

# 具有高危易感年龄和潜伏期年龄的 HIV 传播模型研究\*

王雅萍, 王生福, 聂麟飞<sup>†</sup>

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

**摘要:** 基于 HIV 的传播特点, 将易感人群分为普通易感人群和高危易感人群, 提出一类具有高危易感年龄和潜伏期年龄的 HIV 传播模型. 利用下一代算子方法给出基本再生数  $\mathcal{R}_0$  的精确表达式. 讨论无病平衡态和地方病平衡态的存在性与稳定性, 即: 当  $\mathcal{R}_0 < 1$  时无病平衡态全局渐近稳定, 当  $\mathcal{R}_0 > 1$  时地方病平衡态全局渐近稳定.

**关键词:** HIV 传播; 高危易感人群; 潜伏期年龄; 基本再生数; 稳定性

**DOI:** 10.13568/j.cnki.651094.651316.2022.04.06.0001

**中图分类号:** O175 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2023)02-0160-09

**引文格式:** 王雅萍, 王生福, 聂麟飞. 具有高危易感年龄和潜伏期年龄的 HIV 传播模型研究[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2023, 40(2): 160-168+174.

**英文引文格式:** WANG Yaping, WANG Shengfu, NIE Linfei. Analysis of HIV transmission model with high-risk susceptible age and latent age[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2023, 40(2): 160-168+174.

## Analysis of HIV Transmission Model with High-Risk Susceptible Age and Latent Age

WANG Yaping, WANG Shengfu, NIE Linfei

(School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China)

**Abstract:** Based on the transmission characteristics of HIV, the susceptible population is divided into general susceptible population and high-risk susceptible population, and an HIV transmission model with high-risk susceptible age and latent age is developed. The exact expression of the basic reproduction number  $\mathcal{R}_0$  is obtained by using the next generation operator method. The existence and stability of disease-free steady state and endemic steady state are discussed, that is, the disease-free steady state is globally asymptotically stable for  $\mathcal{R}_0 < 1$  and the endemic steady state is globally asymptotically stable for  $\mathcal{R}_0 > 1$ .

**Key words:** HIV transmission; high-risk susceptible population; latent age; basic reproduction number; stability

## 0 引言

艾滋病医学全名为获得性免疫缺陷综合征 (Acquired Immune Deficiency Syndrome, AIDS), 是一种危害性极大的传染性疾病. 自 1981 年世界上发现第一例艾滋病病毒 (Human Immunodeficiency Virus, HIV) 感染者以来, AIDS 便以惊人的速度向全球蔓延, 现已成为全球最大的公共卫生问题之一. 据联合国艾滋病规划署和世界卫生组织 2018 年公布的数据, 全球约有 3 950 多万人感染艾滋病病毒, 因艾滋病死亡人数达 290 多万<sup>[1]</sup>.

近年来各国都在加大力度预防和控制艾滋病的传播, 诸多学者也从不同角度出发建立了各类动力学模型, 利用数学模型刻画 HIV/AIDS 的流行规律和流行趋势. 例如, 文献 [2-3] 提出了具有治疗的 HIV/AIDS 模型, 用下一

\* 收稿日期: 2022-04-06

基金项目: 国家自然科学基金“多宿主传染病模型动力学分析及应用”(11961066); 新疆维吾尔自治区自然科学基金“基于异质性的艾滋病传播的数学建模与防控分析——以新疆为例”(2021D01C070).

作者简介: 王雅萍 (1998-), 女, 硕士生, 从事微分方程理论及其应用的研究, E-mail: 1245740060@qq.com.

<sup>†</sup> 通讯作者: 聂麟飞 (1978-), 男, 博士, 教授, 主要从事微分方程理论及其应用的研究, E-mail: lfnie@163.com.

代矩阵方法定义了基本再生数并刻画了 HIV 传播的全局动力学行为. 文献 [4] 利用随机常微分方程建立了 HIV 传播模型, 证明了模型全局正解的存在唯一性, 给出了疾病灭绝和持续存在的充分条件. 然而, 上述 HIV 传播动力学模型在数学建模时都对易感人群采用了同质性假设, 忽略了一些高危易感人群 (如, 血友病患者, 吸毒者等) 比普通易感人群更容易感染 HIV, 这会导致所得到的结果可能会跟实际情况有一定的偏差. 因此, 将易感人群分为普通易感人群和高危易感人群, 考虑具有不同感染率的 HIV 传播模型更具有现实意义.

此外, 在传染病的传播过程中, 仓室年龄, 如感染年龄、疫苗年龄等因素对疾病的传播有着重要的影响. 例如, 病原体在宿主之间的传播率与其入侵宿主的时间长短密切相关. 目前, 已有学者关注了这一问题, 如, Mccluskey<sup>[5]</sup> 提出了具有潜伏年龄和感染年龄的传染病模型, 证明了该模型解的渐近光滑性和一致持久性, 并通过构造 Lyapunov 函数研究了地方病平衡态的全局稳定性, 其建模思想和研究方法被广泛引用<sup>[6-8]</sup>.

基于上述讨论, 为更精准地描述 HIV/AIDS 的传播规律, 本文将易感人群分为高危易感人群和普通易感人群, 提出一类具有高危易感年龄和潜伏期年龄的 HIV 传播模型, 讨论该模型无病平衡态和地方病平衡态的存在性和稳定性以及疾病的持久性.

## 1 模型的建立和预备知识

将某个特定地区的人群分为五类: 普通易感类、高危易感类、潜伏类、感染类、治疗类, 并分别用  $S_1(t)$ ,  $S_2(t, a)$ ,  $E(t, b)$ ,  $I(t)$ ,  $J(t)$  表示, 这里  $a, b$  分别表示高危易感类和潜伏类的仓室年龄. 基于艾滋病在不同人群间的传播规律, 建立如下具有类年龄结构的 HIV 传播模型, 该模型由微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dS_1(t)}{dt} = \Lambda_h - pS_1(t) - \mu S_1(t) - \beta_1 S_1(t)I(t) + \int_0^\infty \omega(a)S_2(t, a)da \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\right) S_2(t, a) = -(\omega(a) + \mu + \beta_2(a)I(t))S_2(t, a), \quad S_2(t, 0) = pS_1(t) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial b}\right) E(t, b) = -(\theta(b) + \mu)E(t, b) \\ E(t, 0) = \beta_1 S_1(t)I(t) + I(t) \int_0^\infty \beta_2(a)S_2(t, a)da \\ \frac{dI(t)}{dt} = \int_0^\infty \theta(b)E(t, b)db - \gamma I(t) - \mu I(t) \end{cases} \quad (1)$$

和

$$\frac{dJ(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu J(t) - \kappa J(t) \quad (2)$$

组成. 这里, 参数  $\Lambda_h$  为人群的补充率;  $\beta_1, \beta_2(a)$  分别是艾滋病感染者对普通易感者和高危易感者的感染率系数;  $p$  是普通易感者由于沾染不良行为转变成高危易感者的速率;  $\omega(a)$  是高危易感者由于接受教育或改变自身行为等因素变为普通易感者的比率;  $\theta(b)$  是 HIV 潜伏者发展为艾滋病感染者的速率;  $\kappa$  为因病死亡率;  $\mu$  为人口的自然死亡率. 由于个体感染艾滋病后无法治愈, 所以  $\gamma$  表示感染个体的治疗率.

注意方程 (2) 与模型 (1) 是解耦的, 因此只需考虑模型 (1) 的动力学行为, 其初始条件为:  $(S_1(0), S_2(0, a), E(0, b), I(0)) = (S_{10}, S_{20}(a), E_0(b), I_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{L}_+^1(0, \infty) \times \mathbb{L}_+^1(0, \infty) \times \mathbb{R}_+$ , 这里  $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ ,  $\mathbb{L}_+^1(0, \infty)$  是由定义在  $(0, \infty)$  上的非负可积函数构成的空间. 定义模型 (1) 的状态空间为  $\mathbb{X} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{L}_+^1(0, \infty) \times \mathbb{L}_+^1(0, \infty) \times \mathbb{R}_+$ , 其范数为  $\|(x_1, x_2, x_3, x_4)\|_{\mathbb{X}} = |x_1| + \int_0^\infty |x_2(a)| da + \int_0^\infty |x_3(b)| db + |x_4|$ , 其中  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{X}$ . 对任意  $x(\tau) \in \mathbb{L}_+^1(0, \infty)$ , 定义  $\|x(\tau)\|_1 = \int_0^\infty |x(\tau)| d\tau$ .

为了简化计算, 引入如下记号, 对任意  $a, b \geq 0$ ,  $\rho(t, \xi) = \omega(\xi) + \mu + \beta_2(\xi)I(t - a + \xi)$ ,  $\Gamma(t, a) = e^{-\int_0^a \rho(t, \xi) d\xi}$ ,  $\rho^*(a) = \omega(a) + \mu + \beta_2(a)I^*$ ,  $\Gamma^*(a) = e^{-\int_0^a \rho^*(\xi) d\xi}$ ,  $\rho(a) = \omega(a) + \mu$ ,  $\Gamma(a) = e^{-\int_0^a \rho(\xi) d\xi}$ ,  $\eta(b) = \theta(b) + \mu$ ,  $\Pi(b) = e^{-\int_0^b \eta(\xi) d\xi}$ . 应用 Volterra 公式, 对模型 (1) 的第二、三个方程分别沿着特征线  $t - a = c$ ,  $t - b = c$  ( $c$  为常数) 积分可得

$$S_2(t, a) = \begin{cases} S_2(t - a, 0)e^{-\int_0^a \rho(t, \xi) d\xi} = pS_1(t - a)\Gamma(t, a), & t > a \geq 0 \\ S_2(0, a - t)e^{-\int_{a-t}^a \rho(t, \xi) d\xi} = S_{20}(a - t)\Gamma(t, a)\Gamma^{-1}(t, a - t), & a \geq t \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$E(t, b) = \begin{cases} (\beta_1 S_1(t-b) + \int_0^\infty \beta_2(a) S_2(t-b, a) da) I(t-b) \Pi(b), & t > b \geq 0 \\ E_0(b-t) \Pi(b) \Pi^{-1}(b-t), & b \geq t \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

为讨论模型(1)解的适定性, 将其改写为抽象的 Cauchy 问题. 令  $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{L}^1((0, \infty), \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{L}^1((0, \infty), \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ , 定义线性算子  $\mathcal{A}: D(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X$  和非线性算子  $\mathcal{F}: \overline{D(\mathcal{A})} \rightarrow X$  为

$$\mathcal{A}\varphi = \begin{bmatrix} -(p+\mu)\phi_1 \\ -\varphi_1(0) \\ -\varphi_1' - (\omega+\mu)\varphi_1 \\ -\varphi_2(0) \\ -\varphi_2' - (\theta+\mu)\varphi_2 \\ -(\gamma+\mu)\phi_2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}\varphi = \begin{bmatrix} \Lambda_h - \beta_1\phi_1\phi_2 + \int_0^\infty \omega(a)\varphi_1(a)da \\ p\phi_1 \\ -\beta_2\varphi_1\phi_2 \\ \beta_1\phi_1\phi_2 + \phi_2 \int_0^\infty \beta_2(a)\varphi_1(a)da \\ 0 \\ \int_0^\infty \theta(b)\varphi_2(b)db \end{bmatrix},$$

其中  $\varphi = (\phi_1, 0, \varphi_1, 0, \varphi_2, \phi_2)^\top$  ( $\top$  表示向量的转置),  $D(\mathcal{A}) = \mathbb{R} \times \{0\} \times W^{1,1}((0, \infty), \mathbb{R}) \times \{0\} \times W^{1,1}((0, \infty), \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ ,  $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{L}^1((0, \infty), \mathbb{R}) \times \{0\} \times \mathbb{L}^1((0, \infty), \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ , 且  $D(\mathcal{A})$  在  $X$  中不稠密,  $W^{1,1}((0, \infty), \mathbb{R})$  是 Sobolev 空间, 即由定义在  $(0, \infty)$  上所有绝对连续函数构成的空间. 令  $u(t) = (S_1(t), 0, S_2(t, \cdot), 0, E(t, \cdot), I(t))^\top$ , 则模型(1)可写为

$$\frac{du(t)}{dt} = \mathcal{A}u(t) + \mathcal{F}(u(t)), \quad u(0) = u_0 = (S_1(0), 0, S_2(0, \cdot), 0, E(0, \cdot), I(0))^\top \quad (5)$$

求解系统(5)可得  $u(t) = u_0 + \mathcal{A} \int_0^t u(s) ds + \int_0^t \mathcal{F}(u(s)) ds$ . 令  $X_0 = \overline{D(\mathcal{A})}$ ,  $X_{0+} = \mathbb{R}_+ \times \{0\} \times \mathbb{L}_+^1((0, \infty), \mathbb{R}) \times \{0\} \times \mathbb{L}_+^1((0, \infty), \mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+$ . 由文献[9]中的定理3.2可知,  $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$  是一个 Hille-Yosida 算子. 从而由文献[9]中的引理2.2, 它在其定义域的闭包上生成一个  $C_0$ -半群. 因此, 关于模型(1)解的适定性, 有下面的定理.

**定理 1** 对任意的  $u_0 \in X_{0+}$ , 模型(1)存在唯一的积分形式的连续解  $u(t)$ . 此外, 由  $\Phi(t, u_0) = u(t, u_0)$  定义的映射  $\Phi: [0, +\infty) \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  是一个连续的半流, 即, 映射  $\Phi$  是连续的且满足  $\Phi(0, \cdot) = \mathbb{I}$  ( $\mathbb{I}$  是单位映射) 和  $\Phi(t, \Phi(z, \cdot)) = \Phi(t+z, \cdot)$ .

**定理 2** 对任意  $t \geq 0$ , 具有非负初始条件的模型(1)的解都是非负且最终有界的.

**证明** 首先, 对任意  $t \geq 0$ ,  $S_1(t)$  是非负的. 事实上, 若存在  $t_0 > 0$  使得  $S_1(t_0) = 0$  且对  $t \in [0, t_0)$ ,  $S_1(t) > 0$ , 则有  $S_1'(t_0) \leq 0$ . 另一方面, 由模型(1)的第一个方程和式(3)可得

$$S_1'(t_0) = \Lambda_h + \int_0^{t_0} \omega(a) p S_1(t_0 - a) \Gamma(t_0, a) da + \int_{t_0}^\infty \omega(a) S_{20}(a - t_0) \frac{\Gamma(t_0, a)}{\Gamma(t_0, a - t_0)} da > 0,$$

这是矛盾的. 因此, 对任意  $t \geq 0$ ,  $S_1(t) > 0$ . 同理, 对任意  $t \geq 0$ ,  $I(t)$  也是非负的. 进而, 由式(3)和(4), 对任意  $t \geq 0$ , 满足非负初始条件的  $S_2(t, a)$  和  $E(t, a)$  是非负的.

下证解的最终有界性. 记  $H(t) = S_1(t) + \int_0^\infty S_2(t, a) da + \int_0^\infty E(t, b) db + I(t)$ , 则

$$\frac{d}{dt} H(t) \leq \Lambda_h - \mu \left( S_1(t) + \int_0^\infty S_2(t, a) da + \int_0^\infty E(t, b) db + I(t) \right).$$

因此,  $\limsup_{t \rightarrow \infty} (S_1(t) + \int_0^\infty S_2(t, a) da + \int_0^\infty E(t, b) db + I(t)) \leq \Lambda_h / \mu$ .

**注** 由定理2可知, 区域

$$\Omega = \left\{ (S_1, S_2(\cdot), E(\cdot), I) \in \mathbb{X}_+ : S_1 + \int_0^\infty S_2(a) da + \int_0^\infty E(b) db + I \leq \frac{\Lambda_h}{\mu} \right\}$$

是模型(1)的正向不变集.

## 2 无病平衡态的存在性及稳定性

显然, 模型(1)存在一个无病平衡态  $\mathcal{E}^0 = (S_1^0, S_2^0(a), 0, 0)$ , 其中

$$S_1^0 = \frac{\Lambda_h}{\mu + p(1 - \int_0^\infty \omega(a) \Gamma(a) da)}, \quad S_2^0(a) = p S_1^0 \Gamma(a).$$

利用下一代算子方法定义模型 (1) 的基本再生数为

$$\mathcal{R}_0 = \frac{A_h \int_0^\infty \theta(b)\Pi(b)db}{(\gamma + \mu)(\mu + p(1 - \int_0^\infty \omega(a)\Gamma(a)da))} \left( \beta_1 + p \int_0^\infty \beta_2(a)\Gamma(a)da \right).$$

关于模型 (1) 无病平衡态  $\mathcal{E}^0$  的稳定性, 有下面的结论.

**定理 3** 若  $\mathcal{R}_0 < 1$ , 则  $\mathcal{E}^0$  是局部渐近稳定的; 若  $\mathcal{R}_0 > 1$ , 则  $\mathcal{E}^0$  是不稳定的.

**证明** 令  $S_1(t) = S_1^0 + x_1(t)$ ,  $S_2(t, a) = S_2^0(a) + x_2(t, a)$ ,  $E(t, b) = x_3(t, b)$ ,  $I(t) = x_4(t)$ , 在无病平衡态  $\mathcal{E}^0$  处对模型 (1) 进行线性化可得

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -px_1(t) - \mu x_1(t) - \beta_1 S_1^0 x_4(t) + \int_0^\infty \omega(a)x_2(t, a)da \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a} \right) x_2(t, a) = -\beta_2(a)S_2^0(a)x_4(t) - (\omega(a) + \mu)x_2(t, a), x_2(t, 0) = px_1(t) \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial b} \right) x_3(t, b) = -(\theta(b) + \mu)x_3(t, b), x_3(t, 0) = \beta_1 S_1^0 x_4(t) + x_4(t) \int_0^\infty \beta_2(a)S_2^0(a)da \\ \frac{dx_4(t)}{dt} = \int_0^\infty \theta(b)x_3(t, b)db - \gamma x_4(t) - \mu x_4(t) \end{cases} \quad (6)$$

设系统 (6) 存在指数形式的解  $x_1(t) = \bar{x}_1 e^{\lambda t}$ ,  $x_2(t, a) = \bar{x}_2(a) e^{\lambda t}$ ,  $x_3(t, b) = \bar{x}_3(b) e^{\lambda t}$ ,  $x_4(t) = \bar{x}_4 e^{\lambda t}$ , 其中  $\bar{x}_1, \bar{x}_4$  为正常数,  $\bar{x}_2(a), \bar{x}_3(b)$  为非负函数, 则有

$$\begin{cases} \lambda \bar{x}_1 = -p\bar{x}_1 - \mu \bar{x}_1 - \beta_1 S_1^0 \bar{x}_4 + \int_0^\infty \omega(a)\bar{x}_2(a)da \\ \frac{d\bar{x}_2(a)}{da} + \lambda \bar{x}_2(a) = -\beta_2(a)S_2^0(a)\bar{x}_4 - (\omega(a) + \mu)\bar{x}_2(a), \bar{x}_2(0) = p\bar{x}_1 \\ \frac{d\bar{x}_3(b)}{db} + \lambda \bar{x}_3(b) = -(\theta(b) + \mu)\bar{x}_3(b) \\ \bar{x}_3(0) = \beta_1 S_1^0 \bar{x}_4 + \bar{x}_4 \int_0^\infty \beta_2(a)S_2^0(a)da \\ \lambda \bar{x}_4 = \int_0^\infty \theta(b)\bar{x}_3(b)db - \gamma \bar{x}_4 - \mu \bar{x}_4 \end{cases} \quad (7)$$

由方程组 (7) 的第三个和第五个方程得  $\bar{x}_3(b) = \bar{x}_3(0)\Pi(b)e^{-\lambda b}$ ,  $\bar{x}_4 = \int_0^\infty \theta(b)\bar{x}_3(b)db / (\lambda + \gamma + \mu)$ . 将其代入方程组 (7) 的第四个方程可得

$$1 = \frac{A_h \int_0^\infty \theta(b)\Pi(b)e^{-\lambda b}db}{(\lambda + \gamma + \mu)(\mu + p(1 - \int_0^\infty \omega(a)\Gamma(a)da))} \left( \beta_1 + p \int_0^\infty \beta_2(a)\Gamma(a)da \right),$$

标记上述方程的右端为  $G(\lambda)$ , 注意到  $G'(\lambda) < 0$ ,  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} G(\lambda) = 0$  且  $G(0) = \mathcal{R}_0$ . 因此, 若  $\mathcal{R}_0 > 1$ , 则  $G(0) > 1$ . 故存在  $\lambda^* > 0$  使得  $G(\lambda^*) = 1$  成立, 从而无病平衡态  $\mathcal{E}^0$  是不稳定的.

当  $\mathcal{R}_0 < 1$  时, 假设方程  $G(\lambda) = 1$  存在非负实部的根  $\lambda = x + yi (x \geq 0)$ , 则

$$\begin{aligned} |G(\lambda)| &= \left| \frac{A_h \int_0^\infty \theta(b)\Pi(b)e^{-\lambda b}db}{(\lambda + \gamma + \mu)(\mu + p(1 - \int_0^\infty \omega(a)\Gamma(a)da))} \left( \beta_1 + p \int_0^\infty \beta_2(a)\Gamma(a)da \right) \right| \\ &\leq \frac{A_h \int_0^\infty \theta(b)\Pi(b)e^{-x b}db}{(\lambda + \gamma + \mu)(\mu + p(1 - \int_0^\infty \omega(a)\Gamma(a)da))} \left( \beta_1 + p \int_0^\infty \beta_2(a)\Gamma(a)da \right) \\ &\leq \mathcal{R}_0 < 1. \end{aligned}$$

这是矛盾的, 因此当  $\mathcal{R}_0 < 1$  时  $G(\lambda) = 1$  的所有根都具有负实部, 故  $\mathcal{E}^0$  是局部渐近稳定的.

为讨论无病平衡态的全局稳定性, 我们需要以下引理.

**引理 1**<sup>[10]</sup> 若  $\mathcal{B} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  是有界连续可微函数,  $\mathcal{B}_\infty = \liminf_{t \rightarrow \infty} \mathcal{B}(t)$ ,  $\mathcal{B}^\infty = \limsup_{t \rightarrow \infty} \mathcal{B}(t)$ , 则存在序列  $\{s_n\}$  和  $\{t_n\}$ , 使得当  $n \rightarrow \infty$  时, 有  $s_n \rightarrow \infty$ ,  $t_n \rightarrow \infty$ , 且  $\mathcal{B}(s_n) \rightarrow \mathcal{B}_\infty$ ,  $\mathcal{B}'(s_n) \rightarrow 0$ ,  $\mathcal{B}(t_n) \rightarrow \mathcal{B}^\infty$ ,  $\mathcal{B}'(t_n) \rightarrow 0$  几乎处处.

**引理 2<sup>[11]</sup>** 若  $\mathcal{B}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  是有界函数并且  $k(\theta) \in \mathbb{L}_+^1(0, \infty)$ , 则  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_0^t k(\theta)\mathcal{B}(t-\theta)d\theta \leq \mathcal{B}^\infty \|k(\theta)\|_1$ .

**定理 4** 若  $\mathcal{R}_0 < 1$ , 则模型 (1) 的无病平衡态  $\mathcal{E}^0$  是全局渐近稳定的.

**证明** 由定理 3 知无病平衡态  $\mathcal{E}^0$  是局部渐近稳定的, 故只需证明  $\mathcal{E}^0$  是全局吸引的. 令  $(S_1(t), S_2(t, a), E(t, b), I(t))$  是模型 (1) 满足初始条件  $(S_{10}, S_{20}(a), E_0(b), I_0) \in \Omega$  的解, 当  $t > a$  时,  $S_2(t, a) = pS_1(t-a)\Gamma(t, a)$ , 根据模型 (1) 的第一个方程和引理 1 可得  $0 \leq \Lambda_h - (p + \mu)S_1^\infty + pS_1^\infty \int_0^\infty \omega(a)\Gamma(a)da$ , 因此,  $S_1^\infty \leq \Lambda_h / (\mu + p(1 - \int_0^\infty \omega(a)\Gamma(a)da)) = S_1^0$ ,  $S_2^\infty \leq pS_1^0\Gamma(a) = S_2^0(a)$ . 注意到

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \theta(b)E(t, b)db \\ & \leq \int_0^t \theta(b) \left( \beta_1 S_1(t-b) + \int_0^\infty \beta_2(a)S_2(t-b, a)da \right) I(t-b)\Pi(b)db + e^{-\mu t} \int_t^\infty \theta(b)E_0(b-t)db \\ & \leq \int_0^t \theta(b) \left( \beta_1 S_1(t-b) + \int_0^{t-b} \beta_2(a)S_2(t-b-a, 0)\Gamma(t-b, a)da + e^{-\mu(t-b)} \int_{t-b}^\infty \beta_2(a)S_{20}(a+b-t)da \right) \\ & \quad \times I(t-b)\Pi(b)db + e^{-\mu t} \int_t^\infty \theta(b)E_0(b-t)db, \end{aligned}$$

从而当  $t \rightarrow \infty$  时, 有

$$\begin{aligned} \left( \int_0^\infty \theta(b)E(t, b)db \right)^\infty & \leq \int_0^\infty \theta(b) \left( \beta_1 S_1^\infty + \int_0^\infty \beta_2(a)S_2^\infty da \right) I^\infty \Pi(b)db \\ & \leq I^\infty \int_0^\infty \theta(b) \left( \beta_1 S_1^0 + \int_0^\infty \beta_2(a)S_2^0(a)da \right) \Pi(b)db \end{aligned} \tag{8}$$

进一步, 由模型 (1) 的第五个方程可得  $I(t) = e^{-(\gamma+\mu)t}I(0) + \int_0^t e^{-(\gamma+\mu)s} \int_0^\infty \theta(b)E(t-s, b)dbds$ , 再根据引理 1 和不等式 (8) 得

$$I^\infty \leq \frac{\int_0^\infty \theta(b)\Pi(b)db}{\gamma + \mu} \left( \beta_1 S_1^0 + \int_0^\infty \beta_2(a)S_2^0(a)da \right) I^\infty = \mathcal{R}_0 I^\infty.$$

由于  $\mathcal{R}_0 < 1$ , 所以  $I^\infty = 0$ , 从而有  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t, b) = 0$ .

最后来证明  $\lim_{t \rightarrow \infty} S_1(t) = S_1^0$  和  $\lim_{t \rightarrow \infty} S_2(t, a) = S_2^0(a)$ . 由引理 1, 存在一个序列  $\{\tilde{t}_n\}$  使得当  $\tilde{t}_n \rightarrow \infty$  时,  $S_1(\tilde{t}_n) \rightarrow (S_1)_\infty$  且  $dS_h(\tilde{t}_n)/dt \rightarrow 0$ . 则, 由模型 (1) 的第一个方程有

$$\frac{dS_1(\tilde{t}_n)}{dt} = \Lambda_h - pS_1(\tilde{t}_n) - \mu S_1(\tilde{t}_n) - \beta_1 S_1(\tilde{t}_n)I(\tilde{t}_n) + \int_0^\infty \omega(a)S_2(\tilde{t}_n, a)da.$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 有  $0 = \Lambda_h - p(S_1)_\infty - \mu(S_1)_\infty + p(S_1)_\infty \int_0^\infty \omega(a)\Gamma(a)da$ , 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_1(t) = \frac{\Lambda_h}{\mu + p(1 - \int_0^\infty \omega(a)\Gamma(a)da)} = S_1^0.$$

又由式 (3), 可得  $\lim_{t \rightarrow \infty} S_2(t, a) = pS_1^0\Gamma(a) = S_2^0(a)$ .

综上所述, 若  $\mathcal{R}_0 < 1$ , 则  $\lim_{t \rightarrow \infty} (S_1(t), S_2(t, \cdot), E(t, \cdot), I(t)) = \mathcal{E}^0$ .

### 3 地方病平衡态的存在性及稳定性

若模型 (1) 存在地方病平衡态  $\mathcal{E}^* = (S_1^*, S_2^*(a), E^*(b), I^*)$ , 则其满足

$$\begin{cases} \Lambda_h - pS_1^* - \mu S_1^* - \beta_1 S_1^* I^* + \int_0^\infty \omega(a)S_2^*(a)da = 0 \\ \frac{dS_2^*(a)}{da} = -(\omega(a) + \mu + \beta_2(a)I^*)S_2^*(a), \quad S_2^*(0) = pS_1^* \\ \frac{dE^*(b)}{db} = -(\theta(b) + \mu)E^*(b), \quad E^*(0) = \beta_1 S_1^* I^* + I^* \int_0^\infty \beta_2(a)S_2^*(a)da \\ \int_0^\infty \theta(b)E^*(b)db - \gamma I^* - \mu I^* = 0 \end{cases} \tag{9}$$

求解方程组 (9) 的第二个和第三个方程可得

$$S_2^*(a) = pS_1^*\Gamma^*(a), \quad E^*(b) = I^* \left( \beta_1 S_1^* + pS_1^* \int_0^\infty \beta_2(a)\Gamma^*(a)da \right) \Pi(b).$$

从而,  $S_1^* = A_h / (\mu + \beta_1 I^* + p(1 - \int_0^\infty \omega(a)\Gamma^*(a)da))$ . 将  $S_1^*, S_2^*(a), E^*(b)$  的表达式代入方程组 (9) 的最后一个方程可得

$$\frac{(\beta_1 + p \int_0^\infty \beta_2(a)\Gamma^*(a)da) A_h \int_0^\infty \theta(b)\Pi(b)db}{\mu + \beta_1 I^* + p(1 - \int_0^\infty \omega(a)\Gamma^*(a)da)} - (\gamma + \mu) = 0 \tag{10}$$

记方程 (10) 的左端为  $F(I^*)$ , 则有  $F(+\infty) = \lim_{I^* \rightarrow +\infty} F(I^*) = -(\gamma + \mu) < 0$ , 又有

$$\begin{aligned} F(0) &= \frac{A_h \int_0^\infty \theta(b)\Pi(b)db}{\mu + p(1 - \int_0^\infty \omega(a)\Gamma(a)da)} \left( \beta_1 + p \int_0^\infty \beta_2(a)\Gamma(a)da \right) - (\gamma + \mu) \\ &= \left( \frac{A_h \int_0^\infty \theta(b)\Pi(b)db}{(\gamma + \mu)(\mu + p(1 - \int_0^\infty \omega(a)\Gamma(a)da))} \left( \beta_1 + p \int_0^\infty \beta_2(a)\Gamma(a)da \right) - 1 \right) (\gamma + \mu) \\ &= (\mathcal{R}_0 - 1)(\gamma + \mu). \end{aligned}$$

若  $\mathcal{R}_0 > 1$ , 则有  $F(0) > 0$ , 由连续函数零点存在定理可知, 至少存在一个  $I^* > 0$  使得  $F(I^*) = 0$ , 即当  $\mathcal{R}_0 > 1$  时存在地方病平衡态.

综合上述讨论, 关于模型 (1) 地方病平衡态的存在性, 有下面的结论.

**定理 5** 若  $\mathcal{R}_0 > 1$ , 模型 (1) 存在地方病平衡态  $\mathcal{E}^* = (S_1^*, S_2^*(a), E^*(b), I^*)$ .

为研究模型 (1) 地方病平衡态的全局性质, 需要证明疾病的一致持久性. 为此, 定义

$$\begin{aligned} \bar{b} &= \left\{ b : \int_0^\infty \theta(b)db = 0, \int_0^\infty \mu_2(b)db = 0 \right\}, \quad \tilde{\mathbb{X}} = \mathbb{L}_+^1(0, \infty) \times \mathbb{R}_+, \\ \tilde{\mathbb{Y}} &= \left\{ (E(t, \cdot), I(t)) \in \tilde{\mathbb{X}} : \int_0^{\bar{b}} E(t, b)db > 0 \text{ 或者 } I(t) > 0 \right\}, \\ \mathbb{Y} &= \mathbb{R}_+ \times \mathbb{L}_+^1(0, \infty) \times \tilde{\mathbb{Y}}, \quad \partial\mathbb{Y} = \mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}, \quad \partial\tilde{\mathbb{Y}} = \tilde{\mathbb{X}} \setminus \tilde{\mathbb{Y}}. \end{aligned}$$

根据文献 [12],  $\mathbb{Y}$  和  $\partial\mathbb{Y}$  都是模型 (1) 的解半流  $\Phi(t, x_0)$  的正向不变集.

**定理 6** 若  $\mathcal{R}_0 > 1$ , 则模型 (1) 的解半流  $\{\Phi(t, x_0)\}_{t \geq 0}$  关于  $(\mathbb{Y}, \partial\mathbb{Y})$  是一致持久的. 即, 存在一个不依赖于初值的常数  $\epsilon > 0$ , 使得对任意的  $x_0 \in \mathbb{Y}$ , 有  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t, x_0)\|_{\mathbb{X}} \geq \epsilon$ .

**证明** 首先证明  $\mathcal{E}^0$  在  $\partial\tilde{\mathbb{Y}}$  上是全局渐近稳定的. 设  $(S_{10}, S_{20}(\cdot), E_0(\cdot), I_0) \in \partial\mathbb{Y}$ , 则  $(E_0(\cdot), I_0) \in \partial\tilde{\mathbb{Y}}$ . 考虑模型 (1) 的子系统

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial b} \right) E(t, b) = -(\theta(b) + \mu) E(t, b), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \int_0^\infty \theta(b)E(t, b)db - \gamma I(t) - \mu I(t), \\ E(t, 0) = \beta_1 S_1(t)I(t) + I(t) \int_0^\infty \beta_2(a)S_2(t, a)da, \quad E(0, b) = E_0(b), \quad I(0) = I_0. \end{cases}$$

由于  $\limsup_{t \rightarrow \infty} S_1(t) \leq A_h/\mu$ ,  $\limsup_{t \rightarrow \infty} S_2(t, a) \leq A_h/\mu$ , 由微分方程比较原理, 对任意  $t \geq 0$ , 有  $E(t, b) \leq \tilde{E}(t, b)$ ,  $I(t) \leq \tilde{I}(t)$ , 其中  $(\tilde{E}(t, b), \tilde{I}(t))$  是下面系统的解

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial b} \right) \tilde{E}(t, b) = -(\theta(b) + \mu) \tilde{E}(t, b), \\ \frac{d\tilde{I}(t)}{dt} = \int_0^\infty \theta(b)\tilde{E}(t, b)db - \gamma \tilde{I}(t) - \mu \tilde{I}(t), \\ \tilde{E}(t, 0) = \beta_1 \frac{A_h}{\mu} \tilde{I}(t) + \tilde{I}(t) \int_0^\infty \beta_2(a) \frac{A_h}{\mu} da, \quad \tilde{E}(0, b) = E_0(b), \quad \tilde{I}(0) = I_0. \end{cases}$$

由特征线法解得

$$\tilde{E}(t, b) = \begin{cases} \frac{A_h}{\mu} \left( \beta_1 + \int_0^\infty \beta_2(a) da \right) \tilde{I}(t-b) \Pi(b), & t > b \geq 0 \\ E_0(b-t) \frac{\Pi(b)}{\Pi(b-t)}, & b \geq t \geq 0 \end{cases} \quad (11)$$

从而有

$$\frac{d\tilde{I}(t)}{dt} = \frac{A_h}{\mu} \left( \beta_1 + \int_0^\infty \beta_2(a) da \right) \int_0^t \theta(b) \Pi(b) \tilde{I}(t-b) db + \int_t^\infty \frac{E_0(b-t) \Pi(b)}{\Pi(b-t)} db - \gamma \tilde{I}(t) - \mu \tilde{I}(t).$$

因为  $(E_0(\cdot), I_0) \in \partial \tilde{Y}$ , 所以  $\int_t^\infty E_0(b-t) \Pi(b) \Pi^{-1}(b-t) db = 0$  恒成立. 注意到微分方程

$$\frac{d\tilde{I}(t)}{dt} = \frac{A_h}{\mu} \left( \beta_1 + \int_0^\infty \beta_2(a) da \right) \int_0^t \theta(b) \Pi(b) \tilde{I}(t-b) db - \gamma \tilde{I}(t) - \mu \tilde{I}(t), \quad \tilde{I}(0) = 0,$$

有唯一的解  $\tilde{I}(t) = 0$ , 则由式(11)可知, 对任意  $t > b \geq 0$ ,  $\tilde{E}(t, b) = 0$ ; 当  $b \geq t$  时,

$$\|\tilde{E}(t, b)\|_1 = \left\| E_0(b-t) \frac{\Pi(b)}{\Pi(b-t)} \right\|_1 \leq \|E_0(b-t)\|_1 e^{-\mu t}.$$

这表明  $\tilde{E}(t, b) \rightarrow 0, t \rightarrow 0$ , 从而  $\lim_{t \rightarrow \infty} E(t, b) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ . 故,  $\partial \tilde{Y}$  是正向不变集. 进一步,  $\lim_{t \rightarrow \infty} S_1(t) = S_1^0, \lim_{t \rightarrow \infty} S_2(t, a) = S_2^0(a)$ , 因此无病平衡态  $\mathcal{E}^0$  在  $\partial \tilde{Y}$  上是全局渐近稳定的.

下面证明存在  $T > 0$  和  $\epsilon > 0$ , 使得对任意  $x_0 \in \mathbb{Y}$ , 有  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t, x_0)\|_x \geq \epsilon$ . 即

$$W^s(\mathcal{E}^0) \cap \mathbb{Y} = \emptyset, \quad W^s(\mathcal{E}^0) = \{x_0 \in \mathbb{Y} : \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, x_0) = \mathcal{E}^0\}.$$

用反证法, 假设存在一个解  $y_0 \in \mathbb{Y}$ , 使得当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\Phi(t, y_0) \rightarrow \mathcal{E}^0$ . 则存在一个序列  $\{y_n\} \subset \mathbb{Y}$ , 使得对所有  $t \geq 0$  有  $\|\Phi(t, y_n) - \mathcal{E}^0\|_x < 1/n$ , 其中,  $\Phi(t, y_n) = (S_{1n}(t), S_{2n}(t, \cdot), E_n(t, \cdot), I_n(t))$ ,  $y_n = (S_{1n}(0), S_{2n}(0, \cdot), E_n(0, \cdot), I_n(0))$ . 选择足够大正整数  $n$  使得  $S_1^0 - 1/n > 0, S_2^0(a) - 1/n > 0$ , 对于上述的  $n$ , 存在  $T > 0$ , 使得当  $t > T$  时,

$$S_1^0 - \frac{1}{n} < S_{1n}(t) < S_1^0 + \frac{1}{n}, \quad S_2^0(a) - \frac{1}{n} < S_{2n}(t, \cdot) < S_2^0(a) + \frac{1}{n}, \quad -\frac{1}{n} < I_n(t) < \frac{1}{n} \quad (12)$$

由式(4)可得  $E(t, b) \geq (\beta_1 S_1(t-b) I(t-b) + I(t-b) \int_0^\infty \beta_2(a) S_2(t-b, a) da) \Pi(b)$ , 再应用比较原理可得  $I_n(t) \geq u_n(t)$ , 其中  $u_n(t)$  是下面系统的解

$$\begin{cases} \frac{du_n(t)}{dt} = \left[ \beta_1 \left( S_1^0 - \frac{1}{n} \right) + \int_0^\infty \beta_2(a) \left( S_2^0(a) - \frac{1}{n} \right) da \right] \times \int_0^\infty \theta(\tau) \Pi(\tau) u_n(t-\tau) d\tau - \gamma u_n(t) - \mu u_n(t), \\ u_n(0) = I_n(0) \geq 0. \end{cases}$$

若  $u_n(0) = 0$ , 则  $u_n(t) > 0$ ; 若  $u_n(0) > 0$ , 当  $\mathcal{R}_0 > 1$  时, 存在足够大的正数  $n$ , 使得

$$\frac{\int_0^\infty \theta(b) \Pi(b) db}{\gamma + \mu} \left[ \beta_1 \left( S_1^0 - \frac{1}{n} \right) + \int_0^\infty \beta_2(a) \left( S_2^0(a) - \frac{1}{n} \right) da \right] > 1,$$

即

$$\int_0^\infty \theta(\tau) \Pi(\tau) \left[ \beta_1 \left( S_1^0 - \frac{1}{n} \right) + \int_0^\infty \beta_2(a) \left( S_2^0(a) - \frac{1}{n} \right) da \right] d\tau > \gamma + \mu.$$

根据文献[13]中的引理3.5,  $u_n(t)$  是无界的, 从而  $I_n(t)$  是无界的, 这与式(12)矛盾. 所以假设不成立, 因此有  $W^s(\mathcal{E}^0) \cap \mathbb{Y} = \emptyset$ . 由文献[12]知, 解半流  $\{\Phi(t, x_0)\}_{t \geq 0}$  是一致持久的.

定义  $\phi(x) = x - 1 - \ln x$  和一个正函数  $\Theta(b) = \int_b^\infty \theta(\xi) e^{-\int_b^\xi \eta(\tau) d\tau} d\xi$ , 记  $\varphi = \int_0^\infty \theta(b) \Pi(b) db$ . 关于模型(1) 地方病平衡态的全局稳定性, 有下面的定理.

**定理 7** 若  $\mathcal{R}_0 > 1$ , 则模型(1) 的地方病平衡态  $\mathcal{E}^*$  是全局渐近稳定的.

**证明** 构造函数  $V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) + V_4(t)$ , 其中

$$\begin{aligned} V_1(t) &= \varphi S_1^* \phi\left(\frac{S_1(t)}{S_1^*}\right), & V_2(t) &= I^* \phi\left(\frac{I(t)}{I^*}\right), \\ V_3(t) &= \varphi \int_0^\infty S_2^*(a) \phi\left(\frac{S_2(t, a)}{S_2^*(a)}\right) da, & V_4(t) &= \int_0^\infty \Theta(b) E^*(b) \phi\left(\frac{E(t, b)}{E^*(b)}\right) db. \end{aligned}$$

则沿着模型 (1) 计算全导数可得

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(t)}{dt} &= \varphi(p + \mu)S_1^* \left( 2 - \frac{S_1^*}{S_1(t)} - \frac{S_1(t)}{S_1^*} \right) + \varphi\beta_1 S_1^* I^* \left( 1 - \frac{S_1^*}{S_1(t)} - \frac{S_1(t)I(t)}{S_1^* I^*} + \frac{I(t)}{I^*} \right) \\ &\quad + \varphi \int_0^\infty \omega(a) S_2^*(a) \left( \frac{S_2(t, a)}{S_2^*(a)} + \frac{S_1^*}{S_1(t)} - \frac{S_1^* S_2(t, a)}{S_1(t) S_2^*(a)} - 1 \right) da, \\ \frac{dV_2(t)}{dt} &= \int_0^\infty \theta(b) E^*(b) \left( \frac{E(t, b)}{E^*(b)} - \frac{I(t)}{I^*} - \frac{I^* E(t, b)}{I(t) E^*(b)} + 1 \right) db, \\ \frac{dV_3(t)}{dt} &= -\varphi \int_0^\infty S_2^*(a) \left( \frac{S_2(t, a)}{S_2^*(a)} - 1 \right) \left( \frac{S_{2a}(t, a)}{S_2(t, a)} + \rho^*(a) + \beta_2(a) I^* \left( \frac{I(t)}{I^*} - 1 \right) \right) da, \end{aligned}$$

其中:  $S_{2a}(t, a) = \partial S_2(t, a) / \partial a$ . 注意到

$$\frac{\partial}{\partial a} \phi \left( \frac{S_2(t, a)}{S_2^*(a)} \right) = \left( \frac{S_2(t, a)}{S_2^*(a)} - 1 \right) \left( \frac{S_{2a}(t, a)}{S_2(t, a)} + \rho^*(a) \right),$$

利用分部积分可得

$$\begin{aligned} \frac{dV_3(t)}{dt} &= -\varphi \int_0^\infty \left( S_2^*(a) \frac{\partial}{\partial a} \phi \left( \frac{S_2(t, a)}{S_2^*(a)} \right) - \beta_2(a) S_2^*(a) I^* \left( \frac{S_2(t, a)}{S_2^*(a)} - 1 \right) \left( \frac{I(t)}{I^*} - 1 \right) \right) da \\ &= -\varphi S_2^*(a) \phi \left( \frac{S_2(t, a)}{S_2^*(a)} \right) \Big|_{a=\infty} + \varphi S_2^*(0) \phi \left( \frac{S_2(t, 0)}{S_2^*(0)} \right) + \varphi \int_0^\infty \frac{dS_2^*(a)}{da} \phi \left( \frac{S_2(t, a)}{S_2^*(a)} \right) da \\ &\quad - \varphi \int_0^\infty \beta_2(a) S_2^*(a) I^* \left( \frac{S_2(t, a) I(t)}{S_2^*(a) I^*} - \frac{I(t)}{I^*} - \frac{S_2(t, a)}{S_2^*(a)} + 1 \right) da \\ &= -\varphi S_2^*(a) \phi \left( \frac{S_2(t, a)}{S_2^*(a)} \right) \Big|_{a=\infty} - \varphi \int_0^\infty S_2^*(a) (\omega(a) + \mu) \phi \left( \frac{S_2(t, a)}{S_2^*(a)} \right) da \\ &\quad + \varphi S_2^*(0) \phi \left( \frac{S_2(t, 0)}{S_2^*(0)} \right) - \varphi \int_0^\infty \beta_2(a) S_2^*(a) I^* \left( \frac{S_2(t, a) I(t)}{S_2^*(a) I^*} - \frac{I(t)}{I^*} - \ln \frac{S_2(t, a)}{S_2^*(a)} \right) da. \end{aligned}$$

由  $E^*(0) = \beta_1 S_1^* I^* + I^* \int_0^\infty \beta_2(a) S_2^*(a) da$  和  $E(t, 0) = \beta_1 S_1(t) I(t) + I(t) \int_0^\infty \beta_2(a) S_2(t, a) da$ , 有

$$\frac{dV_4(t)}{dt} = -\Theta(b) E^*(b) \phi \left( \frac{E(t, b)}{E^*(b)} \right) \Big|_{b=\infty} + \varphi E(t, 0) - \varphi E^*(0) \left( 1 + \ln \frac{E(t, 0)}{E^*(0)} \right) - \int_0^\infty \theta(b) E^*(b) \phi \left( \frac{E(t, b)}{E^*(b)} \right) db.$$

合并上述式子并化简可得

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\varphi S_2^*(a) \phi \left( \frac{S_2(t, a)}{S_2^*(a)} \right) \Big|_{a=\infty} - \Theta(b) E^*(b) \phi \left( \frac{E(t, b)}{E^*(b)} \right) \Big|_{b=\infty} - \varphi \mu \int_0^\infty S_2^*(a) \phi \left( \frac{S_2(t, a)}{S_2^*(a)} \right) da + \sum_{i=1}^5 B_i,$$

其中,

$$\begin{aligned} B_1 &= \varphi(p + \mu) S_1^* \left( 2 - \frac{S_1^*}{S_1(t)} - \frac{S_1(t)}{S_1^*} \right) + \varphi S_2^*(0) \phi \left( \frac{S_2(t, 0)}{S_2^*(0)} \right) \\ &= -\varphi \mu S_1^* \left( \phi \left( \frac{S_1^*}{S_1(t)} \right) + \phi \left( \frac{S_1(t)}{S_1^*} \right) \right) - \varphi p S_1^* \phi \left( \frac{S_1^*}{S_1(t)} \right), \\ B_2 &= \varphi \beta_1 S_1^* I^* \left( -\frac{S_1^*}{S_1(t)} + \frac{I(t)}{I^*} - \ln \frac{E(t, 0)}{E^*(0)} \right) \\ &= \varphi \beta_1 S_1^* I^* \left( \phi \left( \frac{I(t)}{I^*} \right) - \phi \left( \frac{S_1^*}{S_1(t)} \right) - \phi \left( \frac{S_1(t) I(t) E^*(0)}{S_1^* I^* E(t, 0)} \right) - 1 + \frac{S_1(t) I(t) E^*(0)}{S_1^* I^* E(t, 0)} \right), \\ B_3 &= \varphi \int_0^\infty \beta_2(a) S_2^*(a) I^* \left( \ln \frac{S_2(t, a)}{S_2^*(a)} + \frac{I(t)}{I^*} - 1 - \ln \frac{E(t, 0)}{E^*(0)} \right) da \\ &= \varphi \int_0^\infty \beta_2(a) S_2^*(a) I^* \left( \phi \left( \frac{I(t)}{I^*} \right) - \phi \left( \frac{S_2(t, a) I(t) E^*(0)}{S_2^*(a) I^* E(t, 0)} \right) - 1 + \frac{S_2(t, a) I(t) E^*(0)}{S_2^*(a) I^* E(t, 0)} \right) da, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_4 &= \varphi \int_0^\infty \omega(a) S_2^*(a) \left( \frac{S_1^*}{S_1(t)} - \frac{S_1^* S_2(t, a)}{S_1(t) S_2^*(a)} + \ln \frac{S_2(t, a)}{S_2^*(a)} \right) da \\
&= \varphi \int_0^\infty \omega(a) S_2^*(a) \left( \phi \left( \frac{S_1^*}{S_1(t)} \right) - \phi \left( \frac{S_1^* S_2(t, a)}{S_1(t) S_2^*(a)} \right) \right) da, \\
B_5 &= \int_0^\infty \theta(b) E^*(b) \left( \frac{E(t, b)}{E^*(b)} - \frac{I(t)}{I^*} - \frac{I^* E(t, b)}{I(t) E^*(b)} + 1 - \phi \left( \frac{E(t, b)}{E^*(b)} \right) \right) db \\
&= -\varphi I^* \phi \left( \frac{I(t)}{I^*} \right) \left( \beta_1 S_1^* - \int_0^\infty \beta_2(a) S_2^*(a) da \right) - \int_0^\infty \theta(b) E^*(b) \phi \left( \frac{I^* E(t, b)}{I(t) E^*(b)} \right) db.
\end{aligned}$$

又注意到

$$\begin{aligned}
&-\varphi \phi \left( \frac{S_1^*}{S_1(t)} \right) \left( \mu S_1^* + p S_1^* + \beta_1 S_1^* I^* - \int_0^\infty \omega(a) S_2^*(a) da \right) = -\varphi \Lambda_h \phi \left( \frac{S_1^*}{S_1(t)} \right), \\
&\varphi \beta_1 S_1^* I^* \left( -1 + \frac{S_1(t) I(t) E^*(0)}{S_1^* I^* E(t, 0)} \right) + \varphi \int_0^\infty \beta_2(a) S_2^*(a) I^* \left( -1 + \frac{S_2(t, a) I(t) E^*(0)}{S_2^*(a) I^* E(t, 0)} \right) da = 0,
\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}
\frac{dV(t)}{dt} &= -\varphi S_2^*(a) \phi \left( \frac{S_2(t, a)}{S_2^*(a)} \right) \Big|_{a=\infty} - \Theta(b) E^*(b) \phi \left( \frac{E(t, b)}{E^*(b)} \right) \Big|_{b=\infty} \\
&\quad - \varphi \mu \int_0^\infty S_2^*(a) \phi \left( \frac{S_2(t, a)}{S_2^*(a)} \right) da - \varphi \Lambda_h \phi \left( \frac{S_1^*}{S_1(t)} \right) - \varphi \mu S_1^* \phi \left( \frac{S_1(t)}{S_1^*} \right) \\
&\quad - \varphi \beta_1 S_1^* I^* \phi \left( \frac{S_1(t) I(t) E^*(0)}{S_1^* I^* E(t, 0)} \right) - \varphi \int_0^\infty \beta_2(a) S_2^*(a) I^* \phi \left( \frac{S_2(t, a) I(t) E^*(0)}{S_2^*(a) I^* E(t, 0)} \right) da \\
&\quad - \varphi \int_0^\infty \omega(a) S_2^*(a) \phi \left( \frac{S_1^* S_2(t, a)}{S_1(t) S_2^*(a)} \right) da - \int_0^\infty \theta(b) E^*(b) \phi \left( \frac{I^* E(t, b)}{I(t) E^*(b)} \right) db.
\end{aligned}$$

因此,  $dV(t)/dt \leq 0$ , 此外, 当且仅当  $S_1^* = S_1(t)$ ,  $S_2^*(a) = S_2(t, a)$ ,  $E^*(b) = E(t, b)$ ,  $I^* = I(t)$  时等号严格成立. 定义  $\Delta = \{(S_1(t), S_2(t, \cdot), E(t, \cdot), I(t)) \in \mathbb{X} \mid dV(t)/dt = 0\}$ , 则单点集  $\{\mathcal{E}^*\}$  是模型 (1) 在  $\Delta$  上的最大不变集. 由 Lyapunov-LaSalle 不变原理, 当  $\mathcal{R}_0 > 1$  时, 地方病平衡态  $\mathcal{E}^*$  是全局渐近稳定的.

## 4 结论与展望

基于 HIV 的传播规律, 建立了一类具有高危易感年龄和潜伏期年龄的 HIV 传播模型, 利用下一代算子方法得到了基本再生数  $\mathcal{R}_0$  的精确表达式, 并通过线性近似方法得到了当  $\mathcal{R}_0 < 1$  时无病平衡态是局部渐近稳定的. 进一步, 利用波动引理证明了当  $\mathcal{R}_0 < 1$  时无病平衡态是全局渐近稳定的. 最后, 证明了当  $\mathcal{R}_0 > 1$  时模型解的一致持久性, 并通过构造合适的 Lyapunov 函数证明了地方病平衡态是全局渐近稳定的, 这也保证了地方病平衡态是唯一的.

临床数据表明, HIV 感染者的传染性与其病毒载量有关. 病毒载量在感染 HIV 后和艾滋病发展期这两个时期被认为是较高的, 而在感染的潜伏期通常较低<sup>[14]</sup>. 本文为了进行必要的理论分析, 忽略了潜伏期 HIV 感染者的传染性, 这可能会造成一些误差. 因此, 建立并讨论潜伏期具有感染能力的 HIV 传播模型是一个值得深入讨论的问题.

### 参考文献:

- [1] 董晨, 张欢, 莫兴波. 传染病流行病学[M]. 苏州: 苏州大学出版社, 2018.
- [2] CAI L M, GUO S L, WANG S P. Analysis of an extended HIV/AIDS epidemic model with treatment[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 236: 621-627.
- [3] ZOHRA GUL O, XAMXINUR A. Stability analysis of an HIV/AIDS model with vertical transmission[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition), 2015, 32(3): 297-303.
- [4] 何楠, 王稳地, 周爱蓉, 等. 基于饱和和发生率的随机 HIV 模型的动力学研究[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(3): 109-114.
- [5] MCCLUSKEY C C. Global stability for an SEI epidemiological model with continuous age-structure in the exposed and infectious classes[J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2012, 9(4): 819-841.