一类具有消失 χ 曲率的 (α,β)-度量*

麻翠玲[1], 张晓玲[1†], 何 勇[2]

(1. 新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017; 2. 新疆师范大学 数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830053)

摘 要: 在芬斯勒几何中, χ 曲率是由 S 曲率定义的一个重要的非黎曼量. 研究了一类具有消失 χ 曲率的 (α,β)-度量. 首先, 给出了一类 (α,β)-度量的 χ 曲率表达式; 其次得到了其具有消失 χ 曲率的刻画方程; 最后, 构造了一系列具有消失 χ 曲率的 (α,β)-度量.

关键词: (α,β)-度量; S 曲率; χ 曲率; 多项式 (α,β)-度量

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2021.04.09.0001

中图分类号: O186.14 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2022)03-0300-06

引文格式: 麻翠玲, 张晓玲, 何勇. 一类具有消失 χ 曲率的 (α,β)-度量[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2022, 39(3): 300-305.

英文引文格式: MA Cuiling, ZHANG Xiaoling, HE Yong. A class of (α,β)-metrics with vanishing χ curvature[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2022, 39(3): 300-305.

A Class of (α,β)-Metrics with Vanishing χ Curvature

MA Cuiling[1], ZHANG Xiaoling[1†], HE Yong[2]

(*1. School of Mathematics and Systems Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China;*

2. Department of Mathematics, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang 830053, China)

Abstract: In Finsler geometry, χ curvature is a significant non-Riemannian quantity, which is defined by S curvature. In this paper, we studied a class of (α,β)-metrics with vanishing χ curvature. Firstly, we gave the formula of χ curvature for a class of (α,β)-metrics. Secondly, we obtained its characterized equations with vanishing χ curvature. In the end, we constructed a series of (α,β)-metrics with vanishing χ curvature.

Key words: (α,β)-metrics; S curvature; χ curvature; polynomial (α,β)-metrics

0 引言

在芬斯勒几何中有许多的非黎曼量(即在黎曼几何中恒为零, 但在芬斯勒几何中未必为零的几何量), 例如: S 曲率, *Berwald* 曲率, *Landsberg* 曲率, χ 曲率, H 曲率, E 曲率等. 研究这些特殊曲率的性质往往能够得到一些整体性结果, 因此具有十分重要的意义[1-2].

设 (M,F) 是 n 维芬斯勒流形, 切丛 TM 上的非黎曼量 $\chi=\chi_i dx^i$ 定义为

$$\chi_i = S_{\cdot i;j}y^j - S_{;i} \tag{1}$$

其中: S 表示 S 曲率, "." 和 ";" 分别表示 F 关于陈联络的竖直协变导数和水平协变导数.

文献[2]研究了旗曲率与 χ 曲率之间的关系, 证明了具有标量旗曲率的芬斯勒度量具有几乎消失 χ 曲率当且仅当旗曲率几乎消失. 特别地, 具有消失的 χ 曲率当且仅当旗曲率消失, 并证明了 *Randers* 度量的 S 曲率几乎迷向当且仅当 χ 曲率几乎消失. 文献[3]给出了 *Kropina* 度量具有几乎消失 χ 曲率的等价条件. 文献[4]给出了 (α,β)-度量 χ 曲率的具体表达式, 并发现对于具有几乎消失 χ 曲率的 $m(\geq 2)$ 次多项式 (α,β)-度量, 其 χ 曲

* 收稿日期: 2021-04-09
基金项目: 国家自然科学基金(11961061; 11461064; 11761069); 新疆大学博士启动基金(BS130107).
作者简介: 麻翠玲(1994-), 女, 硕士生, 从事微分几何的研究, E-mail: 1667535928@qq.com.
† 通讯作者: 张晓玲(1978-), 女, 博士, 副教授, 从事微分几何的研究, E-mail: zhangxiaoling0910@126.com.

率一定消失, 且在共形平坦条件下, F 一定是局部闵可夫斯基度量. 文献[5]刻画了一类具有消失 χ 曲率的广义 (α,β)-度量, 并研究了球对称度量的相关性质.

文献[6]研究了 χ 曲率与 $Ricci$ 曲率之间的关系, 并由此发现了一类新的非黎曼量. 之后, 他们证明了对于具有标量曲率的喷射, 其具有迷向曲率当且仅当 χ 消失[1]. 沈忠民近期讨论了 χ 曲率关于喷射 G 的几种不同的表达式, 证明了用 S 曲率进行射影变换得到的喷射总是具有消失的 χ 曲率, 并在 $\chi=0$ 的条件下建立了有关喷射的 $Beltrami$ 定理.

(α,β)-度量是一类特殊的芬斯勒度量, 表示形式如下

$$F=\alpha\phi(s),$$

其中: $\alpha=\sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ 是黎曼度量, $\beta=b_i(x)y^i$ 是一形式, $s:=\frac{\beta}{\alpha}$, $b:=\|\beta\|_\alpha<b_0$. 已证明 $F=\alpha\phi(s)$ 是正定的芬斯勒度量当且仅当函数 $\phi=\phi(s)$ 在 $(-b_0,b_0)$ 上是 C^∞ 的正函数, 且满足

$$\phi(s)-s\phi'(s)+(b^2-s^2)\phi''(s)>0,\quad |s|\le b<b_0.$$

在本文中我们研究了一类具有消失 χ 曲率的 (α,β)-度量, 并得到如下定理.

定理 1 设 $F=\alpha\phi(s)$ 是 $n(\ge 3)$ 维流形 M 上的非黎曼 (α,β)-度量, 如果 β 满足

$$r_{ij}=\epsilon\{b^2a_{ij}-b_ib_j\},\quad s_j=0 \tag{2}$$

其中: $\epsilon=\epsilon(x)$ 是标量函数, 那么 $\chi=0$ 等价于下列三个条件之一成立:

(a)　$\epsilon=0$,

(b)　ϵ 是非零常数, $g=0$, $hs_{ij}=0$,

(c)　ϵ 不是常数, $b_i=H[\epsilon^{-1}]_{x^i}$, H 为任意非零常数,

其中

$$\begin{aligned}
&Q:=\frac{\phi'}{\phi-s\phi'},\quad \Delta:=1+sQ+(b^2-s^2)Q',\\
&\Phi:=-(Q-sQ')\{n\Delta+1+sQ\}-(b^2-s^2)(1+sQ)Q'',\\
&f:=\frac{\Phi}{2\Delta^2},\quad h:=[4s+(b^2+s^2)Q]f-(b^2-s^2)(2+sQ)f_s,\\
&g:=(2-\frac{b^2-3s^2}{2\Delta}Q')f+[\frac{3}{2}+\frac{5}{2\Delta}(1+sQ)]sf_s-(b^2-s^2)(\frac{1}{2}+\frac{1+sQ}{2\Delta})f_{ss},\\
&H:=\frac{(b^2+s^2)f-s(b^2-s^2)f_s}{(b^2-s^2)g}.
\end{aligned}$$

注记 1 文献[4]证明了具有几乎消失 χ 曲率的多项式 (α,β)-度量, 其 χ 曲率一定消失, 未进一步研究具有消失 χ 曲率的多项式 (α,β)-度量. 本文研究了一般的 (α,β)-度量, 而不只是多项式 (α,β)-度量. 文献[5]研究了广义 (α,β)-度量. 在 ${}^{\alpha}R^i_j=c(\alpha^2\delta^i_j-y^iy_j)$, $b_{i|j}=\lambda(x)a_{ij}$, 其中 c 为常数的条件下, 刻画了其具有消失 χ 曲率的性质.

注记 2 注意到

$$\frac{\partial b}{\partial x^j}=\frac{b^ib_{i|j}}{b}=\frac{r_j+s_j}{b}.$$

因此 b 为常数的充要条件是 $r_j+s_j=0$. 如果 β 满足式 (2), 我们有 $r_j+s_j=0$, 即 b 为常数.

注记 3 对于多项式 (α,β)-度量, 令 $h=0$, F 退化为黎曼度量, 见定理 3.

注记 4 对于多项式 (α,β)-度量, 令 $g=0$, 用 Maple 程序计算得, 当 $2\le k\le 5$ 时, F 均退化为黎曼度量.

注记 5 对于形如式(3)、式(4)的多项式 (α,β)-度量

$$\phi(s)=1+\frac{2}{b}s+\frac{1}{b^2}s^2 \tag{3}$$

或

$$\phi(s)=1-\frac{2}{b}s+\frac{1}{b^2}s^2 \tag{4}$$

直接计算, 得 $H=3$. 则当 $b_i=3[\epsilon^{-1}]_{x^i}$ 时, 式 (3) 和式 (4) 这两种 (α,β)-度量具有消失的 χ 曲率. 对于 k 次多项式 (α,β)-度量, 当 $3\le k\le 5$ 时, 用 Maple 程序计算可知, 不存在使得 H 为常数的多项式函数 $\phi(s)$.

1 预备知识

设 M 是一个 $n(\geq 2)$ 维光滑流形. 切丛 TM 上的点记为 (x,y), 其中: $x\in M, y\in T_xM$. 令 (x^i,y^i) 是 TM 的局部坐标, $y=y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$. M 上的函数 $F:TM\longrightarrow(0,+\infty)$ 称为芬斯勒度量, 如果其满足以下几个条件:

(1) F 在 $TM\setminus\{0\}$ 上是光滑的；

(2) 对任意的 $\lambda>0$, $F(x,\lambda y)=\lambda F(x,y)$；

(3) 基本二次型为 $g=g_{ij}(x,y)dx^i\otimes dx^j$, 其中:

$$g_{ij}(x,y):=[\frac{1}{2}F^2(x,y)]_{y^iy^j}$$

是正定的. 记 $F_{y^i}:=\frac{\partial F}{\partial y^i}$, $F_{x^i}:=\frac{\partial F}{\partial x^i}$, $F^2_{y^iy^j}:=\frac{\partial^2F^2}{\partial y^i\partial y^j}$.

设 F 是 n 维流形 M 上的一个芬斯勒度量, F 的测地系数 G^i 定义为

$$G^i:=\frac{1}{4}g^{ij}\{[F^2_{x^ky^j}]y^k-[F^2]_{x^j}\},$$

其中: $(g^{ij})=(g_{ij})^{-1}$.

设 $dV=\sigma(x)dx$ 是 M 上的体积形式, 那么 S 曲率定义为

$$S:=\frac{\partial G^k}{\partial y^k}-y^k\frac{\partial}{\partial x^k}(\ln\sigma).$$

记

$$r_{ij}:=\frac{1}{2}(b_{i|j}+b_{j|i}),\quad s_{ij}:=\frac{1}{2}(b_{i|j}-b_{j|i}),$$
$$r_i:=r_{ij}b^j,\quad s_i:=s_{ij}b^j,\quad s_{i0}:=s_{ij}y^j,\quad r_{00}:=r_{ij}y^iy^j,$$

其中: $b_{i|j}$ 表示 β 关于 α 的共变导数.

2 一类 (α,β)-度量的 χ 曲率

引理 1[7] 设 $F=\alpha\phi(s)$ 是 n 维流形上的一个 (α,β)-度量. 如果 β 满足式 (2), 那么其 S 曲率为

$$S=-\alpha\epsilon(b^2-s^2)\frac{\Phi}{2\Delta^2}\tag{5}$$

利用引理 1 和式 (1), 我们得到定理2.

定理 2 设 $F=\alpha\phi(s)$ 是 n 维流形上的一个 (α,β)-度量. 如果 β 满足式 (2), 那么

$$\begin{aligned}\chi_i=&\epsilon_0\{\left[2sf-(b^2-s^2)f_s\right]b_i-\left[(b^2+s^2)f-s(b^2-s^2)f_s\right]l_i\}\\&+\epsilon hs_{i0}+(b^2-s^2)\alpha[f\epsilon_i+\epsilon^2g(b_i-sl_i)]\end{aligned}\tag{6}$$

其中: $l_i:=\frac{y_i}{\alpha}$, $y_i:=a_{ij}y^j$, $\epsilon_i:=\frac{\partial\epsilon}{\partial x^i}$ 和 $\epsilon_0:=\epsilon_iy^i$.

证明 令 $A:=-\alpha\epsilon(b^2-s^2)$, $f:=\frac{\phi}{2\triangle^2}$, 由引理 1 知

$$S=Af.$$

根据式 (1), 直接计算得

$$\begin{aligned}\chi_i=&f[A_{y^ix^k}y^k-A_{x^i}-A_{y^iy^k}G^k]+f_s[A_{y^i}(s_{x^k}y^k-s_{y^k}G^k)+s_{y^i}(A_{x^k}y^k-A_{y^k}G^k)+\\&A(s_{y^ix^k}y^k-s_{x^i}-s_{y^iy^k}G^k)]+f_{ss}As_{y^i}(s_{x^k}y^k-s_{y^k}G^k)\end{aligned}\tag{7}$$

又

$$\begin{aligned}A_{y^ix^k}y^k-A_{x^i}-A_{y^iy^k}G^k=&\epsilon_0[2sb_i-(b^2+s^2)l_i]+\epsilon^2(b^2-s^2)[2-\frac{(b^2-3s^2)Q'}{2\Delta}]\alpha(b_i-sl_i)\\&+\epsilon[(b^2+s^2)Q+4s]s_{i0}+(b^2-s^2)\alpha\epsilon_i\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_{y^i}(s_{x^k}y^k-s_{y^k}G^k)&=\epsilon^2(b^2-s^2)(\frac{1}{2}+\frac{1+sQ}{2\Delta})\alpha[2sb_i-(b^2+s^2)l_i]\\
s_{y^i}(A_{x^k}y^k-A_{y^k}G^k)&=(b^2-s^2)\{\epsilon^2[s+\frac{2s+(b^2+s^2)Q}{2\Delta}]\alpha-\epsilon_0\}(b_i-sl_i)\\
s_{y^ix^k}y^k-s_{x^i}-s_{y^iy^k}G^k&=\epsilon(b^2-s^2)\frac{1}{2\Delta}[(Q+sQ')b_i-(2+3sQ+b^2Q')l_i]+(2+sQ)\alpha^{-1}s_{i0}\\
s_{y^i}(s_{x^k}y^k-s_{y^k}G^k)&=\epsilon(b^2-s^2)(\frac{1}{2}+\frac{1+sQ}{2\Delta})(b_i-sl_i)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

将式 (8) 代入式 (7), 即得式 (6).

3 一类具有消失 χ 曲率的 (α,β)-度量

本节将给出定理 1 的证明.

定理 1 的证明

当 $f=0$ 时, F 为黎曼度量, 因为文献[8]已证明 (α,β)-度量是黎曼度量当且仅当 $\Phi=0$.

当 $\epsilon=0$ 时, $\chi_i=0$ 显然成立. 因此下述分析中考虑 $\epsilon\neq 0$ 且 $f\neq 0$ 的情况.

当 ϵ 是非零常数时, 由式 (6) 得

$$(b^2-s^2)\epsilon^2 g\alpha(b_i-sl_i)+\epsilon h s_{i0}=0 \tag{9}$$

上式用 b^i 缩并, 得

$$(b^2-s^2)^2\epsilon^2 g\alpha=0.$$

从而 $g=0$. 代入式 (9) 得, $h=0$ 或 $s_{ij}=0$.

当 ϵ 不是常数时, 为了简化计算, 我们在 x 点的切空间 T_xM 上取关于 α 的正交基, 使得

$$\alpha=\sqrt{\sum_{i=1}^n (y^i)^2},\quad \beta=by^1.$$

并且在 T_xM 上取适当的坐标变换 $\psi:(s,u^A)\to(y^i)$:

$$y^1=\frac{s}{\sqrt{b^2-s^2}}\bar{\alpha},\quad y^A=u^A,$$

其中:

$$\bar{\alpha}=\sqrt{\sum_{i=2}^n (u^A)^2}.$$

这里, 指标约定为

$$1\leq i,j,k,\cdots\leq n,\quad 2\leq A,B,C,\cdots\leq n.$$

我们有

$$\alpha=\frac{b}{\sqrt{b^2-s^2}}\bar{\alpha},\quad \beta=\frac{bs}{\sqrt{b^2-s^2}}\bar{\alpha},\quad s_A=bs_{1A},\quad l_1=\frac{s}{b},\quad l_A=\frac{\sqrt{b^2-s^2}u^A}{b\bar{\alpha}}.$$

记

$$\bar{s}_{i0}:=\sum_{A=2}^n s_{iA}u^A,\quad \bar{\epsilon}_0:=\sum_{A=2}^n \epsilon_A u^A,$$

则

$$s_{i0}=\frac{s_{i1}}{\sqrt{b^2-s^2}}s\bar{\alpha}+\bar{s}_{i0},\quad \epsilon_0=\frac{s\epsilon_1}{\sqrt{b^2-s^2}}\bar{\alpha}+\bar{\epsilon}_0.$$

将以上式子代入定理 2 中的式 (6), 则 χ 曲率的表达式为

$$
\begin{aligned}
\chi_i=&\bar{\epsilon}_0\big\{[2sf-(b^2-s^2)f_s]b_i-[(b^2+s^2)f-s(b^2-s^2)f_s]l_i\big\}+\epsilon h\bar{s}_{i0}+\frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{b^2-s^2}}\Big\{b(b^2-s^2)[f\epsilon_i\\
&+\epsilon^2 g(b_i-sl_i)]+s\epsilon_1\big\{[2sf-(b^2-s^2)f_s]b_i-[(b^2+s^2)f-s(b^2-s^2)f_s]l_i\big\}+\epsilon shs_{i1}\Big\}.
\end{aligned}
$$

对上式的下标 i, 分别取 $i=1$ 和 $i=A$, 可得

$$
\begin{aligned}
\chi_1 =& \frac{b^2-s^2}{b}[sf-(b^2-s^2)f_s]\bar{\epsilon}_0 + b\sqrt{b^2-s^2}\big\{\epsilon_1[(b^2+s^2)f-s(b^2-s^2)f_s]+\epsilon^2 b(b^2-s^2)g\big\}\bar{\alpha},\\
\chi_A =& \frac{1}{b\sqrt{b^2-s^2}}\big\{[b^2(b^2-s^2)f\epsilon_A+\epsilon bshs_{A1}]\bar{\alpha}-[(b^2+s^2)f-s(b^2-s^2)f_s]\bar{\alpha}^{-1}\bar{\epsilon}_0 u_A\big\}\\
&-\frac{s}{b}\big\{\epsilon^2 b(b^2-s^2)g+\epsilon_1[(b^2+s^2)f-s(b^2-s^2)f_s]\big\}u_A+\epsilon h\bar{s}_{A0}.
\end{aligned}
$$

根据 χ_1 和 χ_A 关于 u^A 的有理项和无理项, $\chi_i=0$ 等价于下列四式成立

$$[sf-(b^2-s^2)f_s]\bar{\epsilon}_0=0 \tag{10}$$

$$\epsilon_1\big\{(b^2+s^2)f-s(b^2-s^2)f_s\big\}+\epsilon^2 b(b^2-s^2)g=0 \tag{11}$$

$$b(b^2-s^2)f(\bar{\alpha}^2\epsilon_A-\bar{\epsilon}_0 u_A)+\epsilon sh\bar{\alpha}^2 s_{A1}=0 \tag{12}$$

$$\epsilon h\bar{s}_{A0}=0 \tag{13}$$

对式 (12) 关于 u^B, u^C 求导, 得

$$b(b^2-s^2)f(2\delta_{BC}\epsilon_A-\delta_{AB}\epsilon_C-\delta_{AC}\epsilon_B)+2\epsilon sh\delta_{BC}s_{A1}=0 \tag{14}$$

在式 (14) 中, 令 $A=B$, 并取迹, 得

$$-(n-2)b(b^2-s^2)f\epsilon_C+2\epsilon shs_{C1}=0 \tag{15}$$

类似地, 在式 (14) 中, 令 $B=C$, 并取迹, 得

$$2(n-2)b(b^2-s^2)f\epsilon_A+2(n-1)\epsilon shs_{A1}=0 \tag{16}$$

由 $(n-1)\times$(15)-(16), 得

$$-(n+1)(n-2)b(b^2-s^2)f\epsilon_A=0 \tag{17}$$

因此, 当 $n\geq 3$ 时, $\epsilon_A=0$.

此时, 式 (10) 自然成立, 且式 (11) 可转化为

$$\epsilon_i\big\{(b^2+s^2)f-s(b^2-s^2)f_s\big\}+b_i\epsilon^2(b^2-s^2)g=0 \tag{18}$$

由式 (18) 的表达式可知, 若 $g=0$, 则

$$(b^2+s^2)f-s(b^2-s^2)f_s=0 \tag{19}$$

方程 (19) 的非零解为

$$f=\frac{\mu s}{b^2-s^2} \tag{20}$$

其中: μ 是任意常数. 将式 (20) 代入 $g=0$, 得

$$2+2sQ+(b^2-s^2)Q'=0 \tag{21}$$

方程 (21) 的解为

$$Q=-\frac{1}{b^3}[(b^2-s^2)\ln\frac{b+s}{b-s}+\mu(b^2-s^2)+2bs] \tag{22}$$

将式 (22) 代入 f 的表达式, 可得

$$f=\frac{[(n+1)b^2+(n-3)s^2][\ln\frac{b+s}{b-s}+\mu]-2(n-3)bs}{2\{2b^3-s[(b^2-s^2)\ln\frac{b+s}{b-s}+\mu(b^2-s^2)+2bs]\}} \tag{23}$$

这与式 (20) 矛盾. 因此 g 恒不为零.

从而, 由式 (18) 可得

$$b_i=[\epsilon^{-1}]_{x^i}H \tag{24}$$

其中: $H=\dfrac{(b^2+s^2)f-s(b^2-s^2)f_s}{(b^2-s^2)g}$.

对式 (24) 关于 y^j 求导,

$$[\epsilon^{-1}]_{x^i}s_{y^j}H_s=0.$$

则 $H_s=0$, 即 H 为任意非零常数. 从而, 由 (24) 式知 $s_{ij}=0$, 此时式 (13) 自然成立.

反之, 若 F 满足定理 1 中的条件 (a) 或 (b), 则显然 χ 曲率消失. 对于情形 (c), 知

$$b_i=-H\epsilon^{-2}\epsilon_i.$$

故

$$s\alpha=-H\epsilon^{-2}\epsilon_0.$$

将以上两式代入定理 2 的 (6) 式, 则式 (6) 恒成立.

例 1 解方程 $sf-(b^2-s^2)f_s=0$, 得 $f=\frac{1}{\sqrt{b^2-s^2}}$, $H=1$. 则当 $b_i=[\epsilon^{-1}]_{x^i}$, $f=\frac{1}{\sqrt{b^2-s^2}}$ 时, 由定理 1 中的 (c) 可知, 满足此条件的 (α,β)-度量具有消失的 χ 曲率.

对于 $k(\geq 2)$ 次多项式 (α,β)-度量, 即 $F=\alpha\phi(s)$, 其中: $\phi(s)=1+a_1s+a_2s^2+\cdots+a_ks^k$. 我们有如下定理.

定理 3 设 $F=\alpha\phi(s)$ 是 $n(\geq 3)$ 维流形上的 (α,β)-度量, 其中 $\phi(s)$ 是关于 s 的 $k(\geq 2)$ 次多项式. 如果 $h=0$, 那么 F 为黎曼度量.

证明 对 $h=0$ 乘以 $2\Delta^3(\phi-s\phi')^8$, 由最高次项系数为零, 得

$$4nk(k+1)^2(k-1)^5a_k^8s^{8k}=0.$$

则 $a_k=0$. 从而

$$\phi(s)=1+a_1s.$$

类似地, 由 $2\Delta^3(\phi-s\phi')^8\cdot h=0$ 的最高次项系数为零, 得

$$-3(n+1)a_1^3s^3=0.$$

则 $a_1=0$. 因而, $\phi(s)\equiv 1$, 即 F 为黎曼度量.

参考文献:

[1] LI B L, SHEN Z M. Ricci curvature tensor and non-Riemannian quantities[J]. Canadian Mathematical Bulletin, 2015, 58: 530-537.

[2] SHEN Z M. On some non-Riemannian quantities in Finsler geometry[J]. Canad Math Bull, 2013, 56: 184-193.

[3] CHEN G Z, LIU L H. On Kropina metrics with non-Riemannian curvature properties[J]. Differential Geometry and its Applications, 2015, 43: 180-191.

[4] CHENG X Y, YUAN M G. On conformally flat (α,β)-metrics with special curvature properties[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2015, 31: 879-892.

[5] ZHU H M. On a class of Finsler metrics with special curvature properties[J]. Balkan Journal of Geometry and its Applications, 2018, 23: 97-108.

[6] LI B L, SHEN Z M. Sprays of isotropic curvature[J]. International Journal of Mathematics, 2018, DOI: 10.1142/S0129167X18500039.

[7] CHENG X Y, SHEN Z M. A class of Finsler metrics with isotropic S-curvature[J]. Israel Journal of Mathmatics, 2009, 169: 317-340.

[8] CHENG X Y, WANG H, WANG M F. (α,β)-metrics with relatively isotropic mean Landsberg curvature[J]. Publicationes Mathematicae, 2008, 72: 475-485.

责任编辑: 赵新科