对偶对 $(U(1), U(1, n))$ 意义下的辛表示及其不可约分解*

代金刚，范兴亚†

(新疆大学 数学与系统科学学院，新疆 乌鲁木齐 830017)

摘　要：考虑了对偶对 $(U(1), U(1, n))$ 下的辛表示的不可约分解问题. 主要的想法是构造两个李群 $SL(2,\ \mathbb{R})$ 和 $U(1, n)$ 表示的缠结算子, 将对应的表示空间分解为不可约 $SL(2,\ \mathbb{R})\times U(1, n)$-模. 以 Fourier-Poisson 变换作为主要工具, 并结合此变换的 Plancherel 公式, 得到了辛表示的谱分解.

关键词：辛表示; 缠结算子; Plancherel 公式; 对偶对

DOI：10.13568/j.cnki.651094.651316. 2023.10.20.0001

中图分类号：O152.5　**文献标识码**：A　**文章编号**：2096-7675(2024)03-0279-09

引文格式：代金刚，范兴亚. 对偶对 $(U(1), U(1, n))$ 意义下的辛表示及其不可约分解[J]. 新疆大学学报(自然科学版中英文)，2024，41(3)：279-287.

英文引文格式：DAI Jingang，FAN Xingya. Symplectic representations and its irreducible decomposition under the dual pair $(U(1),U(1,n))$[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English)，2024，41(3)：279-287.

Symplectic Representations and Its Irreducible Decomposition under the Dual Pair $(U(1),U(1,n))$

DAI Jingang, FAN Xingya

(*School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China*)

Abstract： We considered the problem of irreducible decomposition of the symplectic representation under the dual pair $(U(1),U(1,n))$. The main idea is to construct the intertwining operator of representation of $SL(2,\ \mathbb{R})$ and $U(1,n)$, and the corresponding representation space is decomposed into irreducible $SL(2,\ \mathbb{R})\times U(1,n)$-module. The main technique used in this paper is the Fourier-Poisson transform, combining the Plancherel formula of this transform, we obtain the spectrum of the symplectic representation.

Key words： symplectic representation; intertwining operator; Plancherel formula; dual pair

0　引言

辛表示 (又称 Segal-Shale-Weil 调和振荡表示) 是一类重要的李群表示, 最初由 Weil 提出[1]. 此表示是实李群表示理论的极大发展, 其相关研究结果推动了数论和量子力学的发展, 并在数学、物理等相关研究领域有着极其重要的应用[2−4]. 设 $Sp(2n,\mathbb{R})$ 是一个实辛群, 其双重覆盖群为 $Mp(2n,\mathbb{R})$. 辛表示是关于群 $Mp(2n,\mathbb{R})$ 的一个不可约无限维表示. Kashiwara 等[5]深入地研究了此类表示, 并得到了此类表示的张量积分解. 此后, 在假设条件 $G\times G'$ 为某个辛群的子群和 G 与 G' 互为中心化子之下, Howe 结合经典的 Weyl 不变理论发展了约化对偶对 (G,G') 理论[6−7], 由此产生了著名的 Howe 对应理论, 此理论不仅成功地解决一些半单李群酉表示的分类问题, 还为量子力学的相关研究提供了更为简便的数学框架.

* 收稿日期：2023-10-20

基金项目：国家自然科学基金“仿射对称空间上的调和分析”（12161083）.

作者简介：代金刚（1999—），男，硕士生，从事李群表示论的研究，E-mail：djg@stu.xju.edu.cn.

† 通讯作者：范兴亚（1986—），男，博士，副教授，主要从事李群表示论的研究，E-mail：fanxingya@xju.edu.cn.

悉知, 辛表示的主要核心是对应表示空间在此表示下的谱分解. 我们来回顾一下辛表示 $\widetilde{L}$ 限制在对偶对 (G,G') 的谱分解:

$$\widetilde{L}\big|_{G\times G'}\simeq\int_{\widehat{G}}^{\oplus}\pi\otimes\pi'\mathrm{d}\mu(\pi),$$

其中 $\widehat{G}$ 表示群 G 的不可约酉表示的等价类构成的集合, $\pi\in\widehat{G}$, π' 表示群 G 限制到群 G' 下的不可约酉表示, $\mathrm{d}\mu(\pi)$ 表示一个抽象的 Plancherel 测度.

设 $(G,G')=(U(1,1),U(1,1))$, Ørsted 等[8]借助 Fourier 积分算子精确地计算了上述 Plancherel 测度 $\mathrm{d}\mu(\pi)$. 受文献 [5] 和 [8−9] 的启发, 笔者继续研究辛表示 $\widetilde{L}$ 的 Plancherel 分解, 并得到 $(SL(2,\mathbb{R}),U(1,n))$ 对应的连续谱序列分解. 主要技术是构造了一类新的 Fourier-Poisson 积分, 结合 $(\mathfrak{u}(1,n),U(1)\times U(n))$-模[10], 得到了 Fourier-Poisson 积分的 Plancherel 定理, 其中 $\mathfrak{u}(1,n)$ 是李群 $U(1,n)$ 的李代数. 该结果是辛表示 $\widetilde{L}$ 连续谱分解的基本工具. 当 $s\in\mathbb{R}$ 时, 对于一个固定的 $v\in\mathbb{Z}$, 辛表示的具体分解如下:

$$L^2\left(\mathbb{C}^{1+n},V_{-v}\right)\cong\int_0^{\infty}\pi_{is}^{\pm}\otimes\tilde{\pi}_{is,v}\mathrm{d}\mu(s).$$

其中 $\mathrm{d}\mu(s)$ 表示一个具体的 Plancherel 测度.

1 预备知识与主要结果

1.1 预备知识

定义李群 $U(1):=\{e^{i\theta}:0\le\theta<2\pi\}$. 对某个固定的 $v\in\mathbb{Z}$, 设 (V_v,δ_v) 为 $U(1)$ 的有限维不可约表示[11], 其中 $\delta_v(e^{i\theta})=e^{iv\theta}$. $\widehat{U(1)}$ 表示群 $U(1)$ 的所有不可约酉表示的等价类构成的集合. V_{-v} 定义为 V_v 的对偶空间, δ_{-v} 是 δ_v 的对偶表示.

引理 1[5] 在群 $U(1)$ 的作用下, 空间 $L^2(\mathbb{C}^{1+n})$ 可分解为:

$$L^2\left(\mathbb{C}^{1+n}\right)=\bigoplus_{\delta_v\in\widehat{U(1)}}L^2\left(\mathbb{C}^{1+n},V_{-v}\right)\otimes V_v,$$

其中

$$L^2\left(\mathbb{C}^{1+n},V_{-v}\right):=\left\{f\in L^2\left(\mathbb{C}^{1+n}\right):f(e^{i\theta}z)=e^{iv\theta}f(z),\ v\in\mathbb{Z}\right\}.$$

在 $\mathbb{C}^{1+n}$ 上定义 Hermite 形式如下:

$$[z,z]:=z_1\bar{z}_1-z_2\bar{z}_2-\cdots-z_{n+1}\bar{z}_{n+1} \tag{1}$$

其中 $z\in\mathbb{C}^{1+n}$ 为行向量, z_k 是 z 的第 k 个坐标分量, $\bar{z}_k$ 表示复数 z_k 的共轭. 定义 $(n+1)$-阶可逆矩阵群 $GL(1+n,\mathbb{C})$ 的子群如下:

$$U(1,n):=\left\{g\in GL(1+n,\mathbb{C}):g^*\boldsymbol{I}_{1,n}g=\boldsymbol{I}_{\mathbf{1},\boldsymbol{n}},\boldsymbol{I}_{\mathbf{1},\boldsymbol{n}}=\mathrm{diag}(1,-\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}}),\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{n}}\text{是}\,n\,\text{阶单位矩阵}\right\},$$

其中 g^* 表示 g 的共轭转置. 此群保持上述 Hermite 形式不变.

设 $\Xi:=\{\xi\in\mathbb{C}^{1+n}:[\xi,\xi]=0\}$ 为空间 $\mathbb{C}^{1+n}$ 上的锥, 其中 $[\cdot,\cdot]$ 如式 (1) 所示. 定义

$$\mathbb{C}^{\times}:=\mathbb{R}_{+}^{\times}\times\mathbb{S}^1,$$

其中 $\mathbb{S}^1:=\{t\in\mathbb{C}^{\times}:|t|=1\}$. 容易定义 $\mathbb{C}^{\times}$上的特征标如下:

$$\chi_{\alpha,\beta}(t)=|t|^s\left(\frac{t}{|t|}\right)^v=t^{\alpha}\bar{t}^{\beta},\ t\in\mathbb{C}^{\times},s\in\mathbb{C},\alpha=\frac{s+v}{2},\beta=\frac{s-v}{2},v\in\mathbb{Z}.$$

利用上述数对 (α,β), 定义函数空间

$$S^{\alpha,\beta}(\Xi):=\{f\in C^{\infty}(\Xi):f(tz)=\chi_{\alpha,\beta}(t)f(z),z\in\Xi,t\in\mathbb{C}^{\times}\}.$$

令 $C_s^\infty(\Xi, V_{-v})$ 是 Ξ 上的光滑函数空间且其上元素满足

$$f(t\xi) = t^{\alpha+\beta} f(\xi),$$

其中 $t \in \mathbb{C}^\times$, $\alpha+\beta = s$. 同样的, 可以定义 $L_s^2(\Xi, V_{-v})$ 为 Ξ 满足上式的平方可积函数全体. 注意到

$$C_s^\infty(\Xi, V_{-v}) = \sum_{\alpha+\beta=s,\, \alpha-\beta\in\mathbb{Z}} S^{\alpha,\beta}(\Xi).$$

定义群 $U(1,n)$ 在空间 $C_s^\infty(\Xi, V_{-v})$ 上的作用为

$$\tilde{\pi}_{is,v}(g)(f)(z) = f(z\cdot g^{-1}) \tag{2}$$

其中 $z\cdot g^{-1}$ 是右乘. 事实上由文献 [10] 可知, 对于 $C^\infty(\Xi)$ 的任意子空间来说, 群 $U(1,n)$ 的作用相同. 从而上述分解对 $U(1,n)$ 不变. 记 $U(1,n)$ 的极大紧子群为 $K = U(1)\times U(n)$. 现在考虑空间 $S^{\alpha,\beta}(\Xi)$ 的 $U(1)\times U(n)$ 模的结构.

令拉普拉斯算子如下:

$$\Delta_n = 4\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_j}.$$

定义 $\mathcal{H}^a(\mathbb{C}^n)$ 为满足 $\Delta_n f = 0$ 的函数全体构成的集合. 设 $\mathcal{P}^{\alpha,\beta}(\mathbb{C}^n)$ 是关于 z_j 变量是 α 齐次的, 且关于 $\bar{z}_j$ 变量是 β 齐次的多项式构成的空间. 容易验证 $\Delta_n : \mathcal{P}^{\alpha,\beta}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{P}^{\alpha-1,\beta-1}(\mathbb{C}^n)$. 从而

$$\mathcal{H}^a(\mathbb{C}^n) = \sum_{\alpha+\beta=a} \mathcal{H}^a(\mathbb{C}^n) \cap \mathcal{P}^{\alpha,\beta}(\mathbb{C}^n) =: \sum_{\alpha+\beta=a} \mathcal{H}^{\alpha,\beta}(\mathbb{C}^n).$$

此外, 当 $n=1$ 时, 定义

$$\mathcal{H}^j(\mathbb{C}) = \begin{cases} \mathcal{H}^{j,0}(\mathbb{C}), & j \ge 0, \\ \mathcal{H}^{0,-j}(\mathbb{C}), & j \le 0. \end{cases}$$

定义映射

$$J_{\alpha,\beta,j,k,m} := J_{\alpha,\beta} : \mathcal{H}^j(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{H}^{k,m}(\mathbb{C}^n) \to S^{\alpha,\beta}(\Xi),$$

此处

$$\alpha+\beta = s,\ \alpha-\beta = |j| + k - m.$$

引理 2[10]　在群 $U(1)\times U(n)$ 的作用下, 空间 $S^{\alpha,\beta}(\Xi)$ 有如下分解:

$$S^{\alpha,\beta}(\Xi) \cong \sum_{a\ge 0, |j|\, k, m\ge 0, k+m=a,} \ \sum_{|j|+k-m=\alpha-\beta} J_{\alpha,\beta}(\mathcal{H}^j(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{H}^{k,m}(\mathbb{C}^n)) \tag{3}$$

其中 $J_{\alpha,\beta}(\mathcal{H}^j(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{H}^{k,m}(\mathbb{C}^n))$ 是 $U(1)\times U(n)$ 的不可约模.

在引理 2 中, 容易观察到, 如果 $j \ge 0$, 则

$$|j| + k - m = j + k + m - 2m = j + a - 2m,$$

或者 $j \le 0$, 则

$$|j| + k - m = -j + k + m - 2(-j+m) = -j + a - 2(-j+m).$$

利用上式可知, 式 (3) 非空的条件是

$$|j| + a \ge \alpha - \beta, \quad |j| + a \equiv \alpha - \beta \pmod 2.$$

为了定义本文所需的振荡积分, 现需下面引理.

引理 3[9]　固定 $v \in \mathbb{Z}$, 定义一个分布

$$I_v(z,s,\xi) = |[z,\xi]|^{is-3n-2},\ (z,s,\xi) \in \mathbb{C}^{1+n} \times \mathbb{R} \times \Xi,$$

则 $I(z,s,\xi)$ 有下列性质:

(i) 对于任意的 $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$,

$$I_v(az,s,\xi)=a^{is-3n-2}I_v(z,s,\xi).$$

(ii) 记群 $U(1,n)$ 的作用为 $\widetilde{\pi}_{s,v}$, 且与式 (2) 形式相同. 对于任意的 $g\in U(1,n)$,

$$I_v(zg,s,\cdot)(\xi)=\widetilde{\pi}_{s,v}(g)I_v(z,s,\cdot)(\xi).$$

(iii)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1\partial\bar{z}_1}-\frac{\partial^2}{\partial z_2\partial\bar{z}_2}-\cdots-\frac{\partial^2}{\partial z_{n+1}\partial\bar{z}_{n+1}}\right)I_v(z,s,\xi)=0.$$

定义 1 固定 $v\in\mathbb{Z}$, 记 $\Theta=:\{z\in\mathbb{C}^{1+n}:[z,z]<-1\}$. 设 $C_c^\infty(\mathbb{C}^{1+n},V_{-v})$ 为 $\mathbb{C}^{1+n}$ 上 V_{-v}-值无穷可微函数全体构成的集合且其紧支集落在 Θ 内. 任取 $f\in C_c^\infty(\mathbb{C}^{1+n},V_{-v})$, 定义振荡积分算子

$$\mathcal{F}_vf(\zeta,s,\xi)=\int_{\mathbb{C}^{1+n}}e^{i[z,z]\cdot\zeta}f(z)I_v(z,is,\xi)|\mathrm{d}z|^2 \tag{4}$$

其中 $(\zeta,s,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\Xi$, $|\mathrm{d}z|^2$ 是 $\mathbb{C}^{1+n}$ 上的 Lebesgue 测度.

定义 2 置 $SL(2,\mathbb{R})$ 在空间 $L^2(\mathbb{R})$ 上的表示如下:

$$\pi_{is}^{\pm}\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)f(x)=\begin{cases}|-bx+d|^{-1-is}f\left(\frac{ax-c}{-bx+d}\right), & \text{如果 }+,\\ \operatorname{sign}(-bx+d)|-bx+d|^{-1-is}f\left(\frac{ax-c}{-bx+d}\right), & \text{如果 }-,\end{cases}$$

其中 $s\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$, $f\in L^2(\mathbb{R})$.

注 1 群 $SL(2,\mathbb{R})$ 的抛物子群的代表元如下:

$$g(a)=\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix},a>0;t(x_0)=\begin{pmatrix}1&0\\x_0&1\end{pmatrix},x_0\in\mathbb{R} \tag{5}$$

利用定义 2 可知, 对于 $g(a),t(x_0)$ 来说, $\pi_{is}^{\pm}$ 具有以下关系:

$$\pi_{is}^{\pm}\begin{pmatrix}1&0\\x_0&1\end{pmatrix}f(x)=f(x-x_0),$$

$$\pi_{is}^{\pm}\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}f(x)=a^{1+is}f(a^2x).$$

引理 4[12] 对于 $s\in\mathbb{R}$, $\pi_{is}^{\pm}$ 均为 $SL(2,\mathbb{R})$ 的不可约酉表示. 此外, π_{is}^{+} 与 π_{-is}^{+} 酉等价, π_{is}^{-} 与 π_{-is}^{-} 酉等价.

注 2 若 $s=u+iv\in\mathbb{C}$, 则 $SL(2,\mathbb{R})$ 在加权测度空间 $L^2(\mathbb{R},(1+|x|^2)^u\mathrm{d}x)$ 上的非酉主序列表示可由如下形式给出:

$$\pi_{s}^{\pm}\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)f(x)=\begin{cases}|-bx+d|^{-1-s}f\left(\frac{ax-c}{-bx+d}\right), & \text{如果 }+,\\ \operatorname{sign}(-bx+d)|-bx+d|^{-1-s}f\left(\frac{ax-c}{-bx+d}\right), & \text{如果 }-,\end{cases}$$

事实上, 上述给出的非酉主序列表示包含了 $SL(2,\mathbb{R})$ 的所有的有限维不可约子表示. 对于 $0<s<1$, $\pi_s(g)$ 是酉主序列表示, 此情况下 $\pi_s(g)$ 为补序列表示, 但是补序列表示不出现在 Plancherel 公式里面 (见文献 [12]).

1.2 主要结果

本文主要结果如下:

定理 1 定义算子 $\mathcal{F}_v$ 如式 (4) 所示, 则

$$\mathcal{F}_v:L^2(\mathbb{C}^{1+n},V_{-v})\to L^2(\mathbb{R})\widehat{\otimes}L_s^2(\Xi,V_{-v}),$$

此处 $\widehat{\otimes}$ 表示两个函数空间张量积的完备化.

定理 2 设 $s\in\mathbb{R}$, $L^2(\mathbb{C}^{1+n},V_{-v})$ 有下列不可约 $SL(2,\mathbb{R})\times U(1,n)$-模分解:

$$L^2(\mathbb{C}^{1+n},V_{-v})\cong\int_0^\infty\pi_{is}^{\pm}\otimes\tilde{\pi}_{is,v}\mathrm{d}s.$$

2　定理 1 的证明

引理 5　设 $C_c^\infty(\mathbb{C}^{1+n},V_{-v})$为 $\mathbb{C}^{1+n}$ 上 V_{-v}-值有紧支集 (其支集在 Θ 内, 集合 Θ 见定义 1) 的光滑函数全体构成的集合, 则 $\mathcal{F}_v: C_c^\infty(\mathbb{C}^{1+n},V_{-v})\to C^\infty(\mathbb{R})\widehat{\otimes}C_s^\infty(\Xi,V_{-v})$ 是一个连续映射.

证明　设 $z_0,w_0\in\mathbb{C}$, 利用 $|z_0||w_0|\le(|z_0|^2+|w_0|^2)/2$ 和三角不等式 $||z_0|-|w_0||\le|z_0-w_0|$, 容易得到

$$|[z,\xi]|=\left|z_1\bar{\xi}_1-\sum_{j=2}^{n+1}z_j\bar{\xi}_j\right|\ge\left||z_1\bar{\xi}_1|-\sum_{j=2}^{n+1}|z_j\bar{\xi}_j|\right|\ge\left||z_1\bar{\xi}_1|-\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n+1}|z_j|^2-\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n+1}|\xi_j|^2\right|.$$

由于 $\xi\in\Xi$, 则 $|\xi_1|^2=\sum_{j=2}^{n+1}|\xi_j|^2$. 从而

$$|[z,\xi]|^{-3n-2}\le\left||z_1\bar{\xi}_1|-\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n+1}|z_j|^2-\frac{|\xi_1|^2}{2}\right|^{-3n-2}\le|-(|z_1|-|\xi|)^2+[z,z]|^{-3n-2}\le|[z,z]|^{-3n-2}.$$

于是

$$|I_v(\zeta,s,\xi)f(z)|\le|[z,z]|^{-3n-2}|f(z)|.$$

利用函数 f 的支集和 $\zeta\in\mathbb{R}$, 容易得到

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}_vf(\zeta,s,\xi)|&\le\int_{\mathbb{C}^{1+n}}\left|e^{i[z,z]\zeta}I_v(\zeta,s,\xi)f(z)\right||\mathrm{d}z|^2\\&\le\int_{\mathbb{C}^{1+n}}\left|I_v(\zeta,s,\xi)f(z)\right||\mathrm{d}z|^2\\&\lesssim\int_{|[z,z]|>1}\frac{|\mathrm{d}z|^2}{|[z,z]|^{3n+2}}<\infty.\end{aligned}$$

引理 5 证毕.

定理 1 的证明　群 $SL(2,\mathbb{R})$ 的抛物子群的生成元如式 (5) 所示. 对于任意的函数 $f\in L^2(\mathbb{C})$, 定义 $SL(2,\mathbb{R})$ 在空间 $L^2(\mathbb{C})$ 上的作用为

$$\begin{cases}L(g(a))f(w)=af(a^{-1}w), & a>0\\ L(t(x))f(w)=e^{-ix|w|^2}f(w), & x\in\mathbb{R}\end{cases}\tag{6}$$

群 $U(1,n)$ 作用在 $L^2(\mathbb{C}^{1+n})$ 上为通常的矩阵乘法, 且与 $SL(2,\mathbb{R})$ 的作用可交换. 由式 (6) 得张量积的表示

$$L^{1,n}:=L\otimes\left(\otimes^n\bar{L}\right).$$

在空间 $L^2(\mathbb{C}^{1+n})$ 上实现如下:

$$\begin{cases}(L^{1,n})(g(a))f(z)=a^{n+1}f(a^{-1}z),\\ (L^{1,n})(t(x))f(z)=e^{-i[z,z]x}f(z).\end{cases}$$

可得

$$\mathcal{F}_v(L^{1,n})(g(a))f(\zeta,s,\xi)=\int_{\mathbb{C}^{1+n}}e^{i[z,z]\zeta}a^{n+1}f(a^{-1}z)I_v(z,s,\xi)|\mathrm{d}z|^2.$$

取 $a^{-1}z=\tilde{z}$, 则

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_v(L^{1,n})(g(a))f(\zeta,s,\xi)&=\int_{\mathbb{C}^{1+n}}e^{i[z,z]a^2\zeta}a^{n+1}f(z)a^{is-3n-2}I_v(z,s,\xi)a^{2n+2}|\mathrm{d}z|^2\\&=a^{1+is}\mathcal{F}_vf(a^2\zeta,s,\xi)\\&=\pi_{is}^{\pm}(g(a))\mathcal{F}_vf(\zeta,s,\xi).\end{aligned}$$

其次考虑生成元 $t(x)$ 的情况, 利用 $\mathcal{F}_v$ 和 $L^{1,n}$ 的定义, 有

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_v(L^{1,n})(t(x))f(\zeta,s,\xi)&=\int_{\mathbb{C}^{1+n}}e^{i[z,z]\zeta}e^{-i[z,z]x}f(z)I(z,s,\xi)|\mathrm{d}z|^2\\&=\int_{\mathbb{C}^{1+n}}e^{i[z,z](\zeta-x)}f(z)I(z,s,\xi)|\mathrm{d}z|^2\\&=\mathcal{F}_vf(\zeta-x,s,\xi)\\&=\pi_{is}^{\pm}(t(x))\mathcal{F}_vf(\zeta,s,\xi).\end{aligned}$$

结合引理 5, 定理 1 得证.

3 定理 2 的证明

设 $X^{\pm}=\{z\in\mathbb{C}^{1+n}:[z,z]=\pm1\}$ 为 $\mathbb{C}^{1+n}$ 中的双曲面. 设 $X:=X^{+}$. 特别的, 齐性空间 $U(1,n)/U(n)$ 可以实现为 X[9−10]. 记 $\mathrm{d}\mu(z)$ 为 X 上 $U(1,n)$-不变的 Haar 测度. 令 $L^2(X,\mathrm{d}\mu(z))$ 为 X 上平方可积函数构成的全体.

引理 6[5] $L^2(X,\mathrm{d}\mu(z))$ 可分解为不可约的 $U(1)\times U(1,n)$-模:

$$L^2(X,\mathrm{d}\mu(z))=\bigoplus_{\delta_v\in\widehat{U(1)}}L^2(X,V_{-v})\otimes V_v,$$

其中

$$L^2(X,V_{-v})=\{f\in L^2(X,\mathrm{d}\mu(z)):f(uz)=\delta_{-v}(u)^{-1}f(z),u\in U(1),v\in\mathbb{Z}\}.$$

设 $\mathcal{D}(X,V_{-v})$ 是 X 上有紧支集的光滑函数全体构成的集合, 其为 $L^2(X,V_{-v})$ 的稠子空间. 设 $C_s^{\infty}(\Sigma,V_{-v})$ 与 $C_s^{\infty}(\Xi,V_{-v})$ 有相同条件的光滑函数空间, 其中 $\Sigma=\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^{2n-1}$, $\mathbb{S}^{2n-1}$ 为 $2n-1$ 维单位球面.

定义 3 定义 Poisson 变换 $\mathcal{P}_v:C_s^{\infty}(\Sigma,V_{-v})\to\mathcal{D}(X,V_{-v})$,

$$\mathcal{P}_vf(s,z)=\int_{\Sigma}|[z,\sigma]|^{is-3n-2}f(\sigma)\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $\sigma\in\Sigma,\ f\in C_s^{\infty}(\Sigma,V_{-v})$.

易知 $\mathcal{P}_v$ 是 $U(1,n)$ 表示的缠结算子. 下面引入 X 的极坐标. 任取 $z\in X,(\sigma_1,\sigma_2)\in\Sigma$, 设 $z=(\sigma_1\cosh t,\sigma_2\sinh t)$, 其中 $\sigma_1\in\mathbb{S}^1,\sigma_2\in\mathbb{S}^{2n-1}$, $t\in[0,\infty)$. 由文献 [9] 可知, 若 $f(\sigma)\in C_s^{\infty}(\Sigma,V_{-v})$ 是一个 K 有限的函数, 则存在函数 $f\in\mathcal{D}(X,V_{-v})$, 使得 $f(z)=F(t)f(\sigma)$, 其中 $F(t)$ 为 $[0,\infty)$ 上带有紧支集的光滑函数.

引理 7[13] 对于 $s\in\mathbb{R}$, 任取 $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)\in\Sigma$, 有

$$\int_{\Sigma}|\langle\sigma_1,\sigma_1'\rangle\cosh t-\langle\sigma_2,\sigma_2'\rangle\sinh t|^{is-3n-2}f(\sigma')\mathrm{d}\sigma'=\Phi_{j,l;k,m}(t,s)f(\sigma),$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为欧氏空间标准内积,

$$\Phi_{j,l;k,m}(t,s)=\beta_{j,l;k,m}(s)\Psi_{j,k}(t),\quad \beta_{j,l;k,m}(s)=\frac{\Gamma(n)(-1)^{\frac{j-k}{2}}\Gamma(\frac{is-n-2+k+j}{2})\Gamma(-\frac{is-n-4}{2})}{\Gamma(\frac{is-n-2+|v|}{2})\Gamma(-\frac{is-n+k-j-4}{2})},$$

$$\Psi_{j,k}(t)=\cosh^j t\sinh^k tF_1\left(\frac{k+\frac{n-1}{2}+j+s}{2},\frac{k+\frac{n-1}{2}+j-s}{2};k+\frac{n}{2};-\sinh^2 t\right).$$

注 3 若选取 X^{-}, 此处极坐标会变为 $(\sigma_1\cosh t,\sigma_2\sinh t)$, 其中 $(\sigma_1,\sigma_2)\in\Sigma'=\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^1$. 依然有类似的结果, 只需要调整 $\cosh t$ 与 $\sinh t$ 的位置即可.

利用引理 7, Poisson 变换可转化为

$$\mathcal{P}_vf(s,t,\sigma)=\Phi_{j,l;k,m}(t,s)f(\sigma).$$

定义 4 设 $A(t)=2^{2n}\cosh t\sinh^{2n-1}t$. 任取 $F(t)\in C_c^{\infty}([0,\infty))$, 定义 Fourier-Poisson 积分:

$$\widetilde{\mathcal{P}_v}f(s,\sigma)=\int_0^{\infty}F(t)\mathcal{P}_vf(s,t,\sigma)A(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $(is,\sigma)\in i\mathbb{R}\times\Sigma$.

利用定义 3 和引理 7, 可知

$$\widetilde{\mathcal{P}_v}f(s,\sigma)=\widetilde{F}(s)f(\sigma),$$

其中

$$\widetilde{F}(s)=\beta_{j,l;k,m}(s)\widehat{F}_{j,k}(s),\quad \widehat{F}_{j,k}(s)=\int_0^\infty F(t)\Psi_{j,k}(t,s)A(t)\mathrm{d}t.$$

引理 8[9]　$\widehat{F}_{j,k}(s)$ 的 Plancherel 公式为

$$\int_0^\infty |F(t)|^2A(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty |\widehat{F}_{j,k}(s)|^2\frac{\mathrm{d}s}{|c_{j,k}(is)|^2} \tag{7}$$

其中

$$c_{j,k}(is)=2^{n-is}\frac{\Gamma(k+n)\Gamma(is)}{\Gamma(\frac{k-j+n+is}{2})\Gamma(\frac{k+j+n+is}{2})}.$$

定理 3　任取 $f\in\mathcal{D}(X,V_{-v})$, 有

$$\int_X |f(z)|^2\mathrm{d}\mu(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \|\widetilde{\mathcal{P}_v}f(is,\cdot)\|^2_{L^2_{is}(\Sigma,V_{-v})}\frac{\mathrm{d}s}{\mu(v,is)} \tag{8}$$

其中

$$\mu(v,is)=c_{j,k}(is)c_{j,k}(-is)\beta_{j,l;k,m}(is)\beta_{j,l;k,m}(-is).$$

对于 $s\in\mathbb{R}$, $L^2(X,V_{-v})$ 在 $U(1,n)$ 下有不可约分解:

$$L^2(X,V_{-v})\cong\int_0^\infty \tilde{\pi}_{is,v}\frac{\mathrm{d}s}{\mu(v,is)},$$

其中 $\tilde{\pi}_{is,v}$ 是 $L^2_{is}(\Sigma,V_{-v})$ 的主序列表示.

证明　设 $\mathrm{d}z=((4\pi^{n+1}2^{-2n})/(n-1)!)A(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma$. 在式 (7) 两端同时乘以 $\int_\Sigma |f(\sigma)|^2\mathrm{d}\sigma$, 将式 (8) 左边转化为

$$\frac{(n-1)!}{4\pi^{n+1}2^{-2n}}\int_X |f(z)|^2\mathrm{d}x.$$

由恒等式

$$|\widehat{F}_{j,k}(s)|^2=\int_0^\infty F(t)\Psi_{j,k}(t,s)A(t)\mathrm{d}t\overline{\int_0^\infty F(t)\Psi_{j,k}(t,s)A(t)\mathrm{d}t},$$

得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty |\widehat{F}_{j,k}(s)|^2\frac{\mathrm{d}s}{|c_{j,k}(is)|^2}\int_\Sigma |f(\sigma)|^2\mathrm{d}\sigma\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty F(t)\Psi_{j,k}(t,s)A(t)\mathrm{d}t\overline{\int_0^\infty F(t)\Psi_{j,k}(t,s)A(t)\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s}{|c_{j,k}(is)|^2}\int_\Sigma f(\sigma)\overline{f(\sigma)}\mathrm{d}\sigma.\end{aligned}$$

结合 $\Phi_{j,l;k,m}(t,s)=\beta_{j,l;k,m}(s)\Psi_{j,k}(t)$ 及 $\mathcal{P}_v(s,t,\sigma)$ 的定义可知

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty |\widehat{F}_{j,k}(s)|^2\frac{\mathrm{d}s}{|c_{j,k}(is)|^2}\int_\Sigma |f(\sigma)|^2\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \|\widetilde{\mathcal{P}_v}f(is,\cdot)\|^2_{L^2_{is}(\Sigma,V_{-v})}\frac{\mathrm{d}s}{\mu(v,is)}.$$

由式 (4), 对于 $\eta<-1$, 令 $z\to\sqrt{|\eta|}z$, 有

$$\mathcal{F}_vf(\zeta,s,\xi)=\int_{\mathbb{R}}e^{i\eta\zeta}F(\eta,s,\xi)\mathrm{d}\eta \tag{9}$$

其中

$$F(\eta,s,\xi)=|\eta|^{\frac{is-n}{2}}\int_{|z_1|^2-|z_2|^2-\cdots-|z_{n+1}|^2=-1}|[z,\xi]|^{is-3n-2}f(\sqrt{|\eta|}z)\mathrm{d}\mu(z),$$

$\mathrm{d}\mu(z)$ 表示双曲测度. 由引理 4, 得 $F(\eta,s,\xi)\in C^\infty(\mathbb{R})\widehat{\otimes}C_s^\infty(\Xi,V_{-v})$. 设 $(\sigma_1,\sigma_2)\in\mathbb{S}^{2n-1}\times\mathbb{S}^1$, 利用极坐标变换 $z=(\sigma_1\cosh t,\sigma_2\sinh t)$, 有

$$\mathrm{d}\mu(z)=\frac{4\pi^{n+1}2^{-2n}}{(n-1)!}A'(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $A'(t)=2^{2n}\cosh^{2n-1}t\sinh t$. 结合 $f(z)=F(t)f(\sigma)$ 以及 $f(\sigma)$ 的齐次性得到

$$F(\eta,s,\xi)=\frac{4\pi^{n+1}2^{-2n}}{(n-1)!}|\eta|^{\frac{is-n}{2}}|\eta|^{\frac{is-3n-2}{2}}\int_0^\infty F(t)\left(\int_\Sigma|[(\sigma_1\cosh t,\sigma_2\sinh t),\xi]|^{is-3n-2}f(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)A'(t)\mathrm{d}t,$$

由引理 7 和定义 4, 可得

$$\frac{4\pi^{n+1}2^{-2n}}{(n-1)!}|\eta|^{is-2n-1}f(\xi)\int_0^\infty F(t)\Phi_{j,l;k,m}(t,s)A'(t)\mathrm{d}t=\frac{4\pi^{n+1}2^{-2n}}{(n-1)!}|\eta|^{is-2n-1}\widetilde{\mathcal{P}_v}f(s,\sqrt{|\eta|}\xi).$$

综合起来得到

$$F(\eta,s,\xi)=\frac{4\pi^{n+1}2^{-2n}}{(n-1)!}|\eta|^{is-2n-1}\widetilde{\mathcal{P}_v}f(s,\sqrt{|\eta|}\xi).$$

对于任意的 $f\in C_c^\infty(\mathbb{C}^{1+n},V_{-v})$ 且支集在 $\{z\in\mathbb{C}^{1+n}:[z,z]<-1\}$ 上, 得到下面恒等式

$$\int_{\mathbb{C}^{1+n}}|f(z)|^2|\mathrm{d}z|^2=\int_{-\infty}^{-1}|\eta|^{n+1}\left(\int_{X^-}|f(\sqrt{|\eta|}z)|^2\mathrm{d}\mu(z)\right)\mathrm{d}\eta.$$

进而

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{-1}|\eta|^{n+1}\left(\int_{X_-}|f(\sqrt{|\eta|}z)|^2\mathrm{d}\mu(z)\right)\mathrm{d}\eta\\&=\int_{-\infty}^{-1}|\eta|^{n+1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_\Sigma|\widetilde{\mathcal{P}_v}f(is,\sqrt{|\eta|}\sigma)|^2\mathrm{d}\sigma\frac{\mathrm{d}s}{\mu(v,is)}\right)\mathrm{d}\eta\\&=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{2^{2n}(n-1)!}{4\pi^{n+1}}\right]^2\int_{-\infty}^{-1}|\eta|^{-3n-1}\left(\int_0^\infty\int_\Sigma|F(\eta,is,\sigma)|^2\mathrm{d}\sigma\frac{\mathrm{d}s}{\mu(v,is)}\right)\mathrm{d}\eta.\end{aligned}$$

根据式 (3) 以及 $\int_1^\infty 1/(|\eta|^{3n+1})\mathrm{d}\eta$ 可积, 再结合式 (9) 得

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{C}^{1+n},V_{-v})}=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty\|\mathcal{F}_vf(\cdot,is,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})\otimes L^2_{is}(\Xi,V_{-v})}\frac{\mathrm{d}s}{\mu(v,is)}.$$

4 研究结果及展望

本文从经典的紧群表示理论出发对空间 $L^2(\mathbb{C}^{1+n})$ 进行了分解, 再借助群 $SL(2,\mathbb{R})\times U(1,n)$ 对空间 $L^2(\mathbb{C}^{1+n},V_{-v})$ 进行谱分解:

$$L^2(\mathbb{C}^{1+n},V_{-v})\cong\int_0^\infty\pi_{is}^\pm\otimes\tilde{\pi}_{is,v}\mathrm{d}\mu(s).$$

该结果在某种程度上解决了文献 [14] 中所提出的相关问题. 从技术层面上来说, 本文采用了 Fourier-Poisson 变换, 该变换在文献 [13,15] 中均有涉及. 此外, 本文有诸多不足之处, 究其原因是振荡积分的定义有局限性, 这样会导致对空间 $L^2(\mathbb{C}^{1+n})$ 分解不够彻底, 从而遗失离散序列表示的情形. 但对于群 $SL(2,\mathbb{R})$ 来说, 还可以考虑此群在加权 Hilbert 空间 $L^2(\mathbb{R},(1+x^2)^{\mathrm{Re}w}\mathrm{d}x)$ 上对应的相关表示 (见注 2), 其中 $w\in\mathbb{C}$. 这就会产生一系列问题, 比如 $SL(2,\mathbb{R})$ 的非酉主序列对应到 $U(1,n)$ 是什么表示? 该表示如何定义? 又如何精确地给出空间 $L^2(\mathbb{C}^{1+n})$ 的分解? 即是否有更为精确的 Plancherel 公式. 由于一大类 $SL(2,\mathbb{R})$ 的不可约酉表示的 Plancherel 测度为 0, 它们不会出现在 Plancherel 公式中, 将来笔者会继续考虑非酉表示的相关问题.

参考文献:

[1] WEIL A. Sur certains groupes d'opérateurs unitaires[J]. Acta Mathematica，1964，111：143-211.

[2] SEGAL I E，MACKEY G W. Mathematical problems of relativistic physics[M]. Providence，R I：American Mathematical Society，1963.

[3] SHALE D, STINESPRING W F. The quantum harmonic oscillator with hyperbolic phase space[J]. Journal of Functional Analysis, 1967, 1(4): 492-502.

[4] FOLLAND G B. Harmonic analysis in phase space[M]. Princeton, N J: Princeton University Press, 1989.

[5] KASHIWARA M, VERGNE M. On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials[J]. Inventiones Mathematicae, 1978, 44(1): 1-47.

[6] HOWE R. Remarks on classical invariant theory[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1989, 313(2): 539-570.

[7] HOWE R. Transcending classical invariant theory[J]. Journal of the American Mathematical Society, 1989, 2(3): 535-552.

[8] ØRSTED B, ZHANG G K. L^2-versions of the Howe correspondence[J]. Mathematica Scandinavica, 1997, 80(1): 125-160.

[9] ØRSTED B, ZHANG G K. L^2-versions of the Howe correspondence I[J]. Journal de Mathematiques Pures et Appliquees, 1995, 74(2): 165-183.

[10] HOWE R E, TAN E C. Homogeneous functions on light cones: The infinitesimal structure of some degenerate principal series representations[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1993, 28(1): 1-74.

[11] BRÖKER T, DIECK T T. Representations of compact Lie groups[M]. New York: Springer, 1995.

[12] KNAPP A W. Representation theory of semisimple groups, an overview based on examples[M]. Princeton, N J: Princeton University Press, 1986.

[13] SCHLICHTKRULL H. Eigenspaces of the Laplacian on hyperbolic spaces: Composition series and integral transforms[J]. Journal of Functional Analysis, 1987, 70(1): 194-219.

[14] HUANG J S, ZHOU L. Generalized Fourier transforms associated with the oscillator representation[J]. Journal of Fourier Analysis and Applications, 2019, 25(5): 2782-2800.

[15] STRICHARTZ R S. Harmonic analysis as spectral theory of Laplacians[J]. Journal of Functional Analysis, 1989, 87(1): 51-148.

责任编辑: 赵新科

(上接第278页)

[23] MCCANN K, HASTINGS A, HUXEL G R. Weak trophic interactions and the balance of nature[J]. Nature, 1998, 395: 794-798.

[24] QUÉVREUX P, PIGEAULT R, LOREAU M. Predator avoidance and foraging for food shape synchrony and response to perturbations in trophic metacommunities[J]. Journal of Theoretical Biology, 2021, 528: 110836.

[25] SHEPPARD L W, BELL J R, HARRINGTON R, et al. Changes in large-scale climate alter spatial synchrony of aphid pests[J]. Nature Climate Change, 2016, 6: 610-613.

[26] VASSEUR D A, FOX J W, GONZALEZ A, et al. Synchronous dynamics of zooplankton competitors prevail in temperate lake ecosystems[J]. Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences, 2014, 281(1788): 20140633.

[27] 马雯, 丁建丽, 白婷. 新疆地区气溶胶变化对降水和植被的影响分析[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2022, 39(5): 615-624.
MA W, DING J L, BAI T. Impact of aerosol changes on precipitation and vegetation in Xinjiang region[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2022, 39(5): 615-624. (in Chinese)

[28] ZHAO T T, YU J, HU C. Fixed-time synchronization of multi-layer networks via periodically intermittent control[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2022, 39(6): 648-653.

[29] FAN H W, KONG L W, WANG X G, et al. Synchronization within synchronization: Transients and intermittency in ecological networks[J]. National Science Review, 2020, 8(10): nwaa269.

[30] JARILLO J, SÆTHER B E, ENGEN S, et al. Spatial scales of population synchrony in predator-prey systems[J]. The American Naturalist, 2020, 195(2): 216-230.

责任编辑: 赵新科