

一类具有预防意识的多斑块 SEIQR 传染病 模型的阈值动力学研究*

沈鑫, 刘子建[†]

(重庆交通大学 数学与统计学院, 重庆 400074)

摘要: 结合一般传染病病毒传播的特点, 提出了一类具有预防意识和斑块间流动感染的 SEIQR 传染病传播动力学模型. 根据下一代矩阵法算出了单斑块下疾病传播的阈值 R_a 和两斑块下疾病传播的阈值 R_a^ϕ , 得到当 $R_a \leq 1$ 时单斑块下无病平衡点全局渐近稳定和 $R_a^\phi \leq 1$ 时两斑块下无病平衡点局部稳定的结论, 数值模拟证实了理论结果. 敏感性分析说明了参数对基本再生数的影响, 结果表明增加人群预防意识能够抑制病毒在斑块间的传播, 但群体在斑块间流动时发生感染会加剧病毒的传播.

关键词: 预防意识; 斑块模型; 无病平衡点; 稳定性

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2023.08.29.0004

中图分类号: O175 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2024)02-0145-012

引文格式: 沈鑫, 刘子建. 一类具有预防意识的多斑块 SEIQR 传染病模型的阈值动力学研究[J]. 新疆大学学报(自然科学版中英文), 2024, 41(2): 145-156.

英文引文格式: SHEN Xin, LIU Zijian. Threshold dynamics of a multi-patch SEIQR epidemic model with prevention awareness[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2024, 41(2): 145-156.

Threshold Dynamics of a Multi-Patch SEIQR Epidemic Model with Prevention Awareness

SHEN Xin, LIU Zijian

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: We consider the characteristics of viral transmission of common infectious diseases, multi-patch SEIQR infectious disease transmission dynamic model with prevention awareness was proposed and studied. According to the next generation matrix method, the disease transmission threshold R_a in a single patch and the disease transmission threshold R_a^ϕ in the two patches were calculated. The theoretical results show that the disease free equilibrium in a single patch is globally asymptotically stable if $R_a \leq 1$ and the disease free equilibrium in two patches are locally stable if $R_a^\phi \leq 1$. Numerical simulations confirm the theoretical results, sensitivity analysis discusses the effects of parameters to the basic regeneration number, which shows that increasing the awareness of prevention could inhibit the spread of the virus between patches, but infection during transportation can increase it.

Key words: prevention awareness; patch model; disease free equilibrium; stability

0 引言

致病性高且流行范围广的传染病尤其是呼吸道传染病的主要传播途径是空气飞沫和直接接触, 传播速度和广度与人口密度有关, 人口流动会加速病毒传播和变异. 有研究指出人们通过服用预防药物、保持个人卫生、避免前往人口密集场所等一系列预防措施及媒体宣传提高人群预防意识能够减缓病毒的传播^[1-2]. 同时, 人群流

* 收稿日期: 2023-08-29

基金项目: 国家自然科学基金“多干预脉冲动力学模型及药物毒理效应机制研究”(12271068); 重庆市自然科学基金创新发展联合基金“肺癌细胞生理年龄分布的动力学研究”(CSTB2022NSCQ-LZX0026).

作者简介: 沈鑫(1998—), 女, 硕士生, 从事传染病动力学的研究, E-mail: 1023052500@qq.com.

[†] 通讯作者: 刘子建(1982—), 男, 博士, 教授, 主要从事传染病动力学的研究, E-mail: hbliuzijian@126.com.

动时造成的感染也对病毒在不同斑块间的传播有重要影响^[3].

数学模型常用于研究不同地区(斑块)间疾病的传播,如 Mishra 等^[4]研究登革热问题,发现两个斑块间的人口流动会使登革热感染的基本再生数变大. Liu 等^[5]通过建立两个斑块间的仓室模型发现两个斑块之间的人口流动会影响狂犬病的空间传播. 桑瑞等^[6]研究了媒体报道使易感人群迁移对病毒在两斑块间传播的影响. 朱紫睿和散雪峰等也对斑块环境下的传染病传播动力学进行了深入研究,得到了不同情况时传染病在斑块间的传播阈值^[7-8].

针对传染病的传播与防控,许多研究表明,在传染病暴发期间提高人群预防意识,提前做好相应预防措施能够有效减缓病毒传播. 如在传染病流行时期,通过媒体宣传预防意识将易感人群部分转变为有预防意识人群能够控制疾病的传播^[9]. Sahu 等^[10]的研究指出,随着时间的推移,预防意识的提高有助于降低疾病的传播率. 此后, Yang 等^[11]也指出,媒体宣传使有预防意识的群体人数增加时,病毒传播率会减少. Misra 等^[12]还研究了通过媒体宣传提高预防意识人群数量来控制疾病传播的最优策略问题. 上述模型及许多其它传染病模型^[13-18]均未同时考虑预防意识及斑块间疾病传播对传染病传播的影响,故本文建立了一个人群可以在多斑块间流动下具有预防意识以及非线性发生率的 SEIQR 模型,研究预防意识覆盖率以及人群流动对病毒在斑块间传播的影响,以期为传染病的防控提供理论依据.

1 模型的建立

具有预防意识覆盖率的 SEIQR 传染病传播动力学模型,包括了因被检测到染病而隔离的隔离仓室. 本节将建立斑块间存在人口流动的多斑块 SEIQR 传染病模型.

令 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $S_i(t)$ 为 t 时刻 i 斑块的易感者数量, $I_i(t)$ 为 t 时刻 i 斑块的感染者数量, $E_i(t)$ 为 t 时刻 i 斑块的暴露者数量, $Q_i(t)$ 为 t 时刻 i 斑块的隔离者数量, $R_i(t)$ 为 t 时刻 i 斑块的康复者数量. 多斑块传染病传播的示意图如图 1 所示.

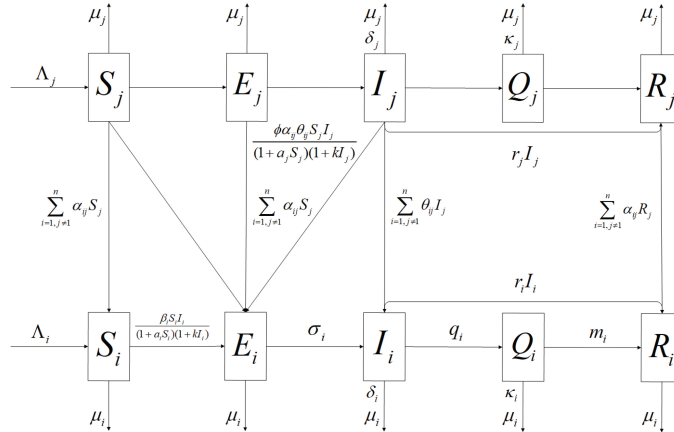


图 1 传染病在两斑块间的传播示意图

依据图 1, 建立如下具有预防意识和斑块间人口流动的传染病传播动力学模型

$$\begin{cases} \frac{dS_i}{dt} = \Lambda_i - \frac{\beta_i S_i I_i}{(1+a_i S_i)(1+k I_i)} - \mu_i S_i - \alpha_i S_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n [\alpha_{ij} S_j - \frac{\phi \alpha_{ij} \theta_{ij} S_j I_j}{(1+a_j S_j)(1+k I_j)}] \\ \frac{dE_i}{dt} = \frac{\beta_i S_i I_i}{(1+a_i S_i)(1+k I_i)} - \mu_i E_i - \sigma_i E_i - \alpha_i E_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_{ij} E_j + \sum_{j=1, j \neq i}^n [\frac{\phi \alpha_{ij} \theta_{ij} S_j I_j}{(1+a_j S_j)(1+k I_j)}] \\ \frac{dI_i}{dt} = \sigma_i E_i - (\mu_i + \delta_i + q_i + r_i + \theta_i) I_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \theta_{ij} I_j \\ \frac{dQ_i}{dt} = q_i I_i - (\mu_i + \kappa_i + m_i) Q_i \\ \frac{dR_i}{dt} = r_i I_i + m_i Q_i - \mu_i R_i - \alpha_i R_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_{ij} R_j \end{cases} \quad (1)$$

模型 (1) 的相关参数如表 1 所示, 其相关的初值条件如下

$$S_i(0) > 0, E_i(0) \geq 0, I_i(0) \geq 0, Q_i(0) \geq 0, R_i(0) \geq 0, (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (2)$$

表 1 模型 (1) 相关参数含义

符号	含义	符号	含义
Λ_i	斑块 i 上人口输入率	m_i	斑块 i 上隔离者的康复率
β_i	斑块 i 上染病者对易感者的传染率	σ_i	斑块 i 上暴露者到染病者的转移率
α_i	斑块 i 上易感者、暴露者、康复者去往其它斑块的转移率	α_{ij}	斑块 j 上易感者、暴露者、康复者去往斑块 i 的转移率
k	饱和传染率	δ_i	斑块 i 上染病者的因病死亡率
μ_i	斑块 i 上的自然死亡率	q_i	斑块 i 上染病者的隔离率
ϕ	人群在斑块间流动时染病者对易感者的传染率	r_i	斑块 i 上染病者的康复率
θ_i	斑块 i 上染病者去往其它斑块的转移率	θ_{ij}	斑块 j 上染病者去往斑块 i 的转移率
α_i	斑块 i 上预防意识覆盖率	κ_i	斑块 i 上隔离者的因病死亡率

注意到,模型 (1) 中前面三个方程独立于后面两个方程,为了便于计算,可考虑模型 (1) 中前面三个方程为其子系统,子系统中 i 斑块 t 时刻的总人口数为 $M_i(t)$,其可行域如下

$$\Omega_1 = \left\{ (S_i, E_i, I_i) \in R_+^{3n} : \sum_{i=1}^n (S_i + E_i + I_i) = \sum_{i=1}^n M_i \leq \frac{\sum_{i=1}^n \Lambda_i}{\mu} \right\} \tag{3}$$

定理 1 可行域 Ω_1 在初值 (2) 条件下相对于子系统模型是正不变的.

证明 根据子系统模型,可以得到子系统中斑块 i 的总人口满足

$$\begin{aligned} \frac{dM_i(t)}{dt} = & \Lambda_i - \mu_i M_i(t) - (\delta_i + q_i + r_i) I_i(t) - \alpha_i S_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} S_j - \alpha_i E_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} E_j \\ & - \theta_i I_i + \sum_{j=1}^n \theta_{ij} I_j, (i = 1, 2, 3, \dots, n, i \neq j), \end{aligned}$$

总人口数 $M(t) = \sum_{i=1}^n M_i(t), i = 1, 2, 3, \dots, n$, 其变化率为

$$\begin{aligned} \frac{dM(t)}{dt} = & \sum_{i=1}^n [\Lambda_i - \mu_i M_i(t) - (\delta_i + q_i + r_i) I_i(t)] - \sum_{i=1}^n \alpha_i S_i \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} S_j - \sum_{i=1}^n \alpha_i E_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} E_j - \sum_{i=1}^n \theta_i I_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ij} I_j, (i \neq j). \end{aligned}$$

同时有

$$\begin{aligned} \frac{dM(t)}{dt} = & \sum_{i=1}^n [\Lambda_i - \mu_i M_i(t) - (\delta_i + q_i + r_i) I_i(t)] - \sum_{i=1}^n \alpha_i S_i \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} S_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i E_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} E_i - \sum_{i=1}^n \theta_i I_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \theta_{ji} I_i, (i \neq j). \end{aligned}$$

根据基本假设

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} (i \neq j)$$

和

$$\theta_i = \sum_{j=1}^n \theta_{ji} (i \neq j),$$

有

$$\begin{aligned} \frac{dM(t)}{dt} = & \sum_{i=1}^n [\Lambda_i - \mu_i M_i(t) - (\delta_i + q_i + r_i) I_i(t)] \\ & \leq \sum_{i=1}^n \Lambda_i - \mu_i \sum_{i=1}^n M_i(t) = \sum_{i=1}^n \Lambda_i - \mu M(t), \mu = \min_{1 \leq i \leq n} \{\mu_i\}, \end{aligned}$$

进而有

$$M(t) \leq \frac{\sum_{i=1}^n \Lambda_i}{\mu} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n \Lambda_i}{\mu} - M(0) \right) e^{-\mu t}.$$

$M(0)$ 是最初总人口数, 如果 $M(0) \geq \sum_{i=1}^n \Lambda_i / \mu$, 则解在有限的时间内进入 Ω_1 ; 如果 $M(0) \leq \sum_{i=1}^n \Lambda_i / \mu$, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时, $M(t)$ 向 $\sum_{i=1}^n \Lambda_i / \mu$ 靠近且 $M(t) \leq \sum_{i=1}^n \Lambda_i / \mu$, 系统的解是有界的. 因此可行域 Ω_1 是模型 (1) 子系统的正不变集.

2 平衡点和基本再生数的计算

首先考虑单斑块情形. 当 $n=1$ 时, 模型 (1) 为

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Lambda - \frac{\beta SI}{(1+aS)(1+kI)} - \mu S \\ \frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{(1+aS)(1+kI)} - \mu E - \sigma E \\ \frac{dI}{dt} = \sigma E - (\mu + \delta + q + \gamma) I \\ \frac{dQ}{dt} = qI - (\kappa + \mu + m) Q \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I + mQ - \mu R \end{cases} \quad (4)$$

对于模型 (4), 由 $N = S + I + E + Q + R$ 得

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu N \quad (5)$$

当 $N > \Lambda / \mu$ 时, $dN/dt < 0$, 因此, 可行域为

$$\Omega_2 = \left\{ (S, E, I, Q, R) \mid S, E, I, Q, R \geq 0, S + E + I + Q + R = N, 0 < N \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\} \quad (6)$$

模型 (4) 的无病平衡点为 $E^0 = (\Lambda / \mu, 0, 0, 0, 0)$, 运用下一代矩阵方法^[19], 模型 (4) 中受感染的相关仓室为

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}^*(\mathbf{X}) - \mathbf{V}^*(\mathbf{X}),$$

式中, $\mathbf{X} = (E, I)^T$, $\mathbf{F}^*(\mathbf{X})$ 是新增感染矩阵, $\mathbf{V}^*(\mathbf{X})$ 是仓室个体转移矩阵, 因为 S, Q, R 可以独立出来, 所以在计算时不考虑. 则

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^*(\mathbf{X}) &= \begin{pmatrix} \frac{\beta SI}{(1+aS)(1+kI)} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{V}^*(\mathbf{X}) &= \begin{pmatrix} (\mu + \sigma)E \\ -\sigma E + (\mu + \delta + q + r)I \end{pmatrix}, \\ \mathbf{F} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta S[1+(1+2k)I]}{(1+aS)(1+kI)^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{V} &= \begin{pmatrix} \mu + \sigma & 0 \\ -\sigma & \mu + \delta + q + r \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因此单斑块模型的基本再生数 R_a 由 $\rho(\mathbf{F}\mathbf{V}^{-1})$ 得到, 即有

$$R_a = \frac{\beta \sigma \Lambda}{(\mu + \sigma)(\mu + a\Lambda)(\mu + \delta + q + r)}.$$

当斑块中预防意识覆盖率 $a=0$ 时, 基本再生数为

$$R_0 = \frac{\beta \sigma \Lambda}{\mu(\mu + \sigma)(\mu + \delta + q + r)}.$$

为求模型 (4) 的正平衡点, 令模型 (4) 的右端为 0, 则

$$\begin{cases} \Lambda - \frac{\beta SI}{(1+aS)(1+kI)} - \mu S = 0, \\ \frac{\beta SI}{(1+aS)(1+kI)} - \mu E - \sigma E = 0, \\ \sigma E - (\mu + \delta + q + r)I = 0, \\ qI - (\mu + \kappa + m)Q = 0, \\ rI + mQ - \mu R = 0. \end{cases}$$

正平衡点为 $E_1 = (S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*)$, 具体为

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{\Lambda}{\lambda^* + \mu}, E^* = \frac{\Lambda \lambda^*}{(\lambda^* + \mu)(\mu + \sigma)}, \\ I^* &= \frac{\Lambda \lambda^* \sigma}{(\lambda^* + \mu)(\mu + \sigma)(\mu + \delta + q + r)}, \\ Q^* &= \frac{qI^*}{\mu + \kappa + m}, R^* = \frac{mQ^* + rI^*}{\mu}. \end{aligned}$$

其中

$$\lambda^* = \frac{\beta I^*}{(1+aS^*)(1+kI^*)}.$$

将 S^* 和 I^* 带入 λ^* 得到

$$\lambda^* ((h+k\Lambda h)\lambda^{*2} + (\mu h + (\mu+a\Lambda)(h+k\Lambda\sigma) - \beta\Lambda\sigma)\lambda^* + (\mu h(\mu+a\Lambda) - \beta\Lambda\sigma\mu)) = 0,$$

其中

$$h = (\mu + \sigma)(\mu + \delta + q + r).$$

因为 $\lambda^* \geq 0$, 则

$$\begin{aligned} \lambda^* &= \frac{\sqrt{(\mu h + (\mu+a\Lambda)(h+k\Lambda\sigma) - \beta\Lambda\sigma)^2 - 4(h+k\Lambda h)(\mu h(\mu+a\Lambda) - \beta\Lambda\sigma\mu)}}{2(h+k\Lambda h)(\beta\sigma\Lambda - (\mu+a\Lambda)h)} (R_a - 1) \\ &\quad - \frac{(\mu h + (\mu+a\Lambda)(h+k\Lambda\sigma) - \beta\Lambda\sigma)^2 (\mu+a\Lambda)h}{2(h+k\Lambda h)(\beta\sigma\Lambda - (\mu+a\Lambda)h)} (R_a - 1), \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} c &= \frac{(\mu+a\Lambda)h\sqrt{(\mu h + (\mu+a\Lambda)(h+k\Lambda\sigma) - \beta\Lambda\sigma)^2 - 4(h+k\Lambda h)(\mu h(\mu+a\Lambda) - \beta\Lambda\sigma\mu)}}{2(h+k\Lambda h)(\beta\sigma\Lambda - (\mu+a\Lambda)h)} \\ &\quad - \frac{(\mu h + (\mu+a\Lambda)(h+k\Lambda\sigma) - \beta\Lambda\sigma)^2 (\mu+a\Lambda)h}{2(h+k\Lambda h)(\beta\sigma\Lambda - (\mu+a\Lambda)h)}, \end{aligned}$$

则

$$\lambda^* = c(R_a - 1).$$

带入得到正平衡点

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{\Lambda}{c(R_a - 1) + \mu}, E^* = \frac{\Lambda \lambda^*}{(c(R_a - 1) + \mu)(\mu + \sigma)}, \\ I^* &= \frac{\Lambda \lambda^* \sigma}{(c(R_a - 1) + \mu)(\mu + \sigma)(\mu + \delta + q + r)}, \\ Q^* &= \frac{qI^*}{\mu + \kappa + m}, R^* = \frac{mQ^* + rI^*}{\mu}. \end{aligned}$$

下面讨论模型 (1) 在 $n=2$ 时的无病平衡点及其相关基本再生数.

令模型(1)中 $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda$, 其它具有相同生物意义的参数也如此假设, 则定义的封闭区域 Ω_1 中有如下无病平衡点

$$E_\phi^0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, \frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right),$$

与模型(4)相同的方法可得

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\beta\Lambda}{\mu+a\Lambda} & 0 & \frac{\Lambda\phi\alpha\theta}{\mu+a\Lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Lambda\phi\alpha\theta}{\mu+a\Lambda} & 0 & \frac{\beta\Lambda}{\mu+a\Lambda} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} \alpha + \mu + \sigma & 0 & -\alpha & 0 \\ -\sigma & \mu + \delta + q + \theta + r & 0 & -\theta \\ -\alpha & 0 & \alpha + \mu + \sigma & 0 \\ 0 & -\theta & -\sigma & \mu + \delta + q + \theta + r \end{pmatrix},$$

因此两斑块模型的基本再生数 R_{ed}^ϕ 由 $\rho(FV^{-1})$ 得到. 经计算, 有

$$R_a^\phi = \frac{\sigma\Lambda(\beta + \phi\alpha\theta)}{(\mu + a\Lambda)(\mu + \sigma)(\mu + \delta + q + r + \theta)}.$$

当斑块中预防意识覆盖率 $a = 0$ 时

$$R_0^\phi = \frac{\sigma\Lambda(\beta + \phi\alpha\theta)}{\mu(\mu + \sigma)(\mu + \delta + q + r + \theta)}.$$

3 平衡点的稳定性

本节将通过矩阵理论知识以及构造李雅普诺夫函数方法讨论模型(1)和模型(4)无病平衡点的稳定性.

定理 2 当 $R_a < 1$ 时, 模型(4)的无病平衡点 E_0 在 Ω_2 内是局部稳定的; 当 $R_a > 1$ 时, 无病平衡点是不稳定的.

证明 模型(4)在 E_0 的雅可比矩阵为

$$J|_{E^0} = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\frac{\sigma\beta\Lambda}{\mu+a\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & -\mu - \alpha & \frac{\sigma\beta\Lambda}{\mu+a\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & -(\mu + q + \delta + r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & -(\kappa + \mu + m) & 0 \\ 0 & 0 & r & m & -\mu \end{pmatrix},$$

$J|_{E^0}$ 的特征方程为

$$(\lambda + \mu)(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) = 0,$$

其中

$$a_1 = (2\mu + q + \delta + r + \sigma),$$

$$a_2 = (\mu + \sigma)(\mu + q + \delta + r) - \frac{\sigma\beta\Lambda}{\mu + a\Lambda}.$$

显然 $a_1 > 0$, 而

$$a_2 = (\mu + \sigma)(\mu + q + \delta + r) - \frac{\sigma\beta\Lambda}{\mu + a\Lambda} = \frac{(\mu + a\Lambda)(\mu + \sigma)(\mu + q + \delta + r) - \sigma\beta\Lambda}{\mu + a\Lambda} = \frac{(1 - R_a)}{(\mu + \sigma)(\mu + q + \delta + r)}.$$

因此, 当 $R_a < 1$ 时, 由赫尔维茨判据, 模型(4)的无病平衡点 E_0 在可行域内局部渐近稳定.

定理 3 当 $R_a < 1$ 时, 模型(4)的无病平衡点 E_0 在 Ω_2 内是全局渐近稳定的.

证明 构造李雅普诺夫函数 $V(t) = \sigma E(t) + (\mu + \sigma)I(t)$, 则 $V(t)$ 沿模型 (4) 的导数为

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \sigma \frac{dE}{dt} + (\mu + \sigma) \frac{dI}{dt} \\ &= \frac{\beta\sigma SI}{(1+aS)(1+kI)} - \mu\sigma E - \sigma^2 E + \sigma(\mu + \sigma)E - (\mu + q + \delta + r)I \\ &= \frac{\beta\sigma SI}{(1+aS)(1+kI)} - (\mu + q + \delta + r)I \\ &\leq \left(\frac{\beta\sigma S^0}{1+aS^0} - (\mu + q + \delta + r) \right) I \\ &= \frac{\sigma\beta\Lambda - (\mu + a\Lambda)(\mu + \sigma)(\mu + q + \delta + r)}{(\mu + a\Lambda)} I \\ &= (\mu + \sigma)(\mu + q + \delta + r)(R_a - 1)I. \end{aligned}$$

当 $R_a < 1$ 时, 我们能够得到 $dV/dt \leq 0$, 当且仅当 $S = S^0, E = 0, I = 0, Q = 0, R = 0$ 时, $dV/dt = 0$. 根据拉萨尔不变原理, 得到模型 (4) 的无病平衡点 E_0 在可行域内是全局渐近稳定的.

定理 4 当 $R_{ed}^\phi < 1$ 时, 模型 (1) 的无病平衡点 E_ϕ^0 在 Ω_1 内局部渐近稳定.

证明

$$J = \begin{pmatrix} A_1 & B_2 \\ B_1 & A_2 \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} -\frac{\beta I_1}{(1+kI_1)(1+aS_1)^2} - (\mu + \alpha) & 0 & -\frac{\beta S_1}{(1+kI_1)^2(1+aS_1)} \\ \frac{\beta I_1}{(1+kI_1)(1+aS_1)^2} & -(\sigma + \alpha + \mu) & \frac{\beta S_1}{(1+kI_1)^2(1+aS_1)} \\ 0 & \sigma & -(\mu + q + \delta + r + \theta) \end{pmatrix}, \\ A_2 &= \begin{pmatrix} -\frac{\beta I_2}{(1+kI_2)(1+aS_2)^2} - (\mu + \alpha) & 0 & -\frac{\beta S_2}{(1+kI_2)^2(1+aS_2)} \\ \frac{\beta I_2}{(1+kI_2)(1+aS_2)^2} & -(\sigma + \alpha + \mu) & \frac{\beta S_2}{(1+kI_2)^2(1+aS_2)} \\ 0 & \sigma & -(\mu + q + \delta + r + \theta) \end{pmatrix}, \\ B_1 &= \begin{pmatrix} \alpha - \frac{\phi\alpha\theta I_1}{(1+kI_1)(1+aS_1)^2} & 0 & -\frac{\phi\alpha\theta S_1}{(1+kI_1)^2(1+aS_1)} \\ \frac{\phi\alpha\theta I_1}{(1+kI_1)(1+aS_1)^2} & \alpha & \frac{\phi\alpha\theta I_1}{(1+kI_1)^2(1+aS_1)} \\ 0 & 0 & \theta \end{pmatrix}, \\ B_2 &= \begin{pmatrix} \alpha - \frac{\phi\alpha\theta I_2}{(1+kI_2)(1+aS_2)^2} & 0 & -\frac{\phi\alpha\theta S_2}{(1+kI_2)^2(1+aS_2)} \\ \frac{\phi\alpha\theta I_2}{(1+kI_2)(1+aS_2)^2} & \alpha & \frac{\phi\alpha\theta I_2}{(1+kI_2)^2(1+aS_2)} \\ 0 & 0 & \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由于两斑块的平衡点相同, 故 $A_1 = A_2 = A^*, B_1 = B_2 = B^*$, 则雅可比矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} A^* & B^* \\ B^* & A^* \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} A^* &= \begin{pmatrix} -\frac{\beta I^*}{(1+kI^*)(1+aS^*)^2} - (\mu + \alpha) & 0 & -\frac{\beta S^*}{(1+kI^*)^2(1+aS^*)} \\ \frac{\beta I^*}{(1+kI^*)(1+aS^*)^2} & -(\sigma + \alpha + \mu) & \frac{\beta S^*}{(1+kI^*)^2(1+aS^*)} \\ 0 & \sigma & -(\mu + q + \delta + r + \theta) \end{pmatrix}, \\ B^* &= \begin{pmatrix} \alpha - \frac{\phi\alpha\theta I^*}{(1+kI^*)(1+aS^*)^2} & 0 & -\frac{\phi\alpha\theta S^*}{(1+kI^*)^2(1+aS^*)} \\ \frac{\phi\alpha\theta I^*}{(1+kI^*)(1+aS^*)^2} & \alpha & \frac{\phi\alpha\theta I^*}{(1+kI^*)^2(1+aS^*)} \\ 0 & 0 & \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

在无病平衡点处的雅可比矩阵为

$$\mathbf{J}(\mathbf{E}_\phi^0) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^0 & \mathbf{B}^0 \\ \mathbf{B}^0 & \mathbf{A}^0 \end{pmatrix},$$

其中

$$\mathbf{A}^0 = \begin{pmatrix} -(\mu+\alpha) & 0 & -\frac{\beta\Lambda}{\mu+a\Lambda} \\ 0 & -(\sigma+\alpha+\mu) & \frac{\beta\Lambda}{\mu+a\Lambda} \\ 0 & \sigma & -(\mu+q+\delta+r+\theta) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}^0 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\frac{\phi\alpha\theta\Lambda}{\mu+a\Lambda} \\ 0 & \alpha & \frac{\phi\alpha\theta\Lambda}{\mu+a\Lambda} \\ 0 & 0 & \theta \end{pmatrix}.$$

通过文献 [20] 知雅可比矩阵 $\mathbf{J}(\mathbf{E}_\phi^0)$ 在系统平衡点处的特征值与 $\mathbf{A}^0 + \mathbf{B}^0$ 和 $\mathbf{A}^0 - \mathbf{B}^0$ 的特征值相同, 而 $\mathbf{A}^0 + \mathbf{B}^0$ 和 $\mathbf{A}^0 - \mathbf{B}^0$ 表示为

$$\mathbf{A}^0 + \mathbf{B}^0 = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\frac{\phi\alpha\theta\Lambda}{\mu+a\Lambda} - \frac{\beta\Lambda}{\mu+a\Lambda} \\ 0 & -(\sigma+\mu) & \frac{\phi\alpha\theta\Lambda + \beta\Lambda}{\mu+a\Lambda} \\ 0 & \sigma & -(\mu+q+\delta+r) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^0 - \mathbf{B}^0 = \begin{pmatrix} -(\mu+2\alpha) & 0 & \frac{\phi\alpha\theta\Lambda - \beta\Lambda}{\mu+a\Lambda} \\ 0 & -(\sigma+2\alpha+\mu) & \frac{\beta\Lambda - \phi\alpha\theta\Lambda}{\mu+a\Lambda} \\ 0 & \sigma & -(\mu+q+\delta+r+2\theta) \end{pmatrix}.$$

可以得到 $\mathbf{A}^0 + \mathbf{B}^0$ 和 $\mathbf{A}^0 - \mathbf{B}^0$ 的特征方程分别为

$$(\lambda+\mu)(\lambda^2 + o\lambda + p) = 0 \quad \text{和} \quad (\lambda+\mu+2\alpha)(\lambda^2 + u\lambda + v) = 0.$$

在上述方程中

$$o = \sigma + (\mu + q + \delta + r),$$

$$p = \frac{\sigma(\phi\alpha\theta\Lambda + \beta\Lambda)}{\mu + a\Lambda} + (\sigma + \mu)(\mu + q + \delta + r),$$

$$u = \sigma + 2\alpha + (\mu + q + \delta + r + 2\theta),$$

$$v = (\sigma + 2\alpha + \mu)(\mu + q + \delta + r + 2\theta) + \frac{\sigma(\beta\Lambda - \phi\alpha\theta\Lambda)}{\mu + a\Lambda},$$

可知 $o > 0$ 、 $p > 0$ 、 $u > 0$. 而

$$v = (\sigma + 2\alpha + \mu)(\mu + q + \delta + r + 2\theta) + \frac{\delta(\beta\Lambda - \phi\alpha\theta\Lambda)}{\mu + a\Lambda}$$

$$> (\sigma + \mu)(\mu + q + \delta + r + 2\theta) + \frac{\delta(\beta\Lambda - \phi\alpha\theta\Lambda)}{\mu + a\Lambda}$$

$$= (\sigma + \mu)(\mu + q + \delta + r + 2\theta) + \frac{\delta\Lambda(\beta - \phi\alpha\theta)}{\mu + a\Lambda}$$

$$> (\sigma + \mu)(\mu + q + \delta + r + 2\theta) + \frac{-\delta\Lambda\beta - \delta\Lambda\phi\alpha\theta}{\mu + a\Lambda}$$

$$= (\sigma + \mu)(\mu + q + \delta + r + 2\theta) - \frac{\delta\Lambda(\beta + \phi\alpha\theta)}{\mu + a\Lambda}$$

$$> (\sigma + \mu)(\mu + q + \delta + r + \theta) - \frac{\delta\Lambda(\beta + \phi\alpha\theta)}{\mu + a\Lambda}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\sigma + \mu)(\mu + a\Lambda)(\mu + q + \delta + r + 2\theta) - \delta\Lambda(\beta + \phi\alpha\theta)}{\mu + a\Lambda} \\
 &= (\sigma + \mu)(\mu + q + \delta + r + 2\theta)(1 - R_a^\phi),
 \end{aligned}$$

可知当 $R_a^\phi < 1$ 时, $v > 0$.

结果表明当 $R_a^\phi < 1$ 时, $A^0 + B^0$ 和 $A^0 - B^0$ 的所有特征值都具有负实部. 因此, 当 $R_a^\phi < 1$ 时, 无病平衡点 E_0^0 是局部稳定的.

4 数值模拟

基于目前的各种研究以及部分参数估计, 通过 Matlab 对模型 (1) 和模型 (4) 进行数值模拟, 如图 2 所示. 可知无论是在单斑块还是两斑块模型中, 当预防意识覆盖率很低时, 传染病病毒会在斑块中流行, 见图 2 (a)、(c). 提高预防意识覆盖率能够有效地遏止传染病病毒的传播, 见图 2 (b)、(d). 为更直接观察人口转移率、预防意识覆盖率对传染病病毒在两斑块间传播的影响, 绘出了基本再生数与这两个因素的三维图, 见图 3. 由图 3 可知, 在预防意识覆盖率和人口转移率的影响下, 存在 $R_a^\phi < 1$ 的情况, 再次证实了通过提高预防意识覆盖率可以让传染病病毒在两斑块之间的传播得到控制. 同时说明了在预防意识覆盖率一定时, 控制人口在两斑块间的转移率也能够对传染病病毒的传播起到阻止作用.

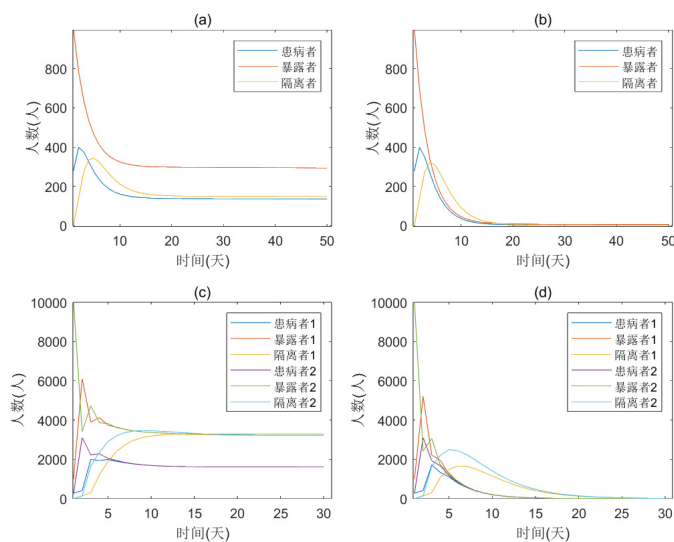


图 2 单斑块和两斑块预防意识覆盖率分别为 0.1 ((a)、(c)) 和 0.3 ((b)、(d)) 时各仓室人数随时间的变化

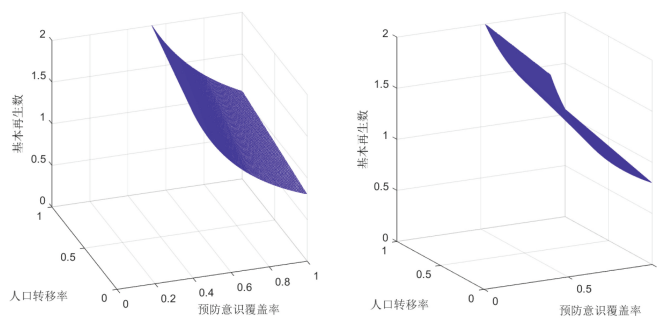


图 3 两斑块间基本再生数与人口转移率和预防意识覆盖率的关系

图 4 为两斑块基本再生数 R_a^ϕ 分别与病毒传播率、预防意识覆盖率、人群在斑块间流动时的病毒传播率及人口转移率的关系图. 图 4 中线段刻画基本再生数 R_a^ϕ 为 1 时各因素的相互关系, 线段上方表示基本再生数大于 1, 下方表示基本再生数小于 1. 图 4 中, 在预防意识覆盖率分别为 0.3、0.6、0.9 的情况下, 图 4 (a) 说明确定传染病病毒的传播率 β 后, 将人口转移率 α 控制在某个范围内能够控制传染病病毒的流行. 例如当预防意识覆

盖率 a 为 0.3、病毒传播率 β 为 0.24 时,人口转移率 α 应在 0.68 以下才能控制住传染病病毒的传播. 图 4 (e) 说明在同时有某种程度的病毒传播率 β 和预防意识覆盖率 a 时,人群在斑块间流动时的病毒传播率 ϕ 应控制在某个范围内才能够让病毒不在斑块中流行. 图 4 (g)、(h)、(i) 表示在预防意识覆盖率 a 为 0.3、0.6、0.9 的情况下,传染病的流行情况与病毒传播率、人口转移率、人群在斑块间流动时的病毒传播率的关系. 由图 4 (i) 可知在预防意识覆盖率 a 为 0.9、人口转移率 α 为 0.56 且人群在斑块间流动时的病毒传播率 ϕ 为 0.34 时,若病毒传播率 β 为 0.62 以下,则病毒在两斑块之间的传播能够得到控制.

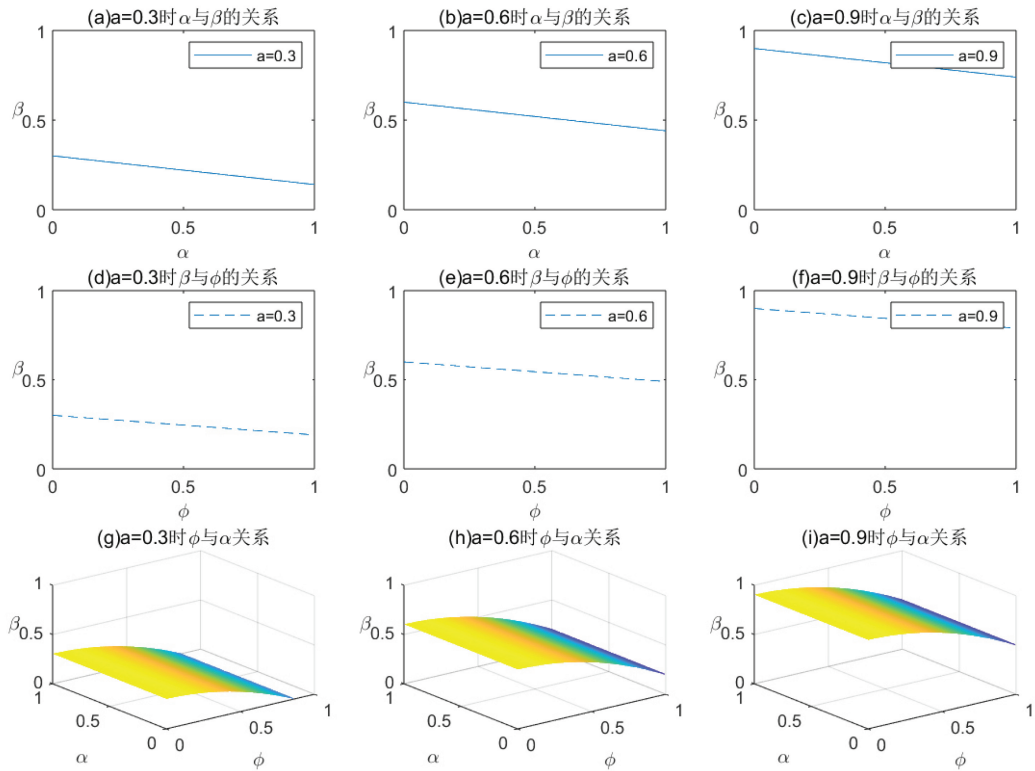


图 4 当基本再生数为 1 时病毒传播率与人口转移率、预防意识覆盖率、人口流动中病毒传播率的关系

图 5 展示了预防意识覆盖率 a 对传染病在斑块中传播的影响关系. 分析图 5, 可以观察到在预防意识覆盖率接近零时,基本再生数趋向无穷大,增大预防意识覆盖率后,基本再生数会逐渐降低. 值得注意的是,两斑块模型中基本再生数对预防意识覆盖率的增大表现出更高的敏感性. 这个发现与后续的敏感性分析一致,即在两斑块场景下,预防意识覆盖率对基本再生数的影响超过了单一斑块的情境. 这表明在传染病蔓延期间,人们在旅行过程中的防控意识显得尤为重要,超过了他们在单斑块静态状态的防病意识.

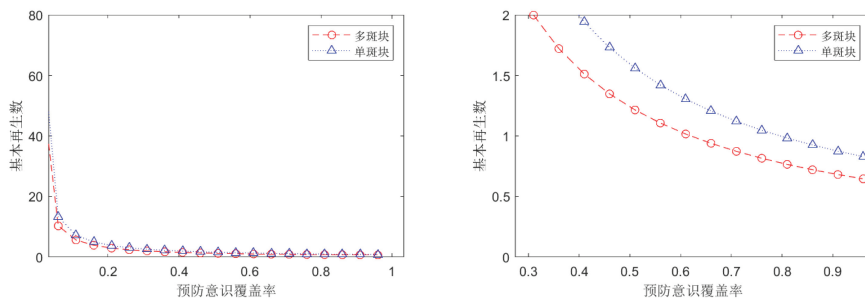


图 5 预防意识覆盖率对传染病在斑块间传播的影响

5 敏感性分析

运用 PRCC 法进行敏感性分析,可以更好地观察各个参数与基本再生数的相关性,如图 6、图 7 所示. 可知参数 β 、 σ 与 R_a 呈正相关, μ 、 a 、 δ 、 q 、 r 与 R_a 呈负相关;参数 β 、 σ 、 Λ 、 ϕ 、 α 、 θ 与 R_a^ϕ 呈正相关, a 、 δ 、 q 、 r 与 R_a^ϕ 呈负相关. 这说明增加预防意识覆盖率可以降低基本再生数,减缓病毒的传播,从而减少病毒感染人数.

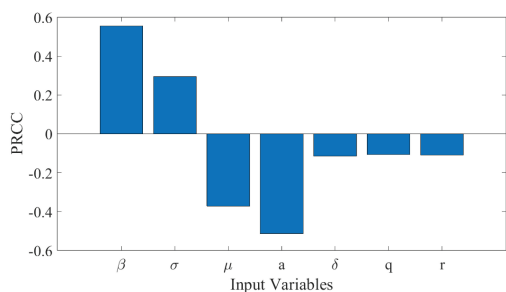


图 6 R_a 与参数的相关性

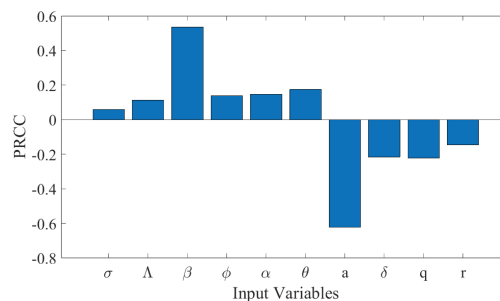


图 7 R_a^ϕ 与参数的相关性

6 结论

本文建立了一个具有预防意识的多斑块传染病传播动力学模型,通过动力学分析,得到单斑块模型和两斑块模型的基本再生数 R_a 和 R_a^ϕ 以及无病平衡点稳定性. 基于数值模拟对理论结果进行了验证,对单斑块和两斑块模型基本再生数中各参数的敏感性分析更加证实了增加个体的预防意识和减少人口在斑块间的流动是控制传染病流行的必要措施. 个体在斑块间流动时也会引起病毒的传播,故人口流动过程中的感染也不可忽视,若未在模型中考虑人口流动过程中的病毒传染,则会低估病毒流行的严重程度,研究结果对以往研究中建议采取预防措施,如减少出行和服用预防药物等做法为预防传染病提供了强有力的支撑,也为我国对传染病及时采取防控措施提供了理论依据.

参考文献:

- [1] NEUMANN G, NODA T, KAWAOKA Y. Emergence and pandemic potential of swine-origin H1N1 influenza virus[J]. Nature, 2009, 459: 931-939.
- [2] FINEBERG H V. Pandemic preparedness and response: Lessons from the H1N1 influenza of 2009[J]. The New England Journal of Medicine, 2014, 370(14): 1335-1342.
- [3] SATTENSPIEL L, DIETZ K. A structured epidemic model incorporating geographic mobility among regions[J]. Mathematical Biosciences, 1995, 128(1/2): 71-91.
- [4] MISHRA A, GAKKHAR S. Non-linear dynamics of two-patch model incorporating secondary dengue infection[J]. International Journal of Applied and Computational Mathematics, 2018, 4(1): 1-22.
- [5] LIU J L, JIA Y, ZHANG T L. Analysis of a rabies transmission model with population dispersal[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2017, 35: 229-249.
- [6] 桑瑞,张龙,吴浩. 媒体诱导迁移率变化的双斑块 SIRS 传染病模型研究[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2023, 40(1): 49-56+60.
SANG R, ZHANG L, WU H. Media-induced migration changes in a two-patch SIRS epidemic model[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2023, 40(1): 49-56+60. (in Chinese)
- [7] 朱紫睿,陈丽娟. 非线性出生率对双斑块模型动力学行为的影响[J]. 福州大学学报(自然科学版), 2023, 51(3): 301-306.
ZHU Z R, CHEN L J. Influence of nonlinear birth rate on dynamic behavior of a two-patch model[J]. Journal of Fuzhou University(Natural Science Edition), 2023, 51(3): 301-306. (in Chinese)
- [8] 散雪峰. 斑块环境下传染病模型的传播动力学[D]. 兰州: 兰州大学, 2022.
SAN X F. Propagation dynamics of epidemic models in patchy environments[D]. Lanzhou: Lanzhou University, 2022. (in Chinese)
- [9] SAMANTA S, RANA S, SHARMA A, et al. Effect of awareness programs by media on the epidemic outbreaks: A mathematical model[J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 219(12): 6965-6977.
- [10] SAHU G P, DHAR J. Dynamics of an SEIQIRS epidemic model with media coverage, quarantine and isolation in a community with pre-existing immunity[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2015, 421(2): 1651-1672.

- [11] YANG C Y, WANG X Y, GAO D Z, et al. Impact of awareness programs on cholera dynamics : Two modeling approaches[J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2017, 79(9): 2109-2131.
- [12] MISRA A K, SHARMA A, SHUKLA J B. Stability analysis and optimal control of an epidemic model with awareness programs by media[J]. Bio Systems, 2015, 138: 53-62.
- [13] 常星花. 疾病信息与传染病共演化动力学性态分析与研究[D]. 太原: 中北大学, 2022.
CHANG X H. Analysis and research on the coevolution dynamics of disease information and infectious diseases[D]. Taiyuan: North University of China, 2022. (in Chinese)
- [14] DENPHEDTNONG A, CHINVIRIYASIT S, CHINVIRIYASIT W. On the dynamics of SEIRS epidemic model with transport-related infection[J]. Mathematical Biosciences, 2013, 245(2): 188-205.
- [15] KUMAR K A, VENKATESH A. Mathematical analysis of SEITR model for influenza dynamics[J]. Journal of Computational Analysis & Applications, 2023, 31(1): 281-293.
- [16] UMAPATHY K, PALANIVELU B, JAYARAJ R, et al. On the decomposition and analysis of novel simultaneous SEIQR epidemic model[J]. AIMS Mathematics, 2022, 8(3): 5918-5933.
- [17] 陈伟, 张龙. 具有饱和和发生率的两毒株时滞 HIV 感染模型的阈值动力学[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2022, 39(4): 401-411+420.
CHEN W, ZHANG L. Threshold dynamics in two-strain delayed HIV infection model with saturated incidence[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2022, 39(4): 401-411+420. (in Chinese)
- [18] RIFHAT R, WANG K, WANG L, et al. Global stability of multi-group SEIQR epidemic models with stochastic perturbation in computer network[J]. Electronic Research Archive, 2023, 31(7): 4155-4184.
- [19] VAN DEN DRIESSCHE P, WATMOUGH J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission[J]. Mathematical Biosciences, 2002, 180: 29-48.
- [20] CHEN Y, YAN M, XIANG Z Y. Transmission dynamics of a two-city SIR epidemic model with transport-related infections[J]. Journal of Applied Mathematics, 2014, 2014: 1-12.

责任编辑: 赵新科

(上接第 144 页)

- [101] 王育飞, 杨铭诚, 薛花, 等. 计及 SOC 的电池储能系统一次调频自适应综合控制策略[J]. 电力自动化设备, 2021, 41(10): 192-198+219.
WANG Y F, YANG M C, XUE H, et al. Self-adaptive integrated control strategy of battery energy storage system considering SOC for primary frequency regulation[J]. Electric Power Automation Equipment, 2021, 41(10): 192-198+219. (in Chinese)
- [102] 孟明, 陈世超, 赵树军, 等. 新能源微电网研究综述[J]. 现代电力, 2017, 34(1): 1-7.
MENG M, CHEN S C, ZHAO S J, et al. Overview on research of renewable energy microgrid[J]. Modern Electric Power, 2017, 34(1): 1-7. (in Chinese)

责任编辑: 赵新科