第41卷第1期 新疆大学学报（自然科学版）（中英文） Vol.41, No.1
2024年1月 Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English) Jan., 2024

具有 $n-4$ 个悬挂点的双圈补图的最小特征值的下界*

周恋恋，刘 康，孟吉翔†

(新疆大学 数学与系统科学学院，新疆 乌鲁木齐 830017)

摘　要： 图的最小特征值作为刻画图结构性质的参数具有重要的研究意义, 且相比于谱半径, 图的最小特征值研究较少. 在补图简单无向且连通的情况下, 通过运用相关知识分析, 在有 $n-4$ 个悬挂点的 n 阶双圈图集中刻画了最小邻接特征值的下界.

关键词： 补图; 双圈图; 最小特征值; 下界

DOI： 10.13568/j.cnki.651094.651316.2023.02.02.0002

中图分类号： O157.5　**文献标识码：** A　**文章编号：** 2096-7675(2024)01-0020-07

引文格式： 周恋恋，刘康，孟吉翔. 具有 $n-4$ 个悬挂点的双圈补图的最小特征值的下界[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文)，2024，41(1)：20-26+36.

英文引文格式： ZHOU Lianlian，LIU Kang，MENG Jixiang. The lower bounds of the least eigenvalue of complements of bicyclic graphs with $n-4$ pendant vertices[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English)，2024，41(1)：20-26+36.

The Lower Bounds of the Least Eigenvalue of Complements of Bicyclic Graphs with $n-4$ Pendant Vertices

ZHOU Lianlian, LIU Kang, MENG Jixiang

(*School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China*)

Abstract： The least eigenvalue as a parameter to characterize the structural properties of a graph, has important research value. Comparing with the spectral radius, the least eigenvalue of a graph is less studied. The graphs in this paper are simple, undirected and connected, and we characterize the lower bounds of the least adjacency eigenvalue of graphs in the set of bicyclic graphs with n vertices and $n-4$ pendant vertices by using relevant knowledge analysis and demonstration.

Key words： complement graphs; bicyclic graphs; least eigenvalue; lower bounds

0　概 念

本文研究的图均为简单且无向的连通图, 图 $G=(V(G),E(G))$ 是由点集 $V(G)$ 和边集 $E(G)$ 组成, 其中 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, $E(G)=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$. 补图 $G^c=(V(G^c),E(G^c))$, 其中 $V(G^c)=V(G)$, $E(G^c)=\{v_iv_j \mid v_i,v_j\in V(G),v_iv_j\notin E(G)\}$. 图 G 的邻接矩阵为 $\boldsymbol{A}(G)=(a_{ij})_{n\times n}$, 当 v_i, v_j 相邻时, $a_{ij}=1$; 否则 $a_{ij}=0$. 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}(G)$ 所对应的特征值都是实数, 记为 $\lambda_1(G)\geq\lambda_2(G)\geq\cdots\geq\lambda_n(G)$, 最小特征值 $\lambda_n(G)$ 简记为 $\lambda(G)$, 称其对应的特征向量为图 G 的第一特征向量. 邻接矩阵的特征值及其重数的集合称为 A-谱. 设 $B_{n,n-4}$ 为有 $n-4$ 个悬挂点的 n 阶双圈图集, 则 $B^c_{n,n-4}$ 为其补图的集合. 图的邻接矩阵的特征值是图谱理论的一个重要课题, 其最小特征值的刻画得到了广泛研究. Johnsonc 等[1]在给定 n 个点和 k 条边的简单无向图中刻画了最小特征值达到最小的极图, Liu 等[2]确定了含有 k 个悬挂点的 n 阶单圈图的最小特征值达到最小的极图, Ye 等[3]在给定连通度的 n 阶图中得到了最小特征值达到最小的极图. 随后学者们研究了补图的最小特征值, Fan 等[4]在所有树的补图中证明了最小特征值达到最小的极图; Jiang 等[5]在有两个悬挂点的图中刻画了连通补图最小特征值达到

* 收稿日期：2023-02-02
基金项目：新疆维吾尔自治区高校科研计划自然科学重点项目“图矩阵的特征值及其应用”（XJEDU2021I001）.
作者简介：周恋恋（1997—），女，硕士生，从事图论及其应用的研究，E-mail：zhou_lianlian0715@163.com.
† 通讯作者：孟吉翔（1962—），男，博士，教授，从事图论及其应用的研究，E-mail：mjxxju@sina.com.

最小的极图. 基于以上研究, 本文在 $B^c_{n,n-4}$ 中刻画了最小邻接特征值的下界. 关于其它图矩阵的谱方面的研究也有很多, 具体可参阅文献 [6-10].

1　预备知识

记图 G 的点集 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, 假设单位向量 $X=(X_{v_1},X_{v_2},\cdots,X_{v_n})^T$ 使得 $X_{v_i}=X(v_i)(1\le i\le n)$, 则

$$X^T\boldsymbol{A}(G)X=2\sum_{uv\in E(G)}X_uX_v \tag{1}$$

图 G 中与点 v 相邻的点的集合定义为 v 的邻域, 记为 $N_G(v)$, 点 v 的度记为 $d(v)=|N_G(v)|$. 假设 $X\neq 0$ 是 G 的特征值 λ 对应的特征向量, 则对每个 $v_i\in V$ 有

$$\lambda X_{v_i}=\sum_{v_j\in N_G(v_i)}X_{v_j} \tag{2}$$

称该式为特征等式. 对于任意单位向量 $X\in\mathbb{R}^n$ 有

$$\lambda(G)\le X^T\boldsymbol{A}(G)X \tag{3}$$

等式成立当且仅当 X 是 G 的第一特征向量. 令 G^c 为图 G 的补图. 由补图的定义有

$$\boldsymbol{A}(G^c)=\boldsymbol{J}-\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}(G) \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{I}$ 分别表示 n 阶全 1 矩阵和单位矩阵.

引理 1[11] 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $m\times m$ 阶主子阵, 且 $\lambda_1(\boldsymbol{A})\ge\lambda_2(\boldsymbol{A})\ge\cdots\ge\lambda_n(\boldsymbol{A})$, $\mu_1(\boldsymbol{B})\ge\mu_2(\boldsymbol{B})\ge\cdots\ge\mu_n(\boldsymbol{B})$ 分别为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值, 则对于 $i=1,2,\cdots,m$, 有 $\lambda_{n-m+i}(\boldsymbol{A})\le\mu_i(\boldsymbol{B})\le\lambda_i(\boldsymbol{A})$.

2　$B^c_{n,n-4}$ 中最小邻接特征值的下界

令图 H 是由两个 C_3 共用一条边构成的双圈图, 且 $V(H)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$, 其中 $d_H(v_2)=d_H(v_4)=3$. 设 p,q,r 和 s 为任意非负整数, 则图 $H_6(p,q,r,s)$ 是通过在 H 的四个顶点 v_1,v_2,v_3,v_4 上分别粘 p,q,r 和 s 个悬挂点得到的双圈图, 其中 $p+q+r+s=n-4$. 若 p,q,r 和 s 中有一个为 0, 则 H 中有三个点粘有悬挂点, 由对称性不妨设 $r=0$ 或 $s=0$, 则产生的图分别记为 $H_4(p,q,s)$ 和 $H_5(p,q,r)$. 若 p,q,r 和 s 中有两个为 0, 则 H 中有两个点粘有悬挂点, 由对称性不妨设 $p=r=0$, $q=s=0$ 或 $r=s=0$, 此时产生的图分别记为 $H_1(q,s)$, $H_2(p,r)$ 和 $H_3(p,q)$ (见图 1).

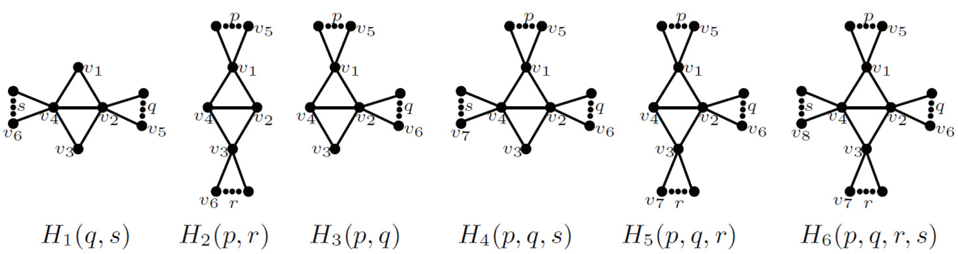

图 1　有 $n-4$ 个悬挂点的双圈图

引理 2 设 p,q,s 为任意正整数且 $p+q+s=n-4$. 若 $n\ge 7$, 则存在图 $H\in\{H_1(q',s'),H_3(p',q')\}$ 使得 $\lambda(H^c)\le\lambda(H_4^c(p,q,s))$, 其中 p',q' 和 s' 均为正整数.

证明 设 X 是 $H_4^c(p,q,s)$ 的第一特征向量, v_{ji} 表示与 $v_j(j=1,2,3,4)$ 相邻的悬挂点. 由对称性知, 与 v_j 相邻的悬挂点的分量大小均相等. 对 $H_4(p,q,s)$ 中 v_1,v_2,v_4 所对应特征向量分量的大小关系分以下 2 种情形进行证明.

情形 1 $X_{v_1}\ge X_{v_4}\ge X_{v_2}$($X_{v_2}\ge X_{v_4}\ge X_{v_1}$, $X_{v_1}\ge X_{v_2}\ge X_{v_4}$ 或 $X_{v_4}\ge X_{v_2}\ge X_{v_1}$时类似). 若与 v_4 相邻的悬挂点对应的分量值大于等于零(即, $X_{v_{4i}}\ge 0$, 则 $X_{v_{4i}}X_{v_1}\ge X_{v_{4i}}X_{v_4}\ge X_{v_{4i}}X_{v_2}$), 则删除该点带有的悬挂边连接点

v_1 得 $H_3(s+p,q)$, 由 (1) 得

$$X^T\boldsymbol{A}(H_3^c(s+p,q))X-X^T\boldsymbol{A}(H_4^c(p,q,s))X=2sX_{v_{4i}}(X_{v_4}-X_{v_1})\leq 0,$$

即 $\lambda(H_4^c(p,q,s))\geq\lambda(H_3^c(s+p,q))$. 若与 v_4 相邻的悬挂点对应的分量值小于零(即, $X_{v_{4i}}<0$, 则 $X_{v_{4i}}X_{v_1}<X_{v_{4i}}X_{v_4}<X_{v_{4i}}X_{v_2}$), 则删除该点带有的悬挂边连接点 v_2 得 $H_3(p,s+q)$, 由 (1) 得

$$X^T\boldsymbol{A}(H_3^c(p,s+q))X-X^T\boldsymbol{A}(H_4^c(p,q,s))X=2sX_{v_{4i}}(X_{v_4}-X_{v_2})\leq 0,$$

即 $\lambda(H_4^c(p,q,s))\geq\lambda(H_3^c(p,s+q))$.

情形 2 $X_{v_2}\geq X_{v_1}\geq X_{v_4}$($X_{v_4}\geq X_{v_1}\geq X_{v_2}$ 时类似). 若与 v_1 相邻的悬挂点对应的分量值大于等于零(即, $X_{v_{1i}}\geq 0$, 则 $X_{v_{1i}}X_{v_2}\geq X_{v_{1i}}X_{v_1}\geq X_{v_{1i}}X_{v_4}$), 则删除该点带有的悬挂边连接点 v_2 得 $H_1(p+q,s)$, 由 (1) 得

$$X^T\boldsymbol{A}(H_1^c(p+q,s))X-X^T\boldsymbol{A}(H_4^c(p,q,s))X=2pX_{v_{1i}}(X_{v_1}-X_{v_2})\leq 0,$$

即 $\lambda(H_4^c(p,q,s))\geq\lambda(H_1^c(p+q,s))$. 若与 v_1 相邻的悬挂点对应的分量值小于零(即, $X_{v_{1i}}<0$, 则 $X_{v_{1i}}X_{v_2}<X_{v_{1i}}X_{v_1}<X_{v_{1i}}X_{v_4}$), 则删除该点带有的悬挂边连接点 v_4 得 $H_1(q,s+p)$. 由 (1) 得

$$X^T\boldsymbol{A}(H_1^c(q,s+p))X-X^T\boldsymbol{A}(H_4^c(p,q,s))X=2pX_{v_{1i}}(X_{v_1}-X_{v_4})\leq 0,$$

即 $\lambda(H_4^c(p,q,s))\geq\lambda(H_1^c(q,s+p))$.

引理 3 设 p,q,r 为任意正整数且 $p+q+r=n-4$. 若 $n\geq 7$, 则存在图 $H\in\{H_2(p',r'),H_3(p',q')\}$ 使得 $\lambda(H^c)\leq\lambda(H_5^c(p,q,r))$, 其中 p',q' 和 r' 均为正整数.

与引理 2 的证明类似, 可得引理 3 成立.

引理 4 设 p,q,r 和 s 为任意正整数且 $p+q+r+s=n-4$. 若 $n\geq 8$, 则存在图 $H\in\{H_4(p',q',s'),H_5(p',q',r')\}$ 使得 $\lambda(H^c)\leq\lambda(H_6^c(p,q,r,s))$, 其中 p',q',r' 和 s' 均为正整数.

证明 设 X 是 $H_6^c(p,q,r,s)$ 的第一特征向量. 设 v_{ji} 表示与 $v_j(j=1,2,3,4)$ 相邻的悬挂点. 由对称性知, 与 v_j 相邻的悬挂点的分量大小均相等. 不妨设 $X_{v_1}\geq X_{v_3}$, 对 $H_6(p,q,r,s)$ 中 v_1,v_2,v_3,v_4 所对应特征向量分量的大小关系分以下 2 种情形进行证明.

情形 1 $X_{v_2}\geq X_{v_1}\geq X_{v_3}\geq X_{v_4}$($X_{v_1}\geq X_{v_2}\geq X_{v_3}\geq X_{v_4}$, $X_{v_1}\geq X_{v_4}\geq X_{v_3}\geq X_{v_2}$, $X_{v_2}\geq X_{v_4}\geq X_{v_1}\geq X_{v_3}$, $X_{v_4}\geq X_{v_1}\geq X_{v_3}\geq X_{v_2}$ 或 $X_{v_4}\geq X_{v_2}\geq X_{v_1}\geq X_{v_3}$ 时类似). 由对称性不妨考虑 v_3. 若与 v_3 相邻的悬挂点对应的分量值大于等于零(即, $X_{v_{3i}}\geq 0$, 则 $X_{v_{3i}}X_{v_2}\geq X_{v_{3i}}X_{v_3}\geq X_{v_{3i}}X_{v_4}$), 则删除该点带有的悬挂边连接点 v_2 得 $H_4(p,r+q,s)$, 由 (1) 得

$$X^T\boldsymbol{A}(H_4^c(p,r+q,s))X-X^T\boldsymbol{A}(H_6^c(p,q,r,s))X=2rX_{v_{3i}}(X_{v_3}-X_{v_2})\leq 0,$$

即 $\lambda(H_6^c(p,q,r,s))\geq\lambda(H_4^c(p,r+q,s))$. 若与 v_3 相邻的悬挂点对应的分量值小于零(即, $X_{v_{3i}}<0$, 则 $X_{v_{3i}}X_{v_1}<X_{v_{3i}}X_{v_3}<X_{v_{3i}}X_{v_4}$), 则删除该点带有的悬挂边连接点 v_4 得 $H_4(p,q,s+r)$, 由 (1) 得

$$X^T\boldsymbol{A}(H_4^c(p,q,s+r))X-X^T\boldsymbol{A}(H_6^c(p,q,r,s))X=2rX_{v_{3i}}(X_{v_3}-X_{v_4})\leq 0;$$

即 $\lambda(H_6^c(p,q,r,s))\geq\lambda(H_4^c(p,q,s+r))$.

情形 2 $X_{v_1}\geq X_{v_3}\geq X_{v_2}\geq X_{v_4}$($X_{v_1}\geq X_{v_2}\geq X_{v_4}\geq X_{v_3}$, $X_{v_1}\geq X_{v_3}\geq X_{v_2}\geq X_{v_4}$, $X_{v_1}\geq X_{v_3}\geq X_{v_4}\geq X_{v_2}$, $X_{v_1}\geq X_{v_4}\geq X_{v_2}\geq X_{v_3}$, $X_{v_4}\geq X_{v_1}\geq X_{v_2}\geq X_{v_3}$ 或 $X_{v_2}\geq X_{v_1}\geq X_{v_4}\geq X_{v_3}$ 时类似). 分析得, 分量的大小顺序排在第二位的点 v_3 与情形 1 得到的结果相同, 则考虑排在第三位的点 v_2. 若与 v_2 相邻的悬挂点对应的分量值大于等于零(即, $X_{v_{2i}}\geq 0$, 则 $X_{v_{2i}}X_{v_1}\geq X_{v_{2i}}X_{v_2}\geq X_{v_{2i}}X_{v_4}$), 则删除该点带有的悬挂边连接点 v_1 得 $H_5(p+q,r,s)$, 由 (1) 得

$$X^T\boldsymbol{A}(H_5^c(p+q,r,s))X-X^T\boldsymbol{A}(H_6^c(p,q,r,s))X=2qX_{v_{2i}}(X_{v_2}-X_{v_1})\leq 0,$$

即 $\lambda(H_6^c(p,q,r,s))\geq\lambda(H_5^c(p+q,r,s))$. 若与 v_2 相邻的悬挂点对应的分量值小于零(即, $X_{v_{2i}}<0$, 则 $X_{v_{2i}}X_{v_1}<X_{v_{2i}}X_{v_2}<X_{v_{2i}}X_{v_4}$), 则删除该点带有的悬挂边连接点 v_4 得 $H_5(p,r,s+q)$, 由 (1) 得

$$X^T\boldsymbol{A}(H_5^c(p,r,s+q))X-X^T\boldsymbol{A}(H_6^c(p,q,r,s))X=2qX_{v_{2i}}(X_{v_2}-X_{v_4})\leq 0,$$

即 $\lambda(H_6^c(p,q,r,s))\geq\lambda(H_5^c(p,r,s+q))$.

由引理 2、引理 3、引理 4, 接下来主要考虑 $H_1(q,s),H_2(p,r),H_3(p,q)$ 三类图.

引理 5 给定正整数 $n(n\geq 8)$, 假设 q,s 为任意正整数且 $q+s=n-4$. 当 $q>s\geq 1$ 时, 有 $\lambda(H_1^c(q,s))>\lambda(H_1^c(q-1,s+1))$.

证明 假设 X 是 $H_1^c(q,s)$ 的第一特征向量. 由于 $K_{2,2}\subset H_1^c(q,s)$ 且 $\lambda(K_{2,2})=-2$, 由引理 1 可得 $\lambda(H_1^c(q,s))\leq -2$. 由对称性得, v_2 和 v_4 分别悬挂的 q 和 s 个悬挂点分量大小相同, 分别记为 X_5 和 X_6, 记 $X_{v_i}=X_i(i=1,2,3,4)$. 由 (2) 可得:

$$\begin{cases}\lambda X_1=X_3+qX_5+sX_6,\\ \lambda X_2=sX_6,\\ \lambda X_3=X_1+qX_5+sX_6,\\ \lambda X_4=qX_5,\\ \lambda X_5=X_1+X_3+X_4+(q-1)X_5+sX_6,\\ \lambda X_6=X_1+X_2+X_3+qX_5+(s-1)X_6.\end{cases}$$

上式可写为矩阵等式 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X'}=0$, 其中

$$\boldsymbol{X'}=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\\X_4\\X_5\\X_6\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1&0&q&s\\0&0&0&0&0&s\\1&0&0&0&q&s\\0&0&0&0&q&0\\1&0&1&1&q-1&s\\1&1&1&0&q&s-1\end{pmatrix}.$$

令 $P_{H_1^c(q,s)}=(x+1)^{n-6}f(x;q,s)$, 其中 $f(x;q,s)=\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})$, 则 $f(x;q,s)=x^6+(2-q-s)x^5+(-4q-4s)x^4+(-2-4q-4s+2qs)x^3+(5qs-1)x^2+(q+s+2qs)x-qs$. 其中, λ 是 $f(x;q,s)=0$ 的最小根. $f(x;q-1,s+1)-f(x;q,s)=(q-s-1)(x+1)(x(2x+3)-1)$. 由于 $q-s-1>0$, 又 $\lambda\leq -2$, 则 $f(x;q-1,s+1)-f(x;q,s)=(q-s-1)(x+1)(x(2x+3)-1)<0$. 当 n 为偶数时, $P_{H_1^c(q-1,s+1)}-P_{H_1^c(q,s)}<0$, 当 n 为奇数时, $P_{H_1^c(q-1,s+1)}-P_{H_1^c(q,s)}>0$, 则有 $\lambda(H_1^c(q,s))>\lambda(H_1^c(q-1,s+1))$.

由引理 5, 推论 1 显然成立.

推论 1 设 q,s 为任意正整数且 $q+s=n-4$. 若 $n\geq 8$, 则 $\lambda(H_1^c(q,s))\geq\lambda(H_1^c(\lceil(n-4)/2\rceil,\lfloor(n-4)/2\rfloor))$, 等号成立当且仅当 $H_1(q,s)=H_1(\lceil(n-4)/2\rceil,\lfloor(n-4)/2\rfloor)$.

引理 6 给定正整数 $n(n>10)$, 假设 p,r 为任意整数且 $p+r=n-4$. 当 $p>r\geq 0$ 时, 有 $\lambda(H_2^c(p,r))>\lambda(H_2^c(p-1,r+1))$.

证明 假设 X 是 $H_2^c(p,r)$ 的第一特征向量. 若 $r>0$, 由于 $K_{2,3}\subset H_2^c(p,r)$ 且 $\lambda(K_{2,3})=-\sqrt{6}$, 由引理 1 可得 $\lambda(H_2^c(p,r))\leq-\sqrt{6}$. 由对称性得, v_1 和 v_3 分别悬挂的 p 和 r 个悬挂点分量大小相同, 分别记为 X_5 和 X_6, 记 $X_{v_i}=X_i(i=1,2,3,4)$. 由 (2) 可得:

$$\begin{cases}\lambda X_1=X_3+rX_6,\\ \lambda X_2=pX_5+rX_6,\\ \lambda X_3=X_1+pX_5,\\ \lambda X_4=pX_5+rX_6,\\ \lambda X_5=X_2+X_3+X_4+(p-1)X_5+rX_6,\\ \lambda X_6=X_1+X_2+X_4+pX_5+(r-1)X_6.\end{cases}$$

上式可写为矩阵等式 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X'}=0$, 其中

$$\boldsymbol{X'}=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\\X_4\\X_5\\X_6\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&r\\0&0&0&0&p&r\\1&0&0&0&p&0\\0&0&0&0&p&r\\0&1&1&1&p-1&r\\1&1&0&1&p&r-1\end{pmatrix}.$$

令 $P_{H_2^c(p,r)}=(x+1)^{n-6}f(x;p,r)$, 其中 $f(x;p,r)=\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})$, 则 $f(x;p,r)=x^6+(2-p-r)x^5+(-4p-4r)x^4+(-2-2p-2r+2pr)x^3+(-1+3p+3r+3pr)x^2+(2p+2r-4pr)x$. 其中, λ 是 $f(x;p,r)=0$ 的最小根. $f(x;p-1,r+1)-f(x;p,r)=(p-r-1)x(2x^2+3x-4)$. 由于 $p-r-1>0$, 又 $x\le-\sqrt{6}$, 则 $f(x;p-1,r+1)-f(x;p,r)=(p-r-1)x(2x^2+3x-4)>0$. 当 n 为偶数时, $P_{H_2^c(p-1,r+1)}-P_{H_2^c(p,r)}<0$, 当 n 为奇数时, $P_{H_2^c(p-1,r+1)}-P_{H_2^c(p,r)}>0$, 则有 $\lambda(H_2^c(p,r))>\lambda(H_2^c(p-1,r+1))$.

若 $r=0$, 此时

$$\begin{cases}\lambda X_1=X_3,\\ \lambda X_2=pX_5,\\ \lambda X_3=X_1+pX_5,\\ \lambda X_4=pX_5,\\ \lambda X_5=X_2+X_3+X_4+(p-1)X_5.\end{cases}$$

将上式转换成矩阵等式 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{X'}=0$, 其中 $p+r=n-4$, 则

$$\boldsymbol{X'}=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\\X_4\\X_5\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&p\\1&0&0&0&p\\0&0&0&0&p\\0&1&1&1&p-1\end{pmatrix}.$$

令 $P_{H_2^c(n-4,0)}=(x+1)^{n-5}f(x;n-4,0)$, 其中 $f_1(x;n-4,0)=\det(x\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})$, 则 $f_1(x;n-4,0)=-x^5+(n-5)x^4+(3n-11)x^3+(5-n)x^2+(8-2n)x$, λ 是 $f_1(x;n-4,0)=0$ 的最小根. 当 $x=1/4\left(-\sqrt{41}-3\right)\approx-2.350\ 78$ 时, $f_1(-2.350\ 78;n-4,0)=70.820\ 3-9.258\ 5n$. 当 $n\ge8$ 时, $f_1(-2.350\ 78;n-4,0)<0$, 因此, $\lambda<-2.350\ 78$. 设 $g(x)=-xf_1(x;n-4,0)=x^6+(5-n)x^5+(11-3n)x^4+(n-5)x^3+(2n-8)x^2$, $g(x)-f_2(x;n-5,1)=-x^5-(5-n)x^4-(1-n)x^3-(4n-20)x^2-(12-2n)x$. 令 $g(x)-f_2(x;n-5,1)=y(x)$, 则 $y'(x)=-5x^4+(-20+4n)x^3+(-3+3n)x^2+(40-8n)x-12+2n$, 当 $n>10$ 且 $x<-\sqrt{n-2}$ 时, $y'(-\sqrt{n-2})=-2n^2+(-4n^2+36n-80)\sqrt{n-2}+13n-26<0$. 因此, 当 $x<-\sqrt{n-2}$ 时, $y(x)$ 为递减函数. $y(-\sqrt{n-2})=n^3-13n^2+52n+(14-3n)\sqrt{n-2}-60\ge n^3-16n^2+66n-60>0$, 即 $g(x)-f_2(x;n-5,1)>0$. 因此, $\lambda(H_2^c(n-4,0))>\lambda(H_2^c(n-5,1))$.

由引理 6, 推论 2 显然成立.

推论 2 设 p,r 为任意正整数且 $p+r=n-4$. 若 $n>10$, 则 $\lambda(H_2^c(p,r))\ge\lambda(H_2^c(\lceil(n-4)/2\rceil,\lfloor(n-4)/2\rfloor))$, 等号成立当且仅当 $H_2(p,r)=H_2(\lceil(n-4)/2\rceil,\lfloor(n-4)/2\rfloor)$.

引理 7 假设 p,q 为任意正整数且 $p+q=n-4$. 当 $p>q\ge0$ 时, 则有以下结论:

(i) 若 $n\ge13$ 为奇数, 则 $\lambda(H_3^c(p,q))\ge\lambda(H_3^c((n-1)/2,(n-7)/2))$, 等号成立当且仅当 $p=(n-1)/2$, $q=(n-7)/2$;

(ii) 若 $n\ge18$ 为偶数, 则 $\lambda(H_3^c(p,q))\ge\lambda(H_3^c((n-2)/2,(n-6)/2))$, 等号成立当且仅当 $p=(n-2)/2$, $q=(n-6)/2$.

证明 注意到 $p+q=n-4$, 对于 p,q 为任意非负整数, 令 $P_{H_3^c(p,q)}=(x+1)^{n-6}f(x;p,q)$, 其中 $f(x;p,q)=\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})$.

(i) 当 n 为奇数时, $P_{H_3^c((p+q+3)/2,(p+q-3)/2)}-P_{H_3^c(p,q)}=(x+1)^{n-6}(f(x;(p+q+3)/2,(p+q-3)/2)-f(x;p,q))$. $f(H_3^c(p+q+3)/2,(p+q-3)/2)(-2.8)<0$, 则 $\lambda(H_3^c(p+q+3)/2,(p+q-3)/2)<-2.8$. 下证当 $x\le-2.8$ 时, $f(x;(p+q+3)/2,(p+q-3)/2-f(x;p,q))=1/4(p-q-3)(2(p-q+1)x^3+(5p-5q+9)x^2+(p-q+1)x-p+q-3)\le0$. 易知, $1/4(p-q-3)\ge0$, 则需证当 $x\le-2.8$ 时, $y(x)=2(p-q+1)x^3+(5p-5q+9)x^2+(p-q+1)x-p+q-3<0$,

而 $y'(x)=6(p-q+1)x^2+2(5p-5q+9)x+p-q+1$. 其对称轴 $x=-5/6-2/(3(1+p-q))>-2.8$, 且 $y'(-2.8)=-2.36+20.04(p-q)>0$, 则当 $x\le-2.8$ 时, $y(x)$ 单调递增, 而 $y(-2.8)=20.856-8.504(p-q)<0$. 则可得 $y(x)<0$. 由于 $p-q>0$ 且存在 $p-q=3$, 则 $P_{H_3^c((p+q+3)/2,(p+q-3)/2)}-P_{H_3^c(p,q)}\ge 0$.

(ii) 当 n 为偶数时, $P_{H_3^c((p+q+2)/2,(p+q-2)/2)}-P_{H_3^c(p,q)}=(x+1)^{n-6}(f(x;(p+q+2)/2,(p+q-2)/2)-f(x;p,q))$. $f(H_3^c((p+q+2)/2,(p+q-2)/2))(-3.3)<0$, 则 $\lambda(H_3^c((p+q+2)/2,(p+q-2)/2))<-3.3$. 下证当 $x\le-3.3$ 时, $f(x;(p+q+2)/2,(p+q-2)/2)-f(x;p,q)=1/4(p-q-2)(2(p-q)x^3+(5p-5q+4)x^2+(p-q)x-p+q-2)\le 0$. 易知, $1/4(p-q-2)\ge 0$, 则需证当 $x\le-3.3$ 时, $y(x)=2(p-q)x^3+(5p-5q+4)x^2+(p-q)x-p+q-2<0$, 而 $y'(x)=6(p-q)x^2+2(5p-5q+4)x+p-q$. 其对称轴 $x=-5/6-(2/3)(p-q)>-3.3$, 且 $y'(-3.3)=-26.4+33.34(p-q)>0$, 则当 $x\le-3.3$ 时, $y(x)$ 单调递增, 而 $y(-3.3)=41.56-21.724(p-q)<0$. 则可得 $y(x)<0$. 由于 $p-q>0$ 且存在 $p-q=3$, 则 $P_{H_3^c((p+q+2)/2,(p+q-2)/2)}-P_{H_3^c(p,q)}\le 0$.

引理 8 若 $n\ge 14$, 则 $\lambda(H_2^c(\lceil(n-4)/2\rceil,\lfloor(n-4)/2\rfloor))<\lambda(H_1^c(\lceil(n-4)/2\rceil,\lfloor(n-4)/2\rfloor))$.

证明 注意到

$$H(\lceil\frac{n-4}{2}\rceil,\lfloor\frac{n-4}{2}\rfloor)=\begin{cases}H(\frac{n-4}{2},\frac{n-4}{2}), & \text{若 } n \text{ 是偶数}\\ H(\frac{n-3}{2},\frac{n-5}{2}), & \text{若 } n \text{ 是奇数}\end{cases}\tag{5}$$

$P_{H_2^c(\lceil(n-4)/2\rceil,\lfloor(n-4)/2\rfloor)}-P_{H_1^c(\lceil(n-4)/2\rceil,\lfloor(n-4)/2\rfloor)}=(x+1)^{n-6}(f_1(\lceil(n-4)/2\rceil,\lfloor(n-4)/2\rfloor)-f_2(\lceil(n-4)/2\rceil,\lfloor(n-4)/2\rfloor))$. 由推论 1, 2 得, 若 $n\ge 14$ 且 n 为偶数, $f(H_1^c(q,s))(-3.175)<0$, 则 $\lambda(H_1^c(q,s))<-3.175$. 当 $x\le-3.175$ 时, $f(H_2^c((n-4)/2,(n-4)/2))-f(H_1^c((n-4)/2,(n-4)/2))=(x+1)^{n-6}\big(1/4(n-4)(8x^3+(20-2n)x^2+(28-6n)x+n-4)\big)$. 显然, $1/4(n-4)>0$, 下证当 $x\le-3.175$ 时, $y(x)=8x^3+(20-2n)x^2+(28-6n)x+n-4<0$. $y'(x)=24x^2+(40-4n)x-6n+28$, 当 $n\ge 14$ 时, 对称轴 $x=(n-10)/12>-3.175$, 且 $y'(-3.175)=142.935+6.7n>0$, 则当 $x\le-3.175$ 时, $y(x)$ 单调递增, 而 $y(-3.175)=-0.111\,25n-147.335<0$, 则可得 $y(x)<0$. 因此, $P_{H_2^c((n-4)/2,(n-4)/2)}<P_{H_1^c((n-4)/2,(n-4)/2)}$. 若 $n\ge 15$ 且 n 为奇数, $f(H_1^c(q,s))(-3.175)<0$, 则 $\lambda(H_1^c(q,s))<-3.175$. 当 $x\le-3.175$ 时, $f(H_2^c((n-3)/2,(n-5)/2))-f(H_1^c((n-3)/2,(n-5)/2))=(x+1)^{n-6}\big(1/4((8n-32)x^3+(-2n^2+28n-78)x^2+(-6n^2+52n-106)x+(n^2-8n+15))\big)$. 下证当 $x\le-3.175$ 时, $y(x)=(1/4)\big((8n-32)x^3+(-2n^2+28n-78)x^2+(-6n^2+52n-106)x+(n^2-8n+15)\big)<0$. $y'(x)=(6n-24)x^2+(-n^2+14n-39)x-(3n^2)/2+13n-(53/2)$, 当 $n\ge 11$ 时, 对称轴 $x=(n^2-14n+39)(12n-48)>-3.175$, 且 $y'(-3.175)=1.675n^2+29.033\,8n-144.61>0$, 则当 $x\le-3.175$ 时, $y(x)$ 单调递增, 而 $y(-3.175)=-0.027\,812\,5n^2-36.722\,6n+147.363<0$, 则可得 $y(x)<0$. 因此, $P_{H_2^c((n-3)/2,(n-5)/2)}>P_{H_1^c((n-3)/2,(n-5)/2)}$. 因此, 当 $n\ge 14$ 时, $\lambda(H_2^c(\lceil(n-4)/2\rceil,\lfloor(n-4)/2\rfloor))<\lambda(H_1^c(\lceil(n-4)/2\rceil,\lfloor(n-4)/2\rfloor))$.

引理 9 若 $n\ge 13$ 为奇数, 则 $\lambda(H_2^c((n-3)/2,(n-5)/2))<\lambda(H_3^c((n-1)/2,(n-7)/2))$; 若 $n\ge 18$ 为偶数, 则 $\lambda(H_2^c((n-4)/2,(n-4)/2))<\lambda(H_3^c((n-4)/2,(n-6)/2))$.

证明 由推论 2, 引理 7 和式 (5) 得, 若 $n\ge 13$ 且 n 为奇数, $P_{H_2^c((n-3)/2,(n-5)/2)}-P_{H_3^c((n-1)/2,(n-7)/2)}=(x+1)^{n-6}(f(H_2^c((n-3)/2,(n-5)/2))-f(H_3^c((n-1)/2,(n-7)/2)))=(x+1)^{n-6}\big((n-3)x^3-(1/2)((n-11)n+16)x^2+(1/4)((42-5n)n-81)x+(1/4)((n-8)n+7)\big)$. 下证当 $x\le-2.8$ 时, $y(x)=(n-3)x^3-(1/2)((n-11)n+16)x^2+(1/4)((42-5n)n-81)x+(1/4)((n-8)n+7)<0$. $y'(x)=3(n-3)x^2-((n-11)n+16)x+(1/4)((42-5n)n-81)$, 对称轴 $x=[(n-11)n+16]/12(n-3)>-2.8$, 当 $n\ge 5$ 时, $y'(-2.8)=1.55n^2+3.22n-46.01>0$, 则当 $x\le-2.8$ 时, $y(x)$ 单调递增, $y(-2.8)=-0.17n^2-10.232n+61.586<0$. 则可得 $y(x)<0$, 从而 $P_{H_2^c((n-3)/2,(n-5)/2)}>P_{H_3^c((n-1)/2,(n-7)/2)}$. 若 $n\ge 6$ 且 n 为偶数, 则当 $p+q\ge 18$ 时, $P_{H_2^c((n-4)/2,(n-4)/2)}-P_{H_3^c((n-4)/2,(n-6)/2)}=(x+1)^{n-6}\big(f(H_2^c((n-4)/2,(n-4)/2))-f(H_3^c((n-4)/2,(n-6)/2))\big)=(x+1)^{n-6}\big((n-4)x^3-(1/2)(n-8)(n-3)x^2+(1/4)((42-5n)n-88)x+(1/4)((n-8)n+12)\big)$. 下证当 $x\le-3.3$ 时, $y(x)=(n-4)x^3-(1/2)(n-8)(n-3)x^2+(1/4)((42-5n)n-88)x+(1/4)((n-8)n+12)<0$. $y'(x)=3(n-4)x^2-(n-8)(n-3)x+(1/4)((42-5n)n-88)$, 对称轴 $x=[(n-8)(n-3)]/6(n-4)>-3.3$, 当 $n\ge 6$ 时, $y'(-3.3)=2.05n^2+6.87n-73.48>0$, 则当 $x\le-3.3$ 时, $y(x)$ 单调递增, 而 $y(-3.3)=-1.07n^2-12.692n+88.668<0$, 则可得 $y(x)<0$, 从而 $P_{H_3^c((n-4)/2,(n-4)/2)}<P_{H_3^c((n-4)/2,(n-6)/2)}$.

设 $H^c\in B_{n,n-4}^c$. 当 $6\le n\le 18$ 时, 通过 MATLAB 编程可知 $\lambda(H^c)\le\lambda(H_2^c(\lceil(n-4)/2\rceil,\lfloor(n-4)/2\rfloor))$. 当 $n\ge 19$ 时, 由引理 8 和引理 9 知 $\lambda(H^c)\le\lambda(H_2^c(\lceil(n-4)/2\rceil,\lfloor(n-4)/2\rfloor))$. 当 $n=6$ 时, $\lambda(H_2^c(1,1))=-2\ge(-\sqrt{2(6-4)}-2)/2=-2$. 当 $n=7$ 时, $\lambda(H_2^c(1,2))\approx-2.234\,1<(-\sqrt{2(7-4)}-2)/2\approx-2.224\,7$. 所以, 当 $n=7$ 时,

$\lambda(H^c)<(-\sqrt{2(n-4)}-2)/2$. 因此本文接下来只需考虑 $n\geq 8$ 时的下界.

定理 1 当 $n\geq 8$ 时, 对任意的 $H^c\in B^c_{n,n-4}$ 有 $\lambda(H^c)\geq(-\sqrt{2(n-4)}-2)/2$.

证明 当 $n\geq 6$ 且 n 为偶数时, 由式 (5) 知 $H_2(\lceil(n-4)/2\rceil,\lfloor(n-4)/2\rfloor)=H_2((n-4)/2,(n-4)/2)$. 令

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&\frac{n-4}{2}\\0&0&0&0&\frac{n-4}{2}&\frac{n-4}{2}\\1&0&0&0&\frac{n-4}{2}&0\\0&0&0&0&\frac{n-4}{2}&\frac{n-4}{2}\\0&1&1&1&\frac{n-4}{2}-1&\frac{n-4}{2}\\1&1&0&1&\frac{n-4}{2}&\frac{n-4}{2}-1\end{pmatrix}.$$

则 $P_{H_2^c((n-4)/2,(n-4)/2)}=(x+1)^{n-6}f(x;(n-4)/2,(n-4)/2)$, 其中 $f(x;(n-4)/2,(n-4)/2)=\det(x\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=(1/4)x(2x^2+4x+6-n)(2x^3+(8-2n)x^2+(10-3n)x+4n-16)$. 令 $y(x)=2x^2+4x+6-n$, 则 $y(x)=0$ 的最小根 $x_1=(-\sqrt{2(n-4)}-2)/2$; 令 $g(x)=2x^3+(8-2n)x^2+(10-3n)x+4n-16$, 当 $n>6$ 时, $g((-\sqrt{2(n-4)}-2)/2)=-(n-5)^2+1-(n-2)\sqrt{2n-8}<0$, $g(0)=4n-16>0$, $g(1)=4-n<0$. 因此, $H_2^c((n-4)/2,(n-4)/2)$ 的最小根为 $(-\sqrt{2(n-4)}-2)/2$.

当 $n\geq 9$ 且 n 为奇数时, 由式 (5) 知 $H_2(\lceil(n-4)/2\rceil,\lfloor(n-4)/2\rfloor)=H_2((n-3)/2,(n-5)/2)$. 令

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&\frac{n-5}{2}\\0&0&0&0&\frac{n-3}{2}&\frac{n-5}{2}\\1&0&0&0&\frac{n-3}{2}&0\\0&0&0&0&\frac{n-3}{2}&\frac{n-5}{2}\\0&1&1&1&\frac{n-3}{2}-1&\frac{n-5}{2}\\1&1&0&1&\frac{n-3}{2}&\frac{n-5}{2}-1\end{pmatrix}.$$

则 $P_{H_2^c((n-3)/2,(n-5)/2)}=(x+1)^{n-6}f(x;(n-4)/2,(n-4)/2)$, 其中 $f(x;(n-4)/2,(n-4)/2)=\det(x\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=(1/4)x(4x^5+(24-4n)x^4+(64-16n)x^3+(2n^2-24n+54)x^2+(3n^2-12n-7)x+40n-4n^2-92)$. 令 $h(x)=4x^5+(24-4n)x^4+(64-16n)x^3+(2n^2-24n+54)x^2+(3n^2-12n-7)x+40n-4n^2-92$, 下证当 $n\geq 9$ 且 n 为奇数时 $h(x)$ 的最小根大于 $(-\sqrt{2(n-4)}-2)/2$.

当 $n\geq 9$ 时, 分别讨论 $h((-\sqrt{2(n-4)}-2)/2)$, $h(-2.4)$ 和 $h(-1)$ 与 0 的关系. 注意到 $h((-\sqrt{2(n-4)}-2)/2)=9-n-\sqrt{2n-8}/2<0$. 设 $h(-2.4)=0.32n^2+19.033\ 6n-171.138\ 56$. 因为 $h'(-2.4)=0.64n+19.033\ 6>0$, 则 $n\geq 9$ 时 $h(-2.4)$ 为增函数且 $h(-2.4)>h(-2.4)\mid_{n=9}\approx 26.083\ 84>0$. 设 $h(-1)=-5n^2+40n-75$. 因为 $h'(-1)=-10n+40<0$, 则 $n\geq 9$ 时 $h(-1)$ 为减函数且 $h(-1)<h(-1)\mid_{n=9}=-120<0$.

当 $n\geq 11$ 时, 分别讨论 $h(0.851)$, $h(n-3)$ 和 $h(n-2)$ 与 0 的关系. 设 $h(0.851)=0.001\ 402n^2+0.448\ 59n-5.034\ 77$, 因为 $h'(0.851)=0.002\ 804n+0.448\ 59>0$, 则 $n\geq 9$ 时 $h(0.851)$ 为增函数且 $h(0.851)>h(0.851)\mid_{n=11}=0.069\ 362>0$. 设 $h(n-3)=-2n^4+31n^3-169n^2+393n-341$, $h'(n-3)=-8n^3+93n^2-338n+393$, $h''(n-3)=-24n^2+186n-338$ 以及 $h'''(n-3)=-48n+186<0$. 从而 $h''(n-3)$ 单调递减且 $h''(n-3)<h''(n-3)\mid_{n=11}=-1\ 196<0$, 则 $h'(n-3)$ 单调递减且 $h'(n-3)<h'(n-3)\mid_{n=11}=-2\ 720<0$, 则 $h(n-3)$ 单调递减且 $h(n-3)<h(n-3)\mid_{n=11}=-4\ 488<0$. 设 $h(n-2)=2n^4+3n^3-56n^2+129n-118>0$, $h'(n-2)=8n^3+9n^2-112n+129$, $h''(n-2)=24n^2+18n-112$ 以及 $h'''(n-2)=48n+18>0$. 从而$h''(n-2)$ 单调递增且 $h''(n-2)>h''(n-2)\mid_{n=11}=2\ 984>0$, 则 $h'(n-2)$ 单调递增且 $h'(n-2)>h'(n-2)\mid_{n=11}=10\ 568>0$, 则 $h(n-2)$ 单调递增且 $h(n-2)>h(n-2)\mid_{n=11}=27\ 800>0$.注意到当 $n=9$ 时, $H_2^c(\lceil(9-4)/2\rceil,\lfloor(9-4)/2\rfloor)=H_2^c(2,3)$. 则 $\lambda(H_2^c(2,3))\approx-2.574\ 5>(-\sqrt{2(9-4)}-2)/2\approx-2.581\ 1$.

综上所述, 当 $n\geq 8$ 时, 对任意的 $H^c\in B^c_{n,n-4}$ 有 $\lambda(H^c)\geq(-\sqrt{2(n-4)}-2)/2$.

参考文献:

[1] JOHNSONC R, SAWIKOWSKA A. Minimizing the least eigenvalue of graphs with fixed order and size[J]. Discrete Mathematics, 2012, 312(15): 2272-2285.

(下转第 36 页)