第 40 卷第 1 期 新疆大学学报（自然科学版）（中英文） Vol.40, No.1
2023 年 1 月 Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English) Jan., 2023

关于仿射对称空间$SU(2,2)/SL(2,\mathbb{C})+\mathbb{R}$非紧分歧离散谱的一点注记*

韩 威，范兴亚†

(新疆大学 数学与系统科学学院，新疆 乌鲁木齐 830017)

摘 要： 利用李代数$\mathfrak{so}(4,\mathbb{C})$的结构, 证明了仿射对称空间$SU(2,2)/SL(2,\mathbb{C})+\mathbb{R}$和$SO(2,4)/SO(1,1)\times SO(1,3)$局部同构. 结合$SO(2,4)/SO(1,1)\times SO(1,3)$上的Kabayashi定理, 作者得到了李群$SU(2,2)$的离散序列表示在其子群$SL(2,\mathbb{C})+\mathbb{R}$上的消灭定理.

关键词： 仿射对称空间; 离散序列表示; 消灭定理

DOI： 10.13568/j.cnki.651094.651316. 2022.04.11.0004

中图分类号： O152.5 **文献标识码：** A **文章编号：** 2096-7675(2023)01-0017-06

引文格式： 韩威, 范兴亚. 关于仿射对称空间$SU(2,2)/SL(2,\mathbb{C})+\mathbb{R}$非紧分歧离散谱的一点注记[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2023, 40(1): 17-22+29.

英文引文格式： HAN Wei, FAN Xingya. A note of the noncompact discrete spectra of branching law on affine symmetric space $SU(2,2)/SL(2,\mathbb{C})+\mathbb{R}$[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2023, 40(1): 17-22+29.

A Note of the Noncompact Discrete Spectra of Branching Law on Affine Symmetric Space $SU(2,2)/SL(2,\mathbb{C})+\mathbb{R}$

HAN Wei, FAN Xingya

(*School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China*)

Abstract： The local isomorphism of affine symmetric spaces of Hermitian type $SU(2,2)/SL(2,\mathbb{C})+\mathbb{R}$ and $SO(2,4)/SO(1,1)\times SO(1,3)$ is proved, via the structure of Lie algebra $\mathfrak{so}(4,\mathbb{C})$. Combing with Kabayashi's theorem on $SO(2,4)/SO(1,1)\times SO(1,3)$, the author obtained the vanishing theorem for the discrete series representation of Lie group $SU(2,2)$ on its subgroup $SL(2,\mathbb{C})+\mathbb{R}$.

Key words： affine symmetric spaces; discrete series representation; the vanishing theorem

0 引 言

对称空间上的调和分析和表示论是傅里叶级数和傅里叶变换等经典理论的一个推广, 目前正在蓬勃地发展. 该领域的主要研究内容是有限维或者无限维Hilbert空间中的群表示理论, 相关的研究成果极大地推动了数学、物理等相关领域的发展. 设X是一个对称空间, 李群G在X上具有迁徙性, X上有G不变的Haar测度, 则存在一个G在Hilbert空间$L^2(X)$上的表示, 使得此表示是一个酉表示. 对称空间上的调和分析和表示论的主要研究内容之一是酉表示的分解, 将其分解成不可约子表示的直和, 得到抽象的Plancherel公式, 从而达到解决问题的目的. 一般情形下, 酉表示的分解依赖于G的结构. 因此限定G和子群H的结构是有必要的. 取G是一个实半单李

* 收稿日期：2022-04-11

基金项目：国家自然科学基金“仿射对称空间上的调和分析”（12161083）,“关于高维非线性双曲偏微分方程低正则解的局部和整体适定性”（12126360）; 新疆维吾尔自治区自然科学基金“相关于多尺度各向异性椭球族的函数空间及相关算子的有界性”（2020D01C048）,“傅里叶积分算子的有界性研究”（2021D01C071）.

作者简介：韩威（1996-）, 男, 硕士生, 从事李群表示论的研究, E-mail: hanwei@stu.xju.edu.cn.

† 通讯作者：范兴亚（1986-）, 男, 博士, 副教授, 主要从事李群表示论的研究, E-mail: fanxingya@xju.edu.cn.

群, H是G的一个闭子群, $X=G/H$是一个半单对称空间. 如果X有足够好的性质, 则李群G的酉表示分解可由连续和离散两部分构成. 一般而言, 由于半单对称空间的结构相当复杂, 考虑酉表示的不可约分解时, 往往得不到具体的连续部分, 进而很多学者转向离散部分的分解. 设$L^2(X)_d$是半单对称空间X上的Hilbert空间$L^2(X)$的闭子集, 将其定义为离散序列. Oshima和Matsuki[1]在Flensted-Jensen[2]和Harish-Chandra[3]的工作基础上, 给出了离散序列存在的条件: 如果对称空间X不存在紧的Cartan子空间, 则$L^2(X)_d=0$; 如果对称空间X存在一个紧的Cartan子空间, 则有

$$L^2(X)_d=\bigoplus_{\omega\in\mathcal{P}}A(\omega),$$

其中$\mathcal{P}$是所有离散序列表示的参数集, $A(\omega)$是一个$L^2(X)_d$酉嵌入. 文献[1]中, 作者并没有给出$A(\omega)$不可约的证明. 1988年, Vogan[4]在文献[1]的基础上, 利用Zuckerman函子证明了$A(\omega)$要么是不可约的, 要么是$\{0\}$.

设G'是G的一个约化子群, 当G作用在$L^2(X)$上的离散序列表示限制到子群G'的离散部分时, 又称为此离散序列表示在群G'表示下的分歧. 设π是G作用在$L^2(X)$上的离散序列表示, 考虑把G作用在$L^2(X)$上的不可约离散序列表示π限制到子群G', 得到子群G'的酉表示$\pi|_{G'}$, 它可直和分解为离散部分和连续部分:

$$\pi|_{G'}=(\pi|_{G'})_d\oplus(\pi|_{G'})_c.$$

如果子群G'是紧群时, 上述分解已经讨论清楚了, 通用的方法是Zuckerman导出函子模、Dolbeault上同调、双曲面上特征空间的分解和抛物诱导模的子表示等(参见文献[5-9]). 2003年, Kobayashi[10−11]等在特殊李群上通过共形几何的方法以及Yamabe方程, 概述了G'是紧群情况的分歧法则. 如果G'是非紧子群时, Kobayashi提出一个问题: 什么时候$(\pi|_{G'})_d=\{0\}$? 直到2021年, Kobayashi[12]在正交群$O(p,q)$上完全证明了此问题, 并完全得到了$O(p,q)$离散序列表示限制到子群G'上的分歧离散部分的所有情况. 本文主要证明了以$L^2(SU(2,2)/SL(2,\mathbb{C})+\mathbb{R})$为表示空间的$SU(2,2)$的离散序列表示中不存在子群$SL(2,\mathbb{C})+\mathbb{R}$限制下的分歧.

1 符号和主要引理

定义李群$SU(2,2)=\{S\in SL(4,\mathbb{C}):S^*I_{2,2}S=I_{2,2}\}$, 其中$I_{2,2}=\mathrm{diag}(-1,-1,1,1)$. 其李代数定义为

$$\mathfrak{su}(2,2)=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta^* & \delta\end{pmatrix}:\ \alpha,\beta,\delta\in M_2(\mathbb{C}),\alpha^*=-\alpha,\delta^*=-\delta,\mathrm{tr}\ \alpha+\mathrm{tr}\ \delta=0\right\}.$$

在Cartan对合θ(即, 对于任意的$X\in\mathfrak{su}(2,2)$, $\theta(X)=-X^*$)之下将$\mathfrak{su}(2,2)$分解为$\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$, 其中

$$\mathfrak{k}=\{X\in\mathfrak{su}(2,2):\ \theta(X)=X\}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix}:\ \begin{array}{c}\alpha,\delta\in M_2(\mathbb{C}),\alpha^*=-\alpha\\ \delta^*=-\delta,\mathrm{tr}\ \alpha+\mathrm{tr}\ \delta=0\end{array}\right\},$$

$$\mathfrak{p}=\{X\in\mathfrak{su}(2,2):\ \theta(X)=-X\}=\left\{\begin{pmatrix}0 & \beta\\ \beta^* & 0\end{pmatrix}:\beta\in M_2(\mathbb{C})\right\}.$$

定义李群$SU(2,2)$上的一个对合变换

$$\sigma\left(\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}D & C\\ B & A\end{pmatrix}.$$

令H是满足$\sigma(SU(2,2))=SU(2,2)$的子群, 即

$$H=\left\{\begin{pmatrix}A & B\\ B & A\end{pmatrix}:\ A,B\in M_2(\mathbb{C}),A^*A-B^*B=I_2,B^*A=A^*B\right\}\tag{1}$$

对合变换σ诱导$SU(2,2)$的李代数$\mathfrak{su}(2,2)$分解为$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{q}$, 其中

$$\mathfrak{h}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}:\ \alpha,\beta\in M_2(\mathbb{C}),\alpha^*=-\alpha,\beta^*=\beta,\mathrm{tr}\ \alpha=0\right\},$$

$$\mathfrak{q}=i\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & -\alpha\end{pmatrix}:\ \alpha,\beta\in M_2(\mathbb{C}),\alpha^T=\alpha,\ \beta^T=\beta\right\}.$$

设

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}=\left\{i\begin{pmatrix}0 & t\\ -t & 0\end{pmatrix}:t=\mathrm{diag}(t_1,t_2),t_1,t_2\in\mathbb{R}\right\}$$

是$\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$的极大阿贝尔子代数. 对应的李群定义为$A_{\mathfrak{p}}=\exp\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$.

引理 1[13] $SU(2,2)/SL(2,\mathbb{C})+\mathbb{R}$是一个Hermite型仿射对称空间.

证明　只需验证以下两个条件:

(i) 在$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$中不存在$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$的非平凡理想, 其中$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$和$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$分别是李代数$\mathfrak{h}$和$\mathfrak{g}$的复化.

(ii) 设$\mathfrak{c}_{\mathbb{C}}$是$\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}\cap\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$的中心, 且有$\mathfrak{z}_{\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{c}_{\mathbb{C}})=\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}\cap\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$, 其中$\mathfrak{z}_{\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{c}_{\mathbb{C}})$是$\mathfrak{c}_{\mathbb{C}}$在$\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$里的中心化子.

因为$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}=\mathfrak{sl}(4,\mathbb{C})$是半单李代数, $\mathfrak{h}$的复化形式是

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}:=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix}:\alpha\in M_2(\mathbb{C}),\beta\in M_2(\mathbb{C}),\mathrm{tr}\ \alpha=0\right\},$$

根据$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$中元素的任意性和李代数理想的定义, 则条件(i)是自然成立的. 下面我们验证条件(ii). 因为

$$\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix}:\alpha\in M_2(\mathbb{C}),\delta\in M_2(\mathbb{C}),\mathrm{tr}\ (\alpha+\delta)=0\right\},$$

$$\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & -\alpha\end{pmatrix}:\alpha\in M_2(\mathbb{C}),\beta\in M_2(\mathbb{C})\right\}.$$

因此

$$\mathfrak{q}_{\mathfrak{k}}^{\mathbb{C}}:=\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}\cap\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & -\alpha\end{pmatrix}:\alpha\in M_2(\mathbb{C})\right\}.$$

容易计算$\mathfrak{q}_{\mathfrak{k}}^{\mathbb{C}}$的中心为

$$\mathfrak{c}_{\mathbb{C}}=\left\{\begin{pmatrix}\widetilde{\alpha} & 0\\ 0 & -\widetilde{\alpha}\end{pmatrix}:\widetilde{\alpha}=aI_2,a\in\mathbb{C}\backslash\{0\}\right\}.$$

设

$$M=\begin{pmatrix}\alpha' & \beta'\\ -\beta' & -\alpha'\end{pmatrix}\in\mathfrak{z}_{\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{c}_{\mathbb{C}}),\ \forall\alpha'\in M_2(\mathbb{C}),\ \forall\beta'\in M_2(\mathbb{C}),$$

则, 对任意$a\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, 有

$$[M,\mathfrak{c}_{\mathbb{C}}]=M\mathfrak{c}_{\mathbb{C}}-\mathfrak{c}_{\mathbb{C}}M=\begin{pmatrix}a\alpha' & -a\beta'\\ -a\beta' & a\alpha'\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a\alpha' & a\beta'\\ a\beta' & a\alpha'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2a\beta'\\ -2a\beta' & 0\end{pmatrix}=\mathbf{0}.$$

由此得到$\beta'=\mathbf{0}$, 从而

$$M=\begin{pmatrix}\alpha' & 0\\ 0 & -\alpha'\end{pmatrix}\in\mathfrak{q}_{\mathfrak{k}}^{\mathbb{C}}.$$

所以$\mathfrak{z}_{\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{c}_{\mathbb{C}})\subset\mathfrak{q}_{\mathfrak{k}}^{\mathbb{C}}$. 显然, 由$\mathfrak{c}_{\mathbb{C}}$的定义可知$\mathfrak{q}_{\mathfrak{k}}^{\mathbb{C}}\subset\mathfrak{z}_{\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{c}_{\mathbb{C}})$, 有$\mathfrak{z}_{\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{c}_{\mathbb{C}})=\mathfrak{q}_{\mathfrak{k}}^{\mathbb{C}}=\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}\cap\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$. 这就验证了条件(ii). 因此$SU(2,2)/SL(2,\mathbb{C})+\mathbb{R}$是一个Hermite型仿射对称空间.

定义 1　设李代数$\mathfrak{so}(4,\mathbb{C}):=\{A=(a_{ij})_{1\le i,j\le 4}\in M_4(\mathbb{C}):\ A^T+A=0\}$(上标$T$代表转置). 定义$\mathfrak{so}(4,\mathbb{C})$的子空间是

$$\mathcal{E}=\left\{X=\begin{pmatrix}0 & x_1+ix_2 & x_3+ix_4 & x_5+ix_6\\ -x_1-ix_2 & 0 & x_5-ix_6 & -x_3+ix_4\\ -x_3-ix_4 & -x_5+ix_6 & 0 & -x_1+ix_2\\ -x_5-ix_6 & x_3-ix_4 & x_1-ix_2 & 0\end{pmatrix}:\ x_i\in\mathbb{R},i=1,\cdots,6\right\}.$$

李群$SU(2,2)$作用在$\mathcal{E}$上的表示为

$$\varrho:\ SU(2,2)\times\mathcal{E}\to\mathcal{E},\ (g,X)\mapsto\varrho(g)X=gXg^T \tag{2}$$

根据定义1, 可得到如下引理.

引理 2[14] 群$SU(2,2)$同构于$SO(2,4)$.

证明 只需证明$SU(2,2)$和$SO(2,4)$保持内积不变性即可. 对于任意的$X\in\mathcal{E}$, 取内积为

$$\frac{1}{4}\mathrm{tr}(XI_{2,2}\cdot X^*I_{2,2})=-x_1^2-x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2:=[x,x]_{2,4} \tag{3}$$

注意到此二次型是$SO(2,4)$不变的. 对于任意的$g\in SU(2,2)$, 根据迹的性质和$\mathfrak{so}(4,\mathbb{C})$的定义, 容易得到以下$SU(2,2)$的不变内积:

$$\frac{1}{4}\mathrm{tr}((\varrho(g)X)I_{2,2}(\varrho(g)X)^*I_{2,2})=\frac{1}{4}\mathrm{tr}(XI_{2,2}\cdot X^*I_{2,2}).$$

从而

$$\begin{aligned}&\left\{g\in SU(2,2):\ \frac{1}{4}\mathrm{tr}((\varrho(g)X)I_{2,2}(\varrho(g)X)^*I_{2,2})=\frac{1}{4}\mathrm{tr}(XI_{2,2}\cdot X^*I_{2,2}),\ \forall X\in\mathcal{E}\right\}\\&=\{g\in SO(2,4):\ [g\cdot x,g\cdot x]_{2,4}=[x,x]_{2,4},\forall x\in\mathbb{R}^6\}.\end{aligned}$$

引理得证.

引理 3[15] 设$K=\exp\mathfrak{k}$是$SU(2,2)$的极大紧子群, 对于任意的$g\in SU(2,2)$, 有$g=kah$, 其中$k\in K$, $a\in A_{\mathfrak{p}}$, $h\in H$.

引理3称之为著名的Cartan-Berger分解. 设$g\in SU(2,2), X\in\mathcal{E}$, 利用式(2)和引理3, 容易得到

$$\varrho(g)X=gXg^T=(kah)X(kah)^T=\varrho(k)\varrho(a)\varrho(h)X,$$

所以李群$SU(2,2)$的表示限制到子群H的表示是良定的.

2 主要结果

命题 1 群H局部同构于$SO(1,1)\times SO(1,3)$.

证明 取$\mathcal{E}$的子空间如下:

$$\mathcal{X}_1=\left\{\begin{pmatrix}0&ix_2&0&ix_6\\-ix_2&0&-ix_6&0\\0&ix_6&0&ix_2\\-ix_6&0&-ix_2&0\end{pmatrix}:\ x_2,x_6\in\mathbb{R}\right\}.$$

令$S_1=\begin{pmatrix}A_1&B_1\\B_1&A_1\end{pmatrix}\in\mathcal{X}_1$, 其中

$$A_1=\begin{pmatrix}0&ix_2\\-ix_2&0\end{pmatrix},B_1=\begin{pmatrix}0&ix_6\\-ix_6&0\end{pmatrix}.$$

任取$h_1=\begin{pmatrix}A&B\\B&A\end{pmatrix}\in H$, 其中$H$同(1), 结合(2), 有

$$\varrho(h_1)S_1=h_1S_1h_1^T=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}\end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}=AA_1A^T+BB_1A^T+AB_1B^T+BA_1B^T,\\\boldsymbol{B}=AA_1B^T+BB_1B^T+AB_1A^T+BA_1A^T.\end{cases}$$

因为$\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}^T=-\boldsymbol{B}$, 所以$\varrho(h_1)S_1=h_1S_1h_1^T\in\mathcal{X}_1$, 即$\varrho(H)\mathcal{X}_1\subset\mathcal{X}_1$. 又因为$\varrho(H)$保持如式(3)所定义的内积不变, 则$\varrho(H)$在空间$\mathcal{X}_1$上实现为$SO(1,1)$. 另设$\mathcal{E}$的子空间如下:

$$\mathcal{X}_2=\left\{\begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_3+ix_4 & x_5 \\ -x_1 & 0 & x_5 & -x_3+ix_4 \\ -x_3-ix_4 & -x_5 & 0 & -x_1 \\ -x_5 & x_3-ix_4 & x_1 & 0 \end{pmatrix} : x_1,x_3,x_4,x_5\in\mathbb{R}\right\}.$$

令$S_2=\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ -B_2 & -A_2 \end{pmatrix}\in\mathcal{X}_2$, 其中

$$A_2=\begin{pmatrix} 0 & x_1 \\ -x_1 & 0 \end{pmatrix}, B_2=\begin{pmatrix} x_3+ix_4 & x_5 \\ x_5 & -x_3+ix_4 \end{pmatrix}.$$

所以

$$\varrho(h_1)S_2=h_1S_2h_1^T=\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{F} \\ -\boldsymbol{F} & -\boldsymbol{E} \end{pmatrix},$$

其中

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}=AA_2A^T-BB_2A^T+AB_2B^T-BA_2B^T, \\ \boldsymbol{F}=AA_2B^T-BB_2B^T+AB_2A^T-BA_2A^T. \end{cases}$$

因为$\boldsymbol{E}^T=-\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{F}^T=\boldsymbol{F}$. 所以$\varrho(h_1)S_2=h_1S_2h_1^T\in\mathcal{X}_2$, 即$\varrho(H)\mathcal{X}_2\subset\mathcal{X}_2$. 又因为$\varrho(H)$保持内积不变, 所以$\varrho(H)$在空间$\mathcal{X}_2$上实现为$SO(1,3)$. 根据上述两方面的讨论, $\mathcal{E}$可分解为H的不变子空间的直和$\mathcal{X}_1\oplus\mathcal{X}_2$, 从而$T(H)$在空间$\mathcal{E}$上实现为$SO(1,1)\times SO(1,3)$. 命题1证毕.

为了给出主要定理, 需要引进著名的Kobayashi定理.

设$p=p'+p''$, $q=q'+q''$,

$$A_+(p,q):=\begin{cases} \{\lambda\in\mathbb{Z}+\frac{p+q}{2}:\lambda>0\}, & (p\geq 2, q\geq 1), \\ \{\lambda\in\mathbb{Z}+\frac{p}{2}:\lambda\geq\frac{p}{2}-1\}, & (p\geq 2, q=0), \\ \emptyset, & (p=1,q\geq 1)\ \text{或}\ (p=0), \\ \{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}, & (p=1,q=0). \end{cases}$$

定义集合

$$\Lambda_{-+}(\lambda):=\{(\lambda',\lambda'')\in A_-(p',q')\cap A_+(p'',q''):\lambda''-\lambda-\lambda'-1\in 2\mathbb{N}\},$$

$$\Lambda_{++}(\lambda):=\{(\lambda',\lambda'')\in A_+(p',q')\cap A_+(p'',q''):\lambda-\lambda'-\lambda''-1\in 2\mathbb{N}\},$$

$$\Lambda_{+-}(\lambda):=\{(\lambda',\lambda'')\in A_+(p',q')\cap A_-(p'',q''):\lambda'-\lambda''-\lambda-1\in 2\mathbb{N}\}.$$

引理 4[12] 对于$\lambda\in A_+(p,q)$, 设$\pi^{p,q}_{+,\lambda}$为$G=SO(p,q)$的不可约酉表示, $\pi^{p,q}_{+,\lambda}|_H$为此表示在子群H上的限制, 其中$H=SO(p',q')\times SO(p'',q'')$, 则离散部分可直和分解为:

$$\bigoplus_{(\lambda',\lambda'')\in\Lambda_{-+}(\lambda)}\pi^{p',q'}_{-,\lambda'}\boxtimes\pi^{p'',q''}_{+,\lambda''}\oplus\bigoplus_{(\lambda',\lambda'')\in\Lambda_{++}(\lambda)}\pi^{p',q'}_{+,\lambda'}\boxtimes\pi^{p'',q''}_{+,\lambda''}\oplus\bigoplus_{(\lambda',\lambda'')\in\Lambda_{+-}(\lambda)}\pi^{p',q'}_{+,\lambda'}\boxtimes\pi^{p'',q''}_{-,\lambda''},$$

其中$\pi^{p',q'}_{+,\lambda'}\boxtimes\pi^{p'',q''}_{-,\lambda''}\in\widehat{H}$是$\pi^{p',q'}_{+,\lambda'}\in\widehat{SO(p',q')}$和$\pi^{p'',q''}_{-,\lambda''}\in\widehat{SO(p'',q'')}$的外张量积, $\widehat{G}$表示李群G的酉表示等价类构成的集合.

现在我们给出李群$SU(2,2)$的离散序列表示在其子群$SL(2,\mathbb{C})+\mathbb{R}$上的消灭定理.

定理 1　李群$SU(2,2)$作用在$L^2(\mathcal{X})$上的不可约离散序列中不存在$SL(2,\mathbb{C})+\mathbb{R}$限制下的离散序列.

证明 由于$SO(2,4)/SO(1,1)\times SO(1,3)$是一个Hermite型仿射对称空间(见文献[16]), 则利用引理2 、引理3和命题1, 得到以下两个仿射对称空间局部同构

$$SU(2,2)/H\cong SO(2,4)/SO(1,1)\times SO(1,3).$$

结合此局部同构和引理4的条件, 有$p=2,\ q=4;\ p'=1,\ q'=1;\ p''=1,\ q''=3$. 所以

$$\begin{cases} A_+(2,4)=\{\lambda\in\mathbb{Z}+1:\lambda\geq\frac{1}{2}\},\\ A_+(1,1)=A_+(1,3)=\emptyset,\\ A_-(1,3)=A_+(3,1)=\{\lambda\in\mathbb{Z}+2:\lambda>0\}.\end{cases}$$

当$\lambda\in A_+(2,4)$, $\lambda'\in A_+(1,1)$, $\lambda''\in A_-(1,3)$时, 有$\lambda'-\lambda''-\lambda-1<0$, 从而$\Lambda_{+-}(\lambda)=\emptyset$. 根据引理4可知, 不存在$H$上限制的离散序列表示$\pi_\lambda^{2,4}|_H$.

3 结论和展望

本文通过证明$\mathcal{X}=SU(2,2)/SL(2,\mathbb{C})+\mathbb{R}$和$SO(2,4)/SO(1,1)\times SO(1,3)$的局部同构, 把$\mathcal{X}$的分歧理论转化到利于处理的$SO(2,4)/SO(1,1)\times SO(1,3)$的离散分歧理论, 然后利用Kobayashi定理解决问题. 虽然这是一种特殊情形, 但这也给我们提供了一个研究$SU(n,n)/SL(n,\mathbb{C})+\mathbb{R}$离散分歧理论的敲门砖, 为后面的工作指明了方向. 但是我们在考虑其推广时遇到了一些新问题:

(i) 根据低秩情形的讨论, 能否构造出具体的表示空间来证明高秩情形下的李群局部同构?

(ii) 能否找到一个通用的方法来证明任意秩情形下的李群局部同构?

对于以上两个问题, 我们将打算通过Mostow刚性定理来证明它们的局部同构.

Mostow刚性定理 设Γ_1与Γ_2分别是实半单李群G_1和G_2的格, 如果G_1和G_2的中心只有单位元且$\Gamma_1\cong\Gamma_2$, 则$G_1\cong G_2$.

借助Mostow刚性定理和引理 4, 后续我们将借助文献[17-18]的方法, 找到更易于处理的与$SU(n,n)$和$SL(n,\mathbb{C})+\mathbb{R}$局部同构的李群, 来讨论$SU(n,n)/SL(n,\mathbb{C})+\mathbb{R}$的离散谱分歧理论.

参考文献:

[1] OSHIMA T, MATSUKI T. Orbits on affine symmetric spaces under the action of the isotropy subgroups[J]. Journal of Mathematical Society of Japan, 1980, 32(2): 399-414.

[2] FLENSTED-JENSEN M. Discrete series for semisimple symmetric spaces[J]. Annals of Mathematics, 1980, 111(2): 253-311.

[3] HARISH-CHANDRA. Harmonic analysis on real reductive groups, I. The theory of the constant term[J]. Journal of Functional Analysis, 1975, 19(2): 104-204.

[4] VOGAN D. Irreducibility of discrete series representations for semisimple symmetric spaces. Representations of Lie groups[M]. Boston: Academic Press, 1988.

[5] FARAUT J. Distributions sphériques sur les espaces hyperboliques[J]. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1979, 58(4): 369-444.

[6] KOBAYASHI T. Singular unitary representations and discrete series for indefinite Stiefel manifolds $U(p,q;\mathbb{F})/U(p-m,q;\mathbb{F})$[J]. Memoirs of the American Mathematical Society, 1992, 462(95): 1-106.

[7] MÖLLERS J, OSHIMA Y. Restriction of most degenerate representations of $O(1,N)$ with respect to symmetric pairs[J]. Reports of the University of Electro-Communications, 2015, 27(1): 331-334.

[8] SUN B Y, ZHU C B. Multiplicity one theorems: the Archimedean case[J]. Annals of Mathematics, 2009, 175(1): 23-44.

[9] VOGAN D. Unitary representations of reductive Lie groups[M]. Princeton: Princeton University Press, 1987.

[10] KOBAYASHI T, ØRSTED B. Analysis on the minimal representation of $O(p,q)$. I. Realization via conformal geometry[J]. Advances in Mathematics, 2003, 180(2): 486-512.

[11] KOBAYASHI T, ØRSTED B. Analysis on the minimal representation of $O(p,q)$. II. Branching laws[J]. Advances in Mathematics, 2003, 180(2): 513-550.

[12] KOBAYASHI T. Branching laws of unitary representations associated to minimal elliptic orbits for indefinite orthogonal group $O(p,q)$[J]. Advances in Mathematics, 2021, 388: 107862.

(下转第 29 页)