

具有广义时滞的神经网络滞后同步分析*

裴萍, 韩思雨, 卞继承[†], 黄达, 薛婷婷

(新疆工程学院 数理学院, 新疆 乌鲁木齐 830023)

摘要: 研究了具有广义时滞的神经网络滞后同步问题. 首先, 提出了一类包含离散时滞和比例时滞的一阶神经网络模型. 其次, 通过对一阶神经网络设计反馈控制策略, 利用 Lyapunov 泛函理论和 Barbalat 引理, 给出了驱动-响应神经网络的滞后同步条件. 最后, 通过 3 个数值实例来验证理论结果的有效性.

关键词: 神经网络; 广义时滞; 滞后同步; 线性反馈控制

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2022.11.23.0004

中图分类号: O175.2; TP183 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2023)04-0414-08

引文格式: 裴萍, 韩思雨, 卞继承, 黄达, 薛婷婷. 具有广义时滞的神经网络滞后同步分析[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2023, 40(4): 414-421+432.

英文引文格式: PEI Ping, HAN Siyu, BIAN Jicheng, HUANG Da, XUE Tingting. Lag synchronization analysis of neural networks with generalized delay[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2023, 40(4): 414-421+432.

Lag Synchronization Analysis of Neural Networks with Generalized Delay

PEI Ping, HAN Siyu, BIAN Jicheng, HUANG Da, XUE Tingting

(College of Mathematics and Science, Xinjiang Institute of Engineering, Urumqi Xinjiang 830023, China)

Abstract: The lag synchronization problem of a class of neural networks with generalized delays is studied. Firstly, a class of first-order neural network models including discrete delays and proportional delays are proposed. Secondly, by designing a feedback control strategy for the first-order neural system, using the Lyapunov functional theory and the Barbalat lemma, the lag synchronization condition of the drive-response neural network is given. Finally, three numerical examples are given to verify the validity of the theoretical results.

Key words: neural networks; generalized delays; lag synchronization; linear feedback control

0 引言

人工神经网络是由大量神经元通过丰富的联接而构成的自适应非线性动态系统, 它具有非线性映射、分类与识别和优化计算等特点. 近年来, 人工神经网络技术在全世界范围内逐步发展起来, 已被广泛应用于模式识别、智能机器人、能源优化、决策支持、农业和经济等领域^[1-4].

Pecora 和 Carroll^[5]首次提出了混沌同步的概念, 其基本思想是控制从系统, 使主系统和从系统的状态轨迹最终完全相同. 混沌同步在安全通信、信息处理、生物系统和工程等领域得到了广泛的应用^[6-8]. 对于时滞神经网络, 已经提出了各种各样的同步类型, 如渐近同步^[9]、指数同步^[10-11]、投影同步^[12-13]和滞后同步^[14-15]等. 滞后同步因其在图像加密和安全信息中的潜在应用^[16-17]而受到越来越多的关注. 例如, 在信息传递的过程中, 发射端的信号从发出到被接收存在一个时间延迟, 所以接收机在 $t+\tau$ 时刻接收的信号可能是在 t 时刻发送的信号.

* 收稿日期: 2022-11-23

基金项目: 新疆维吾尔自治区自然科学基金“基于多层图结构下的多智能体网络的一致性研究”(2022D01A247).

作者简介: 裴萍(1976-), 女, 副教授, 从事神经网络同步的研究, E-mail: 119331876@qq.com.

[†] 通讯作者: 卞继承(1976-), 男, 副教授, 从事神经网络和小波分析的研究, E-mail: 233730157@qq.com.

因此, 滞后同步意味着两个系统可以通过一个恒定的时滞 $\delta > 0$ ^[18] 来实现同步. 目前, 关于神经网络滞后同步的研究已有一些成果. 例如, 通过设计自适应控制策略研究了具有混合时滞的忆阻神经网络的渐近滞后同步、指数滞后同步和有限时间滞后同步问题^[19]. 在 Filippov 框架理论下, 基于 Lyapunov 函数导出了时滞忆阻神经网络固定时间滞后同步的一些充分准则^[20]. 利用线性矩阵不等式 (LMI) 导出了混沌神经网络滞后同步的一些充分条件^[21]. 基于非分离方法, 研究了一类具有随机扰动的复值 BAM 神经网络的固定时间和预定时间滞后同步问题^[22]. 因此, 研究神经网络的滞后同步问题具有重要的理论价值. 另一方面, 在神经网络的电路实现中, 时滞的存在是不可避免的. 时滞可导致网络产生振荡、不稳定现象甚至混沌行为, 因此, 研究时滞神经网络的动态行为更有现实意义. 目前, 关于不同类型时滞的神经网络动力学行为被广泛研究, 例如离散时滞^[23-24]、有界变时滞^[25-27]、分布时滞^[28]和混合时滞^[29]等, 而比例时滞^[30-31]作为一类时变的无界时滞, 因其在星级物质中光的吸收和非线性动力系统等领域中的广泛应用而备受关注. 尽管离散时滞和比例时滞在神经网络的动态分析中得到了广泛的研究, 但综合考虑以上两类时滞以推广为一种更广义的时滞模型的研究相对较少.

鉴于以上分析, 本文考虑了一类包含离散时滞和比例时滞的广义时滞类型的神经网络模型, 构造了一个新的 Lyapunov 函数, 设计了一种反馈控制策略, 研究了离散时滞和比例时滞神经网络的滞后同步问题, 通过具体实例验证了所得结果的正确性和有效性. 本文的创新点有以下两个方面:

- 1) 本文提出了一种具有广义时滞类型的神经网络模型, 该模型成功地整合了离散时滞和比例时滞;
- 2) 与现有模型相比^[19,20,23], 本文提出的具有广义时滞的神经网络模型更一般, 建立的判定准则保守性更低.

1 模型描述及预备知识

考虑如下广义时滞的神经网络模型

$$\frac{du_l(t)}{dt} = -\alpha_l u_l(t) + \sum_{j=1}^n \beta_{lj} h_j(u_j(t)) + \sum_{j=1}^n \gamma_{lj} f_j(u_j(r_{lj}(t))) + v_l(t) \quad (1)$$

其中: $l \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n\}$, $u_l(t)$ 表示第 l 个神经元在 t 时刻的状态, $\alpha_l > 0$ 是常数, β_{lj} 和 γ_{lj} 表示从第 j 个神经元到第 l 个神经元的连接权重, $h_j(u_j(t))$ 是第 j 个神经元在 t 时刻的激活函数, $f_j(u_j(r_{lj}(t)))$ 表示第 j 个神经元在 $r_{lj}(t)$ 时刻的激活函数, 满足 $f_j(0) = 0$, $r_{lj}(t) \leq t$ 反映了在 t 时刻第 j 个神经元到第 l 个神经元的时滞, $v_l(t)$ 是第 l 个神经元的外部输入函数.

模型 (1) 的初始条件为

$$u_l(\theta) = \xi_l(\theta), \quad \theta \in [-r, 0],$$

其中: $r = \max_{l,j \in \mathbb{N}} \{|r_{lj}(0)|\}$, $\xi_l(\theta)$ 是有界连续函数.

若模型 (1) 为驱动系统, 则响应系统为

$$\frac{ds_l(t)}{dt} = -\alpha_l s_l(t) + \sum_{j=1}^n \beta_{lj} h_j(s_j(t)) + \sum_{j=1}^n \gamma_{lj} f_j(s_j(r_{lj}(t))) + v_l(t) + \delta_l(t) \quad (2)$$

其中: $s_l(t)$ 为响应系统中第 l 个神经元的状态, $\delta_l(t)$ 是反馈控制器.

模型 (2) 的初始条件为

$$s_l(\theta) = \bar{\xi}_l(\theta), \quad \theta \in [-r, 0],$$

其中: $r = \max_{l,j \in \mathbb{N}} \{|r_{lj}(0)|\}$, $\bar{\xi}_l(\theta)$ 是有界连续函数.

令 $w_l(t) = s_l(t) - u_l(t - \tau)$ 是同步误差, 其中 $\tau > 0$ 表示时滞.

由模型 (1) 和模型 (2) 可得误差系统为

$$\frac{dw_l(t)}{dt} = -\alpha_l w_l(t) + \sum_{j=1}^n \beta_{lj} H_j(w_j(t)) + \sum_{j=1}^n \gamma_{lj} F_j(w_j(r_{lj}(t))) + \delta_l(t) \quad (3)$$

其中: $H_j(w_j(t)) = h_j(s_j(t)) - h_j(u_j(t-\tau))$, $F_j(w_j(r_{lj}(t))) = f_j(s_j(r_{lj}(t))) - f_j(u_j(r_{lj}(t)-\tau))$, $l, j \in \aleph$.

对于模型 (1), 我们引入以下定义和引理:

定义 1 $w(t) = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T \in \mathbb{R}^n$ 是一个 n 维解向量, 且 $w(t)$ 满足 $\|w(t)\| = (\sum_{l=1}^n w_l^2(t))^{1/2}$, 如果误差系统 (3) 的通解是渐近稳定的, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|s(t) - u(t-\tau)\|^2 = 0$ 成立, 则称神经网络模型 (1) 和 (2) 是滞后同步的.

引理 1^[32] $g(t)$ 是定义在区间 $[0, +\infty)$ 的函数, 如果 $g(t)$ 一致连续且 $\int_0^{+\infty} g(\sigma) d\sigma$ 存在且有界, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$.

假设 1 对任意的 $j \in \aleph$, 存在 $k_j > 0$ 和 $m_j > 0$ 使得激活函数 $h_j(\cdot)$ 和 $f_j(\cdot)$ 满足

$$|h_j(x) - h_j(y)| \leq k_j |x - y|, |f_j(x) - f_j(y)| \leq m_j |x - y|.$$

假设 2 对任意的 $l, j \in \aleph$, $r_{lj}(0) \leq 0$, 存在常数 $\bar{r}_{lj} > 0$ 使得

$$0 < \bar{r}_{lj} \leq \dot{r}_{lj}(t) \leq 1.$$

假设 3 对任意的 $l, j \in \aleph$, 使得

$$\sum_{j=1}^n (-\alpha_l - \rho_l + \frac{1}{2}(k_j |\beta_{lj}| + k_l |\beta_{jl}|) + \frac{1}{2}(m_j |\gamma_{lj}| + \frac{1}{\bar{r}_{jl}} m_l |\gamma_{jl}|) < 0.$$

注 1 从假设 2 中可以得出

$$r_{lj}(t) \leq r_{lj}(0) + t \leq t, \quad l, j \in \aleph,$$

这表明时间延迟不超过当前的时间.

注 2 与文献 [23-27,30-31] 相比, 模型 (1) 给出了更一般的时滞类型. 事实上, 如果令广义时滞 $r_{lj}(t) = t - \nu_{lj}(t)$, 且满足 $0 \leq \nu_{lj}(t) \leq \nu$, 模型 (1) 简化为下列具有离散变时滞的神经网络模型

$$\frac{du_l(t)}{dt} = -\alpha_l u_l(t) + \sum_{j=1}^n \beta_{lj} h_j(u_j(t)) + \sum_{j=1}^n \gamma_{lj} f_j(u_j(t - \nu_{lj}(t))) + v_l(t) \quad (4)$$

此时, 假设 2 简化为以下假设.

假设 4 对任意的 $l, j \in \aleph$, 存在一个常数 $\bar{\nu}_{lj} > 0$ 使得

$$\dot{\nu}_{lj}(t) \leq \bar{\nu}_{lj} < 1.$$

此时 $\bar{r}_{lj} = 1 - \bar{\nu}_{lj}$.

注 3 如果广义时滞 $r_{lj}(t) = r_{lj}t$, $0 < r_{lj} < 1$, 模型 (1) 转化为如下具有比例时滞的神经网络模型

$$\frac{du_l(t)}{dt} = -\alpha_l u_l(t) + \sum_{j=1}^n \beta_{lj} h_j(u_j(t)) + \sum_{j=1}^n \gamma_{lj} f_j(u_j(r_{lj}t)) + v_l(t) \quad (5)$$

显然, $\bar{r}_{lj} = r_{lj}$. 因此, 传统的离散时滞和比例时滞^[23-27,30-31]是本文时滞的特殊形式.

2 主要结论

为了使模型 (1) 和模型 (2) 达到滞后同步, 我们设计如下反馈控制策略

$$\delta_l(t) = -\rho_l w_l(t), \quad l \in \aleph = \{1, 2, \dots, n\} \quad (6)$$

其中: $\rho_l > 0$ 表示控制增益.

定理 1 如果假设 1,3 成立, 在反馈控制策略 (6) 下, 模型 (1) 和模型 (2) 达到滞后同步.

证明 构造如下的 Lyapunov 泛函

$$V(t) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n w_l^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\bar{r}_{lj}} m_j |\gamma_{lj}| \int_{r_{lj}(t)}^t w_j^2(\theta) d\theta.$$

$V(t)$ 沿误差系统 (3) 的解求导可得

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= \sum_{l=1}^n w_l(t) \dot{w}_l(t) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\bar{r}_{lj}} m_j |\gamma_{lj}| (w_j^2(t) - w_j^2(r_{lj}(t))) \dot{r}_{lj}(t) \\ &= \sum_{l=1}^n w_l(t) \left[-\alpha_l w_l(t) + \sum_{j=1}^n \beta_{lj} H_j(w_j(t)) + \sum_{j=1}^n \gamma_{lj} F_j(w_j(r_{lj}(t))) \right] + \delta_l(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\bar{r}_{lj}} m_j |\gamma_{lj}| (w_j^2(t) - w_j^2(r_{lj}(t))) \dot{r}_{lj}(t) \\ &= -\sum_{l=1}^n \alpha_l w_l^2(t) + \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{lj} w_l(t) H_j(w_j(t)) + \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{lj} w_l(t) F_j(w_j(r_{lj}(t))) - \sum_{l=1}^n \rho_l w_l^2(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\bar{r}_{lj}} m_j |\gamma_{lj}| (w_j^2(t) - w_j^2(r_{lj}(t))) \dot{r}_{lj}(t) \\ &\leq -\sum_{l=1}^n \alpha_l w_l^2(t) + \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n |\beta_{lj} w_l(t) H_j(w_j(t))| + \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n |\gamma_{lj} w_l(t) F_j(w_j(r_{lj}(t)))| - \sum_{l=1}^n \rho_l w_l^2(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\bar{r}_{lj}} m_j |\gamma_{lj}| (w_j^2(t) - w_j^2(r_{lj}(t))) \dot{r}_{lj}(t). \end{aligned}$$

利用假设 1 和假设 2 可得

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &\leq -\sum_{l=1}^n (\alpha_l + \rho_l) w_l^2(t) + \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n k_j |\beta_{lj}| |w_l(t)| |w_j(t)| + \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n m_j |\gamma_{lj}| |w_l(t)| |w_j(r_{lj}(t))| \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\bar{r}_{lj}} m_j |\gamma_{lj}| w_j^2(t) - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n m_j |\gamma_{lj}| w_j^2(r_{lj}(t)) \end{aligned} \tag{7}$$

利用 $AB \leq (1/2)(A^2 + B^2)$ 有

$$\sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n k_j |\beta_{lj}| |w_l(t)| |w_j(t)| \leq \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n k_j |\beta_{lj}| w_l^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n k_l |\beta_{jl}| w_l^2(t) \tag{8}$$

$$\sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n m_j |\gamma_{lj}| |w_l(t)| |w_j(r_{lj}(t))| \leq \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n m_j |\gamma_{lj}| w_l^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n m_j |\gamma_{lj}| w_j^2(r_{lj}(t)) \tag{9}$$

将式 (8) 和式 (9) 带入式 (7) 可得

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &\leq \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \left\{ -\alpha_l - \rho_l + \frac{1}{2} (k_j |\beta_{lj}| + k_l |\beta_{jl}|) + \frac{1}{2} (m_j |\gamma_{lj}| + \frac{1}{\bar{r}_{jl}} m_l |\gamma_{jl}|) \right\} w_l^2(t) \\ &\leq -\frac{1}{2} P \sum_{l=1}^n w_l^2(t) \end{aligned} \tag{10}$$

其中

$$P = \sum_{j=1}^n \left\{ -\alpha_l - \rho_l + \frac{1}{2} (k_j |\beta_{lj}| + k_l |\beta_{jl}|) + \frac{1}{2} (m_j |\gamma_{lj}| + \frac{1}{\bar{r}_{jl}} m_l |\gamma_{jl}|) \right\}.$$

对式 (10) 从 0 到 t 积分,

$$\begin{aligned} \int_0^t \dot{V}(\theta) d\theta &\leq -\frac{1}{2} P \int_0^t \sum_{l=1}^n w_l^2(\theta) d\theta, \\ V(t) - V(0) &\leq -\frac{1}{2} P \int_0^t \sum_{l=1}^n w_l^2(\theta) d\theta, \end{aligned}$$

从而

$$\int_0^t \sum_{l=1}^n w_l^2(\theta) d\theta \leq \frac{2V(0)}{P},$$

所以

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \sum_{l=1}^n w_l^2(\theta) d\theta \leq \frac{2V(0)}{P} < +\infty,$$

由引理 1 知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^n w_l^2(t) = 0.$$

因此, 模型 (1) 和模型 (2) 是滞后同步的.

推论 1 在假设 1 及假设 4 下, 如果控制增益 ρ_l 满足

$$\sum_{j=1}^n (-\alpha_l - \rho_l + \frac{1}{2}(k_j|\beta_{lj}| + k_l|\beta_{jl}|) + \frac{1}{2}(m_j|\gamma_{lj}| + \frac{1}{1-\bar{\nu}_{jl}}m_l|\gamma_{jl}|)) < 0, \quad l, j \in \mathbb{N}$$

则具有离散变时滞的神经网络模型 (4) 与其对应的响应系统在反馈控制策略 (6) 下是滞后同步的.

推论 2 在假设 1 和反馈控制策略 (6) 下, 如果控制增益 ρ_l 满足

$$\sum_{j=1}^n (-\alpha_l - \rho_l + \frac{1}{2}(k_j|\beta_{lj}| + k_l|\beta_{jl}|) + \frac{1}{2}(m_j|\gamma_{lj}| + \frac{1}{r_{jl}}m_l|\gamma_{jl}|)) < 0, \quad l, j \in \mathbb{N}$$

则具有比例时滞的神经网络模型 (5) 与其对应的响应系统是滞后同步的.

3 数值模拟

例 1 考虑如下具有广义时滞的神经网络模型

$$\frac{du_l(t)}{dt} = -\alpha_l u_l(t) + \sum_{j=1}^2 \beta_{lj} h_j(u_j(t)) + \sum_{j=1}^2 \gamma_{lj} f_j(u_j(r_{lj}(t))) + v_l(t) \quad (11)$$

其中: $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 5, h_j(x) = \tanh(2x), g_j(x) = \cos(4x), j = 1, 2, r_{lj}(t) = [t + (1-b)t^2]/(1+t), b = 2/9,$

$$\mathbf{B} = (\beta_{lj})_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -1.1 & 0.2 \\ 1 & 1.72 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma} = (\gamma_{lj})_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -0.9 & 3 \\ -2.5 & -2.2 \end{bmatrix}.$$

通过数值模拟发现模型 (11) 存在混沌吸引子, 如图 1 所示, 初始条件为 $u_1 = -1, u_2 = 0.3$.

对于任意的 $l = 1, 2$, 取 $k_1 = k_2 = m_1 = m_2 = 1, \bar{r}_{11} = \bar{r}_{12} = \bar{r}_{21} = \bar{r}_{22} = 7/9, \rho_1 = 5, \rho_2 = 7$, 模型满足假设 1~3. 基于定理 1, 模型 (11) 是滞后同步的, 如图 2 所示. 图 3~4 描述了模型 (11) 在控制策略 (6) 下的同步曲线.

例 2 考虑如下具有离散变时滞的神经网络模型

$$\frac{du_l(t)}{dt} = -\alpha_l u_l(t) + \sum_{j=1}^2 \beta_{lj} h_j(u_j(t)) + \sum_{j=1}^2 \gamma_{lj} f_j(u_j(t - \nu_{lj}(t))) + v_l(t) \quad (12)$$

其中: $\alpha_1 = 1.5, \alpha_2 = 1.74, h_j(x) = \tanh(2x), g_j(x) = \cos(4x), j = 1, 2, \nu_{lj}(t) = e^t/(e^t + 1),$

$$\mathbf{B} = (\beta_{lj})_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0.4 & -1.1 \\ 3.3 & -0.2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma} = (\gamma_{lj})_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -1.1 & 0.6 \\ 1.1 & 1.5 \end{bmatrix}.$$

通过数值模拟发现模型 (12) 存在混沌吸引子, 如图 5 所示, 初始条件为 $u_1 = 1, u_2 = -0.3$.

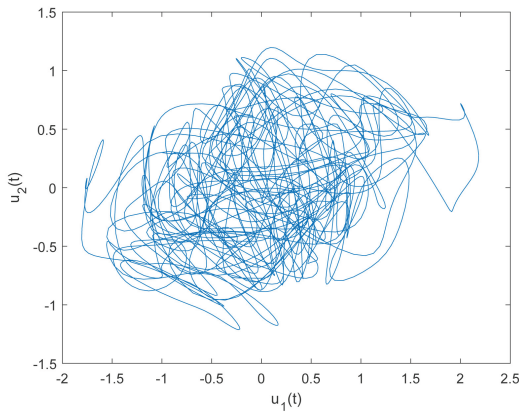


图 1 模型 (11) 的混沌行为

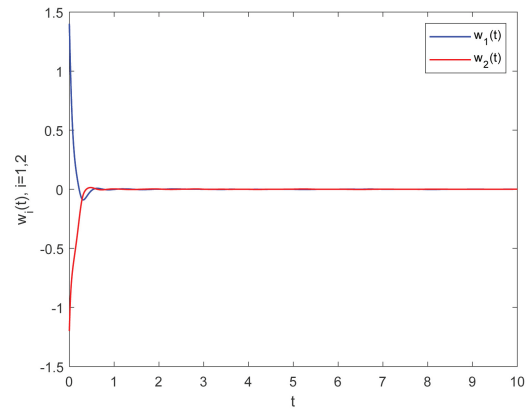


图 2 控制策略 (6) 下同步误差 $w_l(t)$ 的时间演化

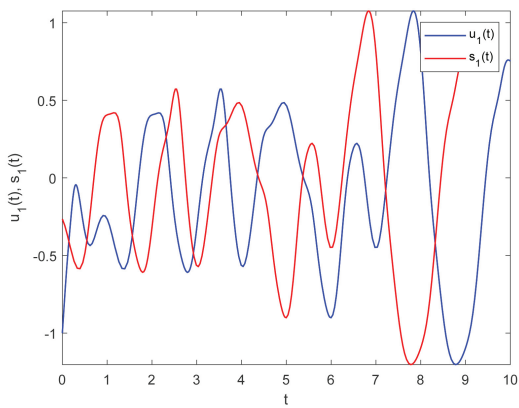


图 3 $u_1(t)$ 和 $s_1(t)$ 的时间演化

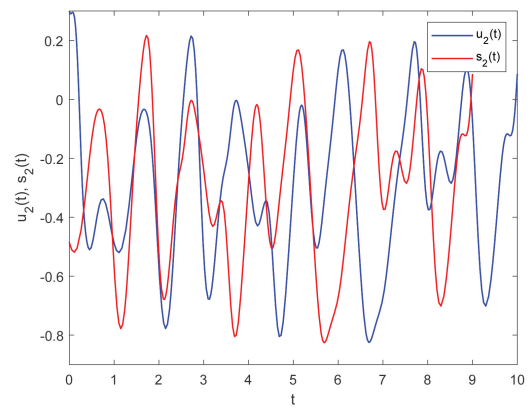


图 4 $u_2(t)$ 和 $s_2(t)$ 的时间演化

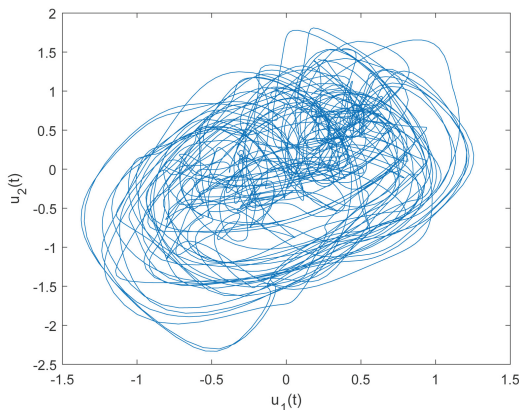


图 5 模型 (12) 的混沌行为

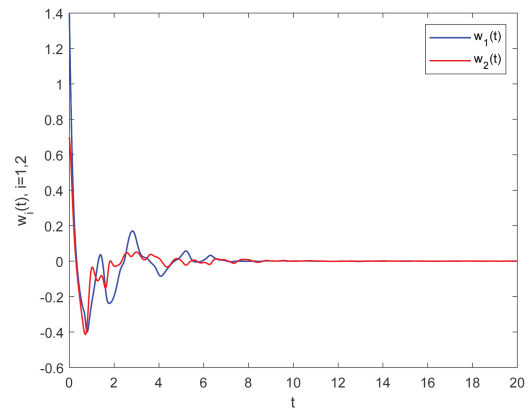


图 6 控制策略 (6) 下同步误差 $w_l(t)$ 的时间演化

对于任意的 $l=1,2$, 取 $k_1=k_2=m_1=m_2=1$, $\bar{v}_{11}=\bar{v}_{12}=\bar{v}_{21}=\bar{v}_{22}=1/4$, $\rho_1=4$, $\rho_2=6$, 模型满足假设 1 和假设 4. 基于推论 1, 模型 (12) 是滞后同步的, 如图 6 所示. 图 7~8 描述了模型 (12) 在控制策略 (6) 下的同步曲线.

例 3 考虑如下具有比例时滞的神经网络模型

$$\frac{du_i(t)}{dt} = -\alpha_i u_i(t) + \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} h_j(u_j(t)) + \sum_{j=1}^2 \gamma_{ij} f_j(u_j(r_{ij}t)) + v_i(t) \quad (13)$$

其中: $\alpha_1=9$, $\alpha_2=5$, $h_j(x) = \tanh(2x)$, $g_j(x) = \cos(4x)$, $j=1,2$, $r_{11}=r_{12}=r_{21}=r_{22}=0.65$,

$$\mathbf{B} = (\beta_{ij})_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -1.2 & 1 \\ -1 & 1.72 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = (\beta_{ij})_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -0.81 & 3 \\ -2.5 & -2.2 \end{bmatrix}.$$

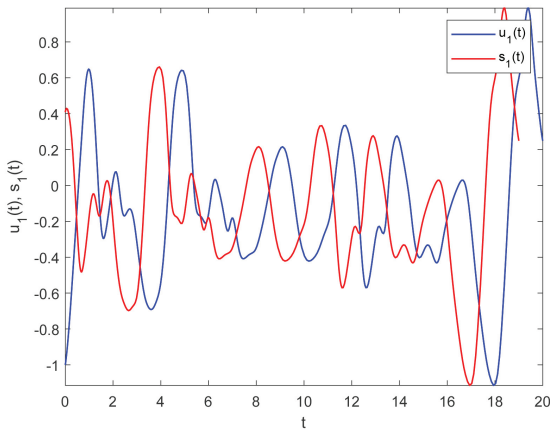


图 7 $u_1(t)$ 和 $s_1(t)$ 的时间演化

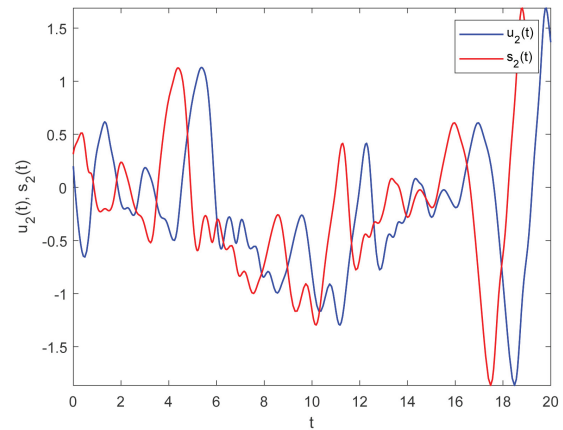


图 8 $u_2(t)$ 和 $s_2(t)$ 的时间演化

通过数值模拟发现模型 (13) 存在混沌吸引子, 如图 9 所示, 初始条件为 $u_1 = -1, u_2 = 0.3$.

对于任意的 $l = 1, 2$, 取 $k_1 = k_2 = m_1 = m_2 = 1, \rho_1 = 14, \rho_2 = 8$, 模型满足假设 1. 基于推论 2, 模型 (13) 是滞后同步的, 如图 10 所示. 图 11~12 描述了模型 (13) 在控制策略 (6) 下的同步曲线.

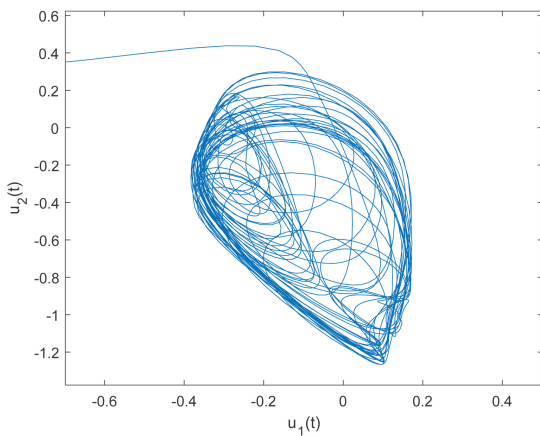


图 9 模型 (13) 的混沌行为

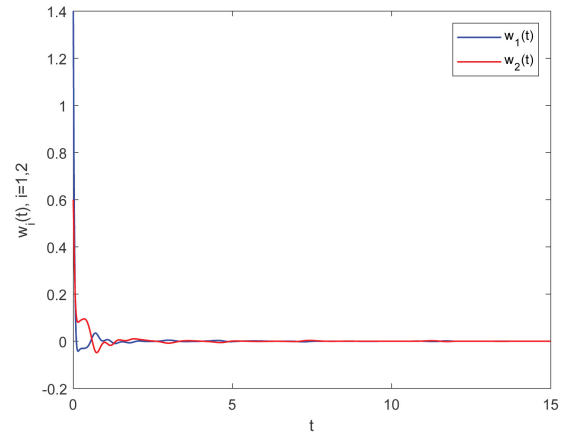


图 10 控制策略 (6) 下同步误差 $w_l(t)$ 的时间演化

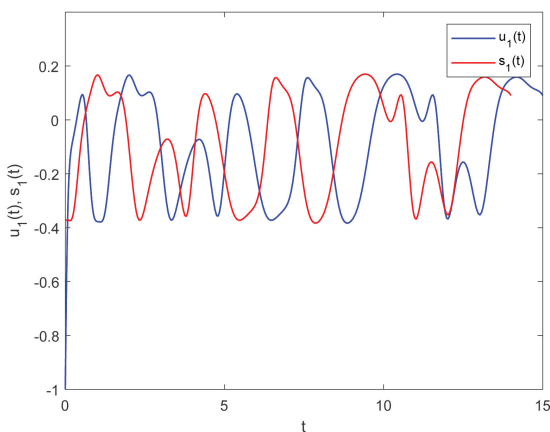


图 11 $u_1(t)$ 和 $s_1(t)$ 的时间演化

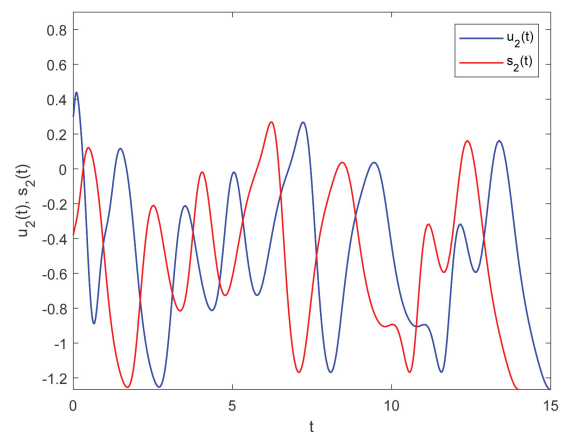


图 12 $u_2(t)$ 和 $s_2(t)$ 的时间演化

4 结论

本文对一类具有广义时滞的神经网络的滞后同步进行了研究,通过设计一个反馈控制策略,构造合适的Lyapunov泛函,得到了神经网络滞后同步的充分准则,最后通过3个实例对研究结果进行了验证.与已有结果相比^[23-27,30-31],本文提出了比离散时滞和比例时滞更一般的模型,并且本文的模型包含了以上研究中的模型.目前,通过脉冲控制和非周期间歇控制来分析四元值神经网络的滞后同步技术相对较少,这将是未来研究的方向.

参考文献:

- [1] LU J H, ZHOU T S, ZHANG S C. Chaos synchronization between linearly coupled chaotic systems[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2002, 14: 529-541.
- [2] HU X, FENG G, DUAN S, et al. A memristive multilayer cellular neural network with applications to image processing[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2016, 28(8): 1889-1901.
- [3] LI C D, LIAO X F, WONG K. Chaotic lag synchronization of coupled time-delayed systems and its applications in secure communication[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2004, 194(3/4): 187-202.
- [4] HUANG D, JIANG H J, YU Z Y, et al. Cluster-delay consensus in MASs with layered intermittent communication: a multi-tracking approach[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 95: 1713-1730.
- [5] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in chaotic systems[J]. *Physical Review Letters*, 1990, 64(8): 821-825.
- [6] AHN C K. Neural network \mathcal{H}_∞ chaos synchronization[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2010, 60: 295-302.
- [7] KE J X, YI L L, HU W S. Chaos synchronization error compensation by neuralnetwork[J]. *IEEE Photonics Technology Letters*, 2019, 31(13): 1104-1107.
- [8] ZHAO T T, YU J, HU C. Fixed-time synchronization of multi-layer networks via periodically intermittent control[J]. *Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English)*, 2022, 39(6): 648-653.
- [9] LI X Y, LI X T, HU C. Some new results on stability and synchronization for delayed inertial neural networks based on non-reduced order method[J]. *Neural Networks*, 2017, 96: 91-100.
- [10] YU J, HU C, JIANG H J, et al. Exponential and adaptive synchronization of inertial complex-valued neural networks: a non-reduced order and non-separation approach[J]. *Neural Networks*, 2020, 124: 50-59.
- [11] 惠姣姣, 于娟. 基于非周期间歇控制的复值惯性神经网络指数同步[J]. *新疆大学学报(自然科学版)(中英文)*, 2022, 39(2): 151-160.
- [12] WANG G, DING Z X, LI S, et al. Finite-time lag projective synchronization of nonidentical fractional delayed memristive neural networks[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2022, 359: 10653-10675.
- [13] DING Z X, CHEN C, WEN S P, et al. Lag projective synchronization of nonidentical fractional delayed memristive neural networks[J]. *Neurocomputing*, 2022, 469: 138-150.
- [14] QIN X J, JIANG H J, QIU J L, et al. Strictly intermittent quantized control for fixed/predefined-time cluster lag synchronization of stochastic multi-weighted complex networks[J]. *Neural Networks*, 2023, 158: 258-271.
- [15] AADHITHIYAN S, RAJA R, ZHU Q, et al. A robust non-fragile control lag synchronization for fractional order multi-weighted complex dynamic networks with coupling delays[J]. *Neural Processing Letters*, 2022, 54(4): 2919-2940.
- [16] ZHANG G D, HU J H, SHEN Y. Exponential lag synchronization for delayed memristive recurrent neural networks[J]. *Neurocomputing*, 2015, 154: 86-93.
- [17] WEN S P, ZENG Z G, HUANG T W, et al. Lag synchronization of switched neural networks via neural activation function and applications in image encryption[J]. *IEEE Translation Neural Network Learn System*, 2015, 26(7): 1493-1502.
- [18] SHAHVERDIEV E M, SIVAPRAKASAM S, SHORE K A. Lag synchronization in time-delayed systems[J]. *Physics Letters A*, 2002, 292: 320-324.
- [19] CHEN C, LI L X, PENG H P, et al. Adaptive lag synchronization of memristive neural networks with mixed delays[J]. *IEEE Access*, 2018, 6: 40768-40777.
- [20] HALIDING X, JIANG H J, ABDURAHMAN A, et al. Fixed-time lag synchronization analysis for delayed memristor-based neural networks[J]. *Neural Processing Letters*, 2020, 52: 485-509.