_n$ 同构于 C_{2n} 不是超点连通的. 当整数 $m \geq 3$, $n = 3$ 时, 由文献 [7] 中定理 2.4 知 $P_m \times C_3$ 是超点连通的. 当 $m = 3$, n 是大于等于 5 的奇数时, 取 $S = \{\omega_{2j}, \omega_{2(j+1)}\}$ (当 $j = n$ 时, $j + 1 = 1$), 此时 $P_3 \times C_n - S$ ($n \geq 5$) 是不连通且不包含孤立点的. 因此, $P_3 \times C_n$ ($n \geq 5$) 不是超点连通的. 所以, 下面主要考虑整数 $m \geq 4$ 且奇数 $n \geq 3$ 时的情况.

定理 2 若整数 $m \geq 4$, 奇数 $n \geq 3$, 那么 $G = P_m \times C_n$ 是超点连通的.

证明 若整数 $m \geq 4$, $n = 3$, 由文献 [7] 中定理 2.4 知 $P_m \times C_3$ 是超点连通的. 接下来, 只需考虑整数 $m \geq 4$ 且奇数 $n \geq 5$ 时的情况.

假设 G 不是超点连通的, 则存在 G 的一个点割集 S 满足 $|S| = 2$, 使得 $G - S$ 不连通且不包含孤立点. 不妨假设 $S = \{\omega_{ij}, \omega_{kl}\}$, 且 $i \leq k$.

情形 1 $i = k$.

当 $i = 1$ (或 $i = m$) 时. 因为 $P_m[\{u_2, \dots, u_m\}] \times C_n$ 是连通的 (当 $i = m$ 时, $P_m[\{u_1, \dots, u_{m-1}\}] \times C_n$ 是连通的), 并且 $S_1 - S$ 中的每一个点在 S_2 中都存在邻点 (当 $i = m$ 时, $S_m - S$ 中的每一个点在 S_{m-1} 中都存在邻点), 所以 $G - S$ 是连通的, 与假设矛盾.

当 $i = 2$ (或 $i = m - 1$) 时. 由于 $P_m[\{u_3, \dots, u_m\}] \times C_n$ 是连通的 (当 $i = m - 1$ 时, $P_m[\{u_1, \dots, u_{m-2}\}] \times C_n$ 是连通的), 并且 $S_2 - S$ 中的每一个点在 S_3 中都存在邻点 (当 $i = m - 1$ 时, $S_{m-1} - S$ 中的每一个点在 S_{m-2} 中都存在邻点), 那么 $P_m[\{u_2, u_3, \dots, u_m\}] \times C_n - S$ 是连通的 (当 $i = m - 1$ 时, $P_m[\{u_1, \dots, u_{m-2}, u_{m-1}\}] \times C_n - S$ 是连通的). 因为 $G - S$ 不包含孤立点, 所以 S_1 中的每一个点在 $S_2 - S$ 中都存在邻点 (当 $i = m - 1$ 时, $S_m - S$ 中的每一个点在 S_{m-1} 中都存在邻点). 因此, $G - S$ 是连通的, 与假设矛盾.

当 $3 \leq i \leq m - 2$ 时, 则 $m \geq 5$. 由于 $P_m[\{u_1, \dots, u_{i-1}\}] \times C_n$ 与 $P_m[\{u_{i+1}, \dots, u_m\}] \times C_n$ 都是连通的, 并且 $S_i - S$ 中的每一个点在 S_{i-1} 与 S_{i+1} 中都存在邻点, 那么 $G - S$ 是连通的, 与假设矛盾.

情形 2 $i < k$.

此时 $|S_i \cap S| = 1, |S_k \cap S| = 1$.

当 $i = 1$ 时. 由于 $\kappa(P_m \times C_n) = 2$, 且 $|S_k \cap S| = 1$, 那么 $P_m[\{u_2, \dots, u_m\}] \times C_n - \omega_{kl}$ 是连通的. 若 $k = 2$, 因为 $S_1 - \{\omega_{ij}\}$ 中的每一个点在 $S_2 - \{\omega_{kl}\}$ 中都存在邻点, 所以 $G - S$ 是连通的, 与假设矛盾. 若 $k \geq 3$, 由于 $S_1 - \{\omega_{ij}\}$ 中的每一个点在 S_2 中都存在邻点, 那么 $G - S$ 是连通的, 与假设矛盾.

当 $2 \leq i \leq m - 2$ 时. 由于 $\kappa(P_m \times C_n) = 2$, 且 $|S_i \cap S| = 1, |S_k \cap S| = 1$, 那么 $P_m[\{u_1, \dots, u_i\}] \times C_n - \omega_{ij}$ 与 $P_m[\{u_{i+1}, \dots, u_k, \dots, u_m\}] \times C_n - \omega_{kl}$ 都是连通的. 若 $k = i + 1$, 因为 $S_i - \{\omega_{ij}\}$ 中的每一个点在 $S_k - \{\omega_{kl}\}$ 中都存在邻点, 所以 $G - S$ 是连通的, 与假设矛盾. 若 $k \geq i + 2$, 由于 $S_i - \{\omega_{ij}\}$ 中的每一个点在 S_{i+1} 中都存在邻点, 那么 $G - S$ 是连通的, 与假设矛盾.

当 $i = m - 1$ 时. 因为 $i < j$, 所以 $j = m$. 由于 $\kappa(P_m \times C_n) = 2$, 且 $|S_i \cap S| = 1$, 那么 $P_m[\{u_1, \dots, u_{m-1}\}] \times C_n - \omega_{ij}$ 是连通的. 因为 $S_m - \{\omega_{kl}\}$ 中的每一个点在 $S_{m-1} - \{\omega_{ij}\}$ 中都存在邻点, 所以 $G - S$ 是连通的, 与假设矛盾.

通过上述情形讨论可得到与假设矛盾的结论, 所以假设不成立. 因此, G 是超点连通的.

下面研究圈和圈的 Kronecker 积图的点连通度.

引理 2 对于整数 $m \geq 3$ 和奇数 $n \geq 3$, 有 $\kappa(C_m \times C_n) = 4$.

证明 令 $G = C_m \times C_n$. 当 $m = 3$ 或 $n = 3$ 时, 由文献 [7] 中引理 2.5 知 $\kappa(C_m \times C_n) = 4$. 所以, 接下来主要考虑大于等于 4 的整数 m 以及大于等于 5 的奇数 n 的情况. 显然, $\kappa(G) \leq \delta(G) = \delta(C_m) \cdot \delta(C_n) = 4$.

假设 S 是 G 的一个点割集且 $|S| < 4$, 即 $|S| \leq 3$.

由于 $P_m \times C_n$ 是 G 的生成子图, 则 $\kappa(G) \geq \kappa(P_m \times C_n) \geq 2$, 从而 $|S| \geq 2$.

当 $|S| = 2$ 时, 若 $G - S$ 不连通, 则 $P_m \times C_n - S$ 也不连通. 由定理 2 可知 S 一定是 $P_m \times C_n$ 中某个最小度点的邻点集, 那么 $G - S$ 是连通的, 与 $G - S$ 不连通矛盾. 因此, $|S| > 2$, 进而 $|S| = 3$.

情形 1 $|S_i \cap S| = |S| = 3$.

记 $C_m - u_i \cong P_{m-1}^i$. 因为 $P_{m-1}^i \times C_n$ 是连通的, 并且 $S_i - S$ 中的每一个点在 S_{i-1} 与 S_{i+1} (当 $i = 1$ 时, $i - 1 = m$; 当 $i = m$ 时, $i + 1 = 1$) 中都存在邻点, 那么 $G - S$ 是连通的, 与假设矛盾.

情形 2 $|S_i \cap S| = 1, |S_k \cap S| = 2$.

不妨假设 $i < k$. 记 $C_m - u_k \cong P_{m-1}^k, S_i \cap S = \{\omega_{ij}\}$. 由于 $\kappa(P_{m-1}^k \times C_n) = 2$, 且 $|S_i \cap S| = 1$, 那么 $P_{m-1}^k \times C_n - \omega_{ij}$ 是连通的. 因为 $S_k - S$ 中的每一个点在 $S_{k-1} - S$ 与 $S_{k+1} - S$ (当 $k = 1$ 时, $k - 1 = m$; 当 $k = m$ 时, $k + 1 = 1$) 中都存在 2 个邻点, 而 $|S_{k-1} - S| = 0$ 或 1, $|S_{k+1} - S| = 0$ 或 1, 所以 $G - S$ 是连通的, 与假设矛盾.

情形 3 $|S_i \cap S| = 1, |S_k \cap S| = 1, |S_p \cap S| = 1$.

不妨假设 $i < k < p$. 记 $S_i \cap S = \{\omega_{ij}\}, S_k \cap S = \{\omega_{kl}\}, S_p \cap S = \{\omega_{pq}\}$.

由于 $m \geq 4$, 那么 $u_i u_k, u_k u_p, u_p u_i$ 不可能都是 C_m 中的边, 不妨假设 $u_p u_i \notin E(C_m)$, 则 $P_m[\{u_{k+1}, \dots, u_p, \dots, u_m, u_1, \dots, u_{i-1}\}] \times C_n - \omega_{pq}$ 是连通的.

子情形 3.1 $k = i + 1$.

若 $v_j v_l \in E(C_n)$, 那么 $P_m[\{u_i, u_k\}] \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}\}$ 是连通的. 当 $p = k + 1$ 时, 因为 $S_p - \{\omega_{pq}\}$ 中的每一个点

在 $S_k - \{\omega_{kl}\}$ 中都存在邻点, 所以 $G - S$ 是连通的, 与假设矛盾. 当 $k+2 \leq p \leq i-2$ 时, 由于 $S_k - \{\omega_{kl}\}$ 中的每一个点在 S_{k+1} 中都存在邻点, 那么 $G - S$ 是连通的, 与假设矛盾.

若 $v_j v_i \notin E(C_n)$, 那么 $P_m[\{u_i, u_k\}] \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}\}$ 不连通且不包含孤立点. 因为 $P_m[\{u_{i-1}, u_i\}] \times C_n - \omega_{ij}$ 是连通的, 且 $S_k - \{\omega_{kl}\}$ 中的每一个点在 $S_i - \{\omega_{ij}\}$ 中都存在邻点, 所以 $P_m[\{u_{i-1}, u_i, u_k\}] \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}\}$ 连通. 由于 $S_k - S$ 中的每一个点在 $S_{k+1} - S$ (当 $k = m$ 时, $k+1 = 1$) 中都存在 2 个邻点, 而 $|S_{k+1} - S| = 0$ 或 1, 那么 $G - S$ 是连通的, 与假设矛盾.

子情形 3.2 $k \geq i+2$.

当 $k = i+2$ 时, 此时 $i+1 = k-1$. 因为 $\kappa(P_m \times C_n) = 2$, 且 $|S_i \cap S| = 1$, $|S_k \cap S| = 1$, 所以 $P_m[\{u_i, u_{i+1}\}] \times C_n - \omega_{ij}$ 和 $P_m[\{u_{i+1}, u_k\}] \times C_n - \omega_{kl}$ 都是连通的. 由于 $V(P_m[\{u_i, u_{i+1}\}] \times C_n - \omega_{ij}) \cap V(P_m[\{u_{i+1}, u_k\}] \times C_n - \omega_{kl}) = S_{i+1}$, 那么通过 S_{i+1} 可知 $P_m[\{u_i, u_{i+1}, u_k\}] \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}\}$ 是连通的. 当 $k \geq i+3$ 时, 由定理 2 可知 $P_m[\{u_i, \dots, u_k\}] \times C_n$ 是超点连通的, 因为 $\{\omega_{ij}, \omega_{kl}\}$ 不是 $P_m[\{u_i, \dots, u_k\}] \times C_n$ 中某个最小度点的邻点集, 所以 $P_m[\{u_i, \dots, u_k\}] \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}\}$ 是连通的. 因此, 当 $|P_m[\{u_i, \dots, u_k\}]| \geq 3$ 时, $P_m[\{u_i, \dots, u_k\}] \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}\}$ 是连通的.

若 $p = k+1$. 因为 $S_p - \{\omega_{pq}\}$ 中的每一个点在 $S_k - \{\omega_{kl}\}$ 中都存在邻点, 所以 $G - S$ 是连通的, 与假设矛盾.

若 $k+2 \leq p \leq i-2$. 由于 $S_k - \{\omega_{kl}\}$ 中的每一个点在 S_{k+1} 中都存在邻点, 那么 $G - S$ 是连通的, 与假设矛盾.

分析上述所有情况, 得到的都是与假设矛盾的结论, 所以 G 中不存在点割集 S 满足 $|S| < 4$. 因此, $\kappa(G) \geq 4$.

又因为已经证明了 $\kappa(G) \leq 4$, 所以可得 $\kappa(G) = 4$.

接下来, 刻画的是圈和圈的 Kronecker 积图的超点连通性. 当 $m = 3, n = 3$ 时, 由文献 [7] 中定理 2.6 可知 $C_3 \times C_3$ 是超点连通的. 当 $m = 4, n = 3$ 时, 由文献 [9] 可知 $C_4 \times C_3 \cong K_{2,2} \times K_3$ 不是超点连通的. 当 $m = 4$, 奇数 $n \geq 5$ 时, 取 $S = V(C_4) \times \{v_j\}$, 那么 $C_4 \times C_n - S$ ($n \geq 5$) 不连通且不包含孤立点. 因此, $C_4 \times C_n$ ($n \geq 5$) 不是超点连通的. 所以, 下面主要考虑大于等于 5 的整数 m 以及大于等于 3 的奇数 n 的情况.

定理 3 若整数 $m \geq 5$, 奇数 $n \geq 3$, 那么 $G = C_m \times C_n$ 是超点连通的.

证明 若整数 $m \geq 5, n = 3$, 由文献 [7] 中定理 2.6 知 $C_m \times C_3$ 是超点连通的. 接下来, 只需讨论整数 $m \geq 5$ 且奇数 $n \geq 5$ 时的情况.

假设 G 不是超点连通的, 则存在 G 的一个点割集 S 满足 $|S| = 4$, 使得 $G - S$ 不连通且不包含孤立点.

情形 1 $|S_i \cap S| = 4$.

记 $C_m - u_i \cong P_{m-1}^i$. 因为 $P_{m-1}^i \times C_n$ 是连通的, 并且 $S_i - S$ 中的每一个点在 S_{i-1} 与 S_{i+1} (当 $i = 1$ 时, $i-1 = m$; 当 $i = m$ 时, $i+1 = 1$) 中都存在邻点, 那么 $G - S$ 是连通的, 与假设矛盾.

情形 2 $|S_i \cap S| = 1, |S_k \cap S| = 3$.

不妨假设 $i < k$. 记 $C_m - u_k \cong P_{m-1}^k, S_i \cap S = \{\omega_{ij}\}$. 由于 $\kappa(P_{m-1}^k \times C_n) = 2$, 且 $|S_i \cap S| = 1$, 那么 $P_{m-1}^k \times C_n - \omega_{ij}$ 是连通的. 因为 $S_k - S$ 中的每一个点在 $S_{k-1} - S$ 与 $S_{k+1} - S$ (当 $k = 1$ 时, $k-1 = m$; 当 $k = m$ 时, $k+1 = 1$) 中都存在 2 个邻点, 而 $|S_{k-1} - S| = 0$ 或 1, $|S_{k+1} - S| = 0$ 或 1, 所以 $G - S$ 是连通的, 与假设矛盾.

情形 3 $|S_i \cap S| = 2, |S_k \cap S| = 2$.

不妨假设 $i < k$.

子情形 3.1 $u_i u_k \in E(C_m)$.

记 $C_m - u_i - u_k \cong P_{m-2}^{ik}$. 因为 $P_{m-2}^{ik} \times C_n$ 是连通的, $S_i - S$ 中的每一个点在 S_{i-1} (当 $i = 1$ 时, $i-1 = m$) 中都存在邻点, 且 $S_k - S$ 中的每一个点在 S_{k+1} (当 $k = m$ 时, $k+1 = 1$) 中都存在邻点, 那么 $G - S$ 是连通的, 与假设矛盾.

子情形 3.2 $u_i u_r, u_r u_k \in E(C_m)$.

若 S_r 中存在某个点 ω_{rt} , 该点在 S_i 与 S_k 中的邻点集恰巧分别是 $S_i \cap S$ 与 $S_k \cap S$, 那么 $G - S$ 存在孤立点, 与假设矛盾. 因此, S_r 中的每个点在 $S_i \cup S_k - S$ 中至少存在一个邻点. 因为 $|S_i \cap S| = 2, |S_k \cap S| = 2$, 所以 S_r 中至多存在一个点 $\omega_{rt'}$, 该点在 $S_i - S$ 或 $S_k - S$ 中不存在邻点, 不妨假设该点在 $S_i - S$ 中不存在邻点, 那么该点在 $S_k - S$ 中存在邻点. 由于 $P_{m-1}^k \times C_n - (S_i \cap S) \cup \{\omega_{rt'}\}$ 是连通的, $S_k - S$ 中的每一个点在 S_{k+1} (当 $k = m$ 时, $k+1 = 1$) 中都存在邻点, 而且 $S_k - S$ 中存在 $\omega_{rt'}$ 的邻点, 那么 $G - S$ 是连通的, 与假设矛盾. 若 S_r 中的每一个点在 $S_i - S$ 中都存在邻点, 那么 $P_{m-1}^k \times C_n - (S_i \cap S)$ 是连通的. 由于 $S_k - S$ 中的每一个点在 S_{k+1} (当 $k = m$ 时,

$k+1=1$) 中都存在邻点, 那么 $G-S$ 是连通的, 与假设矛盾.

子情形 3.3 在 C_m 中, u_i 到 u_k 的最短路长大于 2. 因为 $P_m[\{u_{i+1}, \dots, u_{k-1}\}] \times C_n$ 与 $P_m[\{u_{k+1}, \dots, u_m, u_1, \dots, u_{i-1}\}] \times C_n$ 都是连通的, 并且 S_i-S 中的每一个点在 S_{i-1} 与 S_{i+1} (当 $i=1$ 时, $i-1=m$; 当 $i=m$ 时, $i+1=1$) 中都存在邻点, S_k-S 中的每一个点在 S_{k-1} 与 S_{k+1} (当 $k=1$ 时, $k-1=m$; 当 $k=m$ 时, $k+1=1$) 中都存在邻点, 所以 $G-S$ 是连通的, 与假设矛盾.

情形 4 $|S_i \cap S| = 1, |S_k \cap S| = 1, |S_p \cap S| = 2$

不妨假设 $i < k < p$. 记 $C_m - u_p \cong P_{m-1}^p, S_i \cap S = \{\omega_{ij}\}, S_k \cap S = \{\omega_{kl}\}$.

由定理 2 可知 $P_{m-1}^p \times C_n$ 是超点连通的, 因为 $\{\omega_{ij}, \omega_{kl}\}$ 不是 $P_{m-1}^p \times C_n$ 中某个最小度点的邻点集, 所以 $P_{m-1}^p \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}\}$ 是连通的. 由于 S_p-S 中的每一个点在 $S_{p-1}-S$ 与 $S_{p+1}-S$ (当 $p=1$ 时, $p-1=m$; 当 $p=m$ 时, $p+1=1$) 中都存在 2 个邻点, 且 $|S_{p-1}-S|=0$ 或 1, $|S_{p+1}-S|=0$ 或 1, 那么 $G-S$ 是连通的, 与假设矛盾.

情形 5 $|S_i \cap S| = 1, |S_k \cap S| = 1, |S_p \cap S| = 1, |S_x \cap S| = 1$.

不妨假设 $i < k < p < x$. 记 $S_i \cap S = \{\omega_{ij}\}, S_k \cap S = \{\omega_{kl}\}, S_p \cap S = \{\omega_{pq}\}, S_x \cap S = \{\omega_{xy}\}$.

由于 $m \geq 5$, 那么 $u_i u_k, u_k u_p, u_p u_x, u_x u_i$ 不可能都是 C_m 中的边, 不妨假设 $u_x u_i \notin E(C_m)$, 则 $P_m[\{u_{p+1}, \dots, u_x, \dots, u_m, u_1, \dots, u_{i-1}\}] \times C_n - \omega_{xy}$ 是连通的.

子情形 5.1 $k = i + 1, p = k + 1$.

若 $v_j v_l \in E(C_n)$ 或 $v_l v_q \in E(C_n)$, 那么 $P_m[\{u_i, u_k\}] \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}\}$ 或 $P_m[\{u_k, u_p\}] \times C_n - \{\omega_{kl}, \omega_{pq}\}$ 是连通的. 因为 $S_p - \{\omega_{pq}\}$ 中的每一个点在 $S_k - \{\omega_{kl}\}$ 中都存在邻点, 且 $S_i - \{\omega_{ij}\}$ 中的每一个点在 $S_k - \{\omega_{kl}\}$ 中都存在邻点, 所以 $P_m[\{u_i, u_k, u_p\}] \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}, \omega_{pq}\}$ 是连通的.

当 $x = p + 1$ (或 $i - 1$) 时, 因为 $S_{p+1} - \{\omega_{xy}\}$ 中的每一个点在 $S_p - \{\omega_{pq}\}$ 中都存在邻点 (当 $x = i - 1$ 时, $S_{i-1} - \{\omega_{xy}\}$ 中的每一个点在 $S_i - \{\omega_{ij}\}$ 中都存在邻点), 所以 $G-S$ 是连通的, 与假设矛盾.

当 $p + 2 \leq x \leq i - 2$ 时, 因为 $S_p - \{\omega_{pq}\}$ 中的每一个点在 S_{p+1} 中都存在邻点, 所以 $G-S$ 是连通的, 与假设矛盾.

若 $v_j v_l \notin E(C_n)$, 且 $v_l v_q \notin E(C_n)$, 那么 $P_m[\{u_i, u_k\}] \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}\}$ 和 $P_m[\{u_k, u_p\}] \times C_n - \{\omega_{kl}, \omega_{pq}\}$ 均不连通且不包含孤立点. 当 $j = q$ 时, $P_m[\{u_i, u_k, u_p\}] \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}, \omega_{pq}\}$ 不连通且不包含孤立点. 当 $j \neq q$ 时, 因为 $S_p - \{\omega_{pq}\}$ 中的每一个点在 $S_k - \{\omega_{kl}\}$ 中都存在邻点, 并且 $S_p - \{\omega_{pq}\}$ 可将 $P_m[\{u_i, u_k\}] \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}\}$ 中的各连通分支连接起来, 所以 $P_m[\{u_i, u_k, u_p\}] \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}, \omega_{pq}\}$ 是连通的.

由于已经讨论了 $P_m[\{u_i, u_k, u_p\}] \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}, \omega_{pq}\}$ 是连通时的情况, 所以接下来我们分析 $j = q$ 时, $P_m[\{u_i, u_k, u_p\}] \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}, \omega_{pq}\}$ 不连通且不包含孤立点的情况.

当 $x = p + 1$ (或 $x = i - 1$) 时, 因为 $P_m[\{u_{i-1}, u_i\}] \times C_n - \omega_{ij}$ 是连通的 (当 $x = i - 1$ 时, $P_m[\{u_p, u_{p+1}\}] \times C_n - \omega_{pq}$ 是连通的), 所以通过 S_{i-1} 可将 $P_m[\{u_i, u_k, u_p\}] \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}, \omega_{pq}\}$ 中的各连通分支连接起来 (当 $x = i - 1$ 时, 通过 S_{p+1} 可将 $P_m[\{u_i, u_k, u_p\}] \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}, \omega_{pq}\}$ 中的各连通分支连接起来), 从而可以得到 $P_m[\{u_{i-1}, u_i, u_k, u_p\}] \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}, \omega_{pq}\}$ 是连通的 (当 $x = i - 1$ 时, 可以得到 $P_m[\{u_i, u_k, u_p, u_{p+1}\}] \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}, \omega_{pq}\}$ 是连通的). 由于 S_{i-1} 将连通的 $P_m[\{u_{p+1}, \dots, u_x, \dots, u_m, u_1, \dots, u_{i-1}\}] \times C_n - \omega_{xy}$ 与 $P_m[\{u_{i-1}, u_i, u_k, u_p\}] \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}, \omega_{pq}\}$ 连接起来 (当 $x = i - 1$ 时, S_{p+1} 将连通的 $P_m[\{u_{p+1}, \dots, u_x, \dots, u_m, u_1, \dots, u_{i-1}\}] \times C_n - \omega_{xy}$ 与 $P_m[\{u_i, u_k, u_p, u_{p+1}\}] \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}, \omega_{pq}\}$ 连接起来), 那么 $G-S$ 是连通的, 与假设矛盾.

当 $p + 2 \leq x \leq i - 2$ 时, 因为 $P_m[\{u_p, u_{p+1}\}] \times C_n - \omega_{pq}$ 是连通的, 所以通过 S_{p+1} 可将 $P_m[\{u_i, u_k, u_p\}] \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}, \omega_{pq}\}$ 中的各连通分支连接起来. 因此, $P_m[\{u_i, u_k, u_p, u_{p+1}\}] \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}, \omega_{pq}\}$ 是连通的. 由于 $V(P_m[\{u_i, u_k, u_p, u_{p+1}\}] \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}, \omega_{pq}\}) \cap V(P_m[\{u_{p+1}, \dots, u_x, \dots, u_m, u_1, \dots, u_{i-1}\}] \times C_n - \omega_{xy}) = S_{p+1}$, 那么通过 S_{p+1} 可得 $G-S$ 是连通的, 与假设矛盾.

子情形 5.2 $k = i + 1, p \geq k + 2$.

此时 $|P_m[\{u_k, \dots, u_p\}]| \geq 3$, 由引理 2 的证明中的子情形 3.2 可知, 此时 $|P_m[\{u_k, \dots, u_p\}]| \geq 3$, 由引理 2 的证明中的子情形 3.2 知 $P_m[\{u_k, \dots, u_p\}] \times C_n - \{\omega_{kl}, \omega_{pq}\}$ 是连通的. 由于 $S_i - \{\omega_{ij}\}$ 中的每一个点在 $S_k - \{\omega_{kl}\}$ 中都存在邻点, 那么 $P_m[\{u_i, u_k, \dots, u_p\}] \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}, \omega_{pq}\}$ 是连通的.

若 $x = p + 1$ (或 $i - 1$), 因为 $S_{p+1} - \{\omega_{xy}\}$ 中的每一个点在 $S_p - \{\omega_{pq}\}$ 中都存在邻点 (当 $x = i - 1$ 时,

$S_{i-1} - \{\omega_{xy}\}$ 中的每一个点在 $S_i - \{\omega_{ij}\}$ 中都存在邻点), 所以 $G - S$ 是连通的, 与假设矛盾.

若 $p+2 \leq x \leq i-2$, 因为 $S_p - \{\omega_{pq}\}$ 中的每一个点在 S_{p+1} 中都存在邻点, 所以 $G - S$ 是连通的, 与假设矛盾.

子情形 5.3 $k \geq i+2, p = k+1$.

由 C_m 的对称性, 类似于子情形 5.2, 可得 $G - S$ 是连通的, 与假设矛盾.

子情形 5.4 $k \geq i+2, p \geq k+2$.

此时 $|P_m[\{u_i, \dots, u_k\}]| \geq 3, |P_m[\{u_k, \dots, u_p\}]| \geq 3$, 那么 $P_m[\{u_i, \dots, u_k\}] \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}\}$ 与 $P_m[\{u_k, \dots, u_p\}] \times C_n - \{\omega_{kl}, \omega_{pq}\}$ 都是连通的. 因为 $V(P_m[\{u_i, \dots, u_k\}] \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}\}) \cap V(P_m[\{u_k, \dots, u_p\}] \times C_n - \{\omega_{kl}, \omega_{pq}\}) = S_k - \{\omega_{kl}\}$, 所以通过 $S_k - \{\omega_{kl}\}$ 可知 $P_m[\{u_i, \dots, u_k, \dots, u_p\}] \times C_n - \{\omega_{ij}, \omega_{kl}, \omega_{pq}\}$ 是连通的.

若 $x = p+1$ (或 $i-1$), 因为 $S_{p+1} - \{\omega_{xy}\}$ 中的每一个点在 $S_p - \{\omega_{pq}\}$ 中都存在邻点 (当 $x = i-1$ 时, $S_{i-1} - \{\omega_{xy}\}$ 中的每一个点在 $S_i - \{\omega_{ij}\}$ 中都存在邻点), 所以 $G - S$ 是连通的, 与假设矛盾.

若 $p+2 \leq x \leq i-2$, 因为 $S_p - \{\omega_{pq}\}$ 中的每一个点在 S_{p+1} 中都存在邻点, 所以 $G - S$ 是连通的, 与假设矛盾.

通过上述情形讨论可得到与假设矛盾的结论, 所以假设不成立. 因此, G 是超点连通的.

参考文献:

- [1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory[M]. Berlin: Springer, 2008.
- [2] MAMUT A, VUMAR E. Vertex vulnerability parameters of Kronecker products of complete graphs[J]. Information Processing Letters, 2008, 106(6): 258-262.
- [3] GUJI R, VUMAR E. A note on the connectivity of Kronecker products of graphs[J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22(9): 1360-1363.
- [4] WANG Y, WU B Y D R. Proof of a conjecture on connectivity of Kronecker product of graphs[J]. Discrete Mathematics, 2011, 311(21): 2563-2565.
- [5] WANG W, XUE N N. Connectivity of direct products of graphs[J]. Ars Combinatoria, 2011, 100: 107-111.
- [6] GUO L T, QIN C F, GUO X F. Super connectivity of Kronecker products of graphs[J]. Information Processing Letters, 2010, 110(16): 659-661.
- [7] GUO L T, GUO X F. Super connectivity of Kronecker products of some graphs[J]. Ars Combinatoria, 2015, 123: 65-73.
- [8] WANG H C, SHAN E F, WANG W. On the super connectivity of Kronecker products of graphs[J]. Information Processing Letters, 2012, 112(10): 402-405.
- [9] ZHOU J X. Super connectivity of direct product of graphs[J]. Ars Mathematica Contemporanea, 2015, 8(2): 235-244.
- [10] HOJI M, VUMAR E. Some vertex vulnerability parameters of Kronecker products of complete graphs[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition), 2010, 27(3): 276-279.
- [11] GUJI R. A note on the toughness and edge-toughness of Kronecker product of graphs[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition), 2016, 33(4): 407-410.
- [12] CHIUE W S, SHIEH B S. On connectivity of the Cartesian product of two graphs[J]. Applied Mathematics and Computation, 1999, 102(2/3): 129-137.
- [13] XU J M, YANG C. Connectivity of Cartesian product graphs[J]. Discrete Mathematics, 2006, 306(1): 159-165.
- [14] ŠPACAPAN S. Connectivity of Cartesian products of graphs[J]. Applied Mathematics Letters, 2008, 21(7): 682-685.
- [15] LYU M, WU C, CHEN G L, et al. On super connectivity of Cartesian product graphs[J]. Networks, 2008, 52(2): 78-87.
- [16] TIAN Y Z, MENG J X. Restricted connectivity for some interconnection networks[J]. Graphs and Combinatorics, 2015, 31(5): 1727-1737.
- [17] CHEN L H, MENG J X, TIAN Y Z. Cyclic vertex connectivity of Cartesian product graphs[J]. Chinese Annals of Mathematics, 2016, 37(2): 155-170.
- [18] QIN D J, TIAN Y Z, CHEN L H, et al. Cyclic vertex-connectivity of Cartesian product graphs[J]. International Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems, 2019, 1659259: 10.
- [19] BOTTREAU A, METIVIER Y. Some remarks on the Kronecker product of graphs[J]. Information Processing Letters, 1998, 68(2): 55-61.
- [20] WEICHSEL P M. The Kronecker product of graphs[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1962, 13(1): 47-52.