

广义 Chaplygin 气体 Aw-Rascle 交通流 方程组解奇异性的形成*

辛晓庆, 郭俐辉[†]

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

摘要: 研究了广义 Chaplygin 气体 Aw-Rascle 交通流方程组经典解奇异性的形成. 利用特征分解方法, 当初值满足一定条件时, 证明了交通流模型柯西问题经典解的密度本身在有限时间内会发生爆破. 此外, 通过数值模拟对该物理现象进行了验证.

关键词: Aw-Rascle 交通流方程组; 广义 Chaplygin 气体; 奇异性的形成; 特征分解

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2022.12.09.0002

中图分类号: O175.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2023)04-0422-011

引文格式: 辛晓庆, 郭俐辉. 广义 Chaplygin 气体 Aw-Rascle 交通流方程组解奇异性的形成[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2023, 40(4): 422-432.

英文引文格式: XIN Xiaoqing, GUO Lihui. Formation of singularities in solutions to the Aw-Rascle traffic flow system for the generalized Chaplygin gas[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2023, 40(4): 422-432.

Formation of Singularities in Solutions to the Aw-Rascle Traffic Flow System for the Generalized Chaplygin Gas

XIN Xiaoqing, GUO Lihui

(School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China)

Abstract: The formation of singularities in the classical solutions to the Aw-Rascle traffic flow system with generalized Chaplygin gas is studied. By using the method of characteristic decomposition, we prove that the density itself of the classical solutions of the Cauchy problem for the traffic flow model will blow up in finite time when the initial data meets certain conditions. Additionally, this physical phenomenon is verified by numerical simulation.

Key words: Aw-Rascle traffic flow system; generalized Chaplygin gas; singularity formation; characteristic decomposition

0 引言

本文研究 Aw-Rascle (AR) 交通流方程组

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho(u + p(\rho)))_t + (\rho u(u + p(\rho)))_x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中: u 是速度, ρ 是密度, $p = p(\rho)$ 表示交通压力.

* 收稿日期: 2022-12-09

基金项目: 国家自然科学基金“相对论欧拉方程组音速-超音速解的存在性及相关问题研究”(12161084); 新疆维吾尔自治区自然科学基金“双曲型偏微分方程组初边值问题解的存在性”(2022D01E42).

作者简介: 辛晓庆(1997-), 女, 硕士生, 从事偏微分方程及其应用的研究, E-mail: xiaopingxin999@163.com.

[†] 通讯作者: 郭俐辉(1979-), 男, 博士, 教授, 从事偏微分方程及其应用的研究, E-mail: lihguo@126.com.

为了弥补 Daganzo^[1] 提出的二阶交通流模型的不足, Aw 和 Rascle^[2] 建立了 AR 模型, 此模型被广泛用于描述交通阻塞、交通事故的形成及其它交通现象. 此外, AR 模型还是多车道交通流模型^[3-4]和混合交通流模型^[5]的基础.

在不同的状态方程下, 方程组 (1) 黎曼解的结构有不同的表现形式. 当状态方程为多方气体时, 方程组 (1) 是真正非线性且严格双曲的, 其中 Aw 和 Rascle^[2] 最早研究了其黎曼问题, 并获得了包含真空的黎曼解. Sun^[6-7] 分别考虑了当真空存在和真空不存在时一维交通流方程组波的相互作用. Shen 和 Sun^[8] 研究了包含扰动初值的交通流方程组, 随着压力的消失, 其黎曼解趋于输运方程组的狄拉克激波解和真空解.

本文分别考虑广义 Chaplygin 气体状态方程

$$p = -A\rho^{-\gamma} \quad (2)$$

和

$$p = -\varepsilon A\rho^{-\gamma}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p(\rho, \varepsilon) = 0 \quad (3)$$

其中: $A > 0$ 和 $0 < \gamma \leq 1$ 是常数. 当 $A = 1$ 和 $\gamma = 1$ 时, 该状态方程被称为 Chaplygin 气体, 最早由 Chaplygin^[9], Tsien^[10] 和 Karman^[11] 引入. 之后, 为了更好地描述宇宙加速膨胀现象和完善 Chaplygin 气体模型, 很多学者将该模型推广到了广义 Chaplygin 气体模型, 它是经典的暗能量模型^[12-13].

近年来, 关于 Chaplygin 气体和广义 Chaplygin 气体的黎曼问题已经有许多研究成果. Brenier^[14] 研究了一维 Chaplygin 气体 Euler 方程组的黎曼问题, 发现当黎曼初值满足一定条件时, 黎曼解中会出现狄拉克激波. Cheng 和 Yang^[15] 研究了一维相对论 Chaplygin 气体 Euler 方程组的黎曼问题. Wang^[16] 构造了广义 Chaplygin 气体一维交通流方程组的黎曼解, 并证明了狄拉克激波解的存在性和唯一性. Chen 和 Qu^[17] 研究了三个常初值 Chaplygin 气体二维黎曼问题. Serre^[18] 研究了二维 Chaplygin 气体 Euler 方程组黎曼问题, 并得到了两种类型跨音速解的存在性. 更多研究成果, 请参阅文献 [19-24].

众所周知, 对线性双曲方程组来说, 如果初值足够光滑, 那么其柯西问题在整个被定义的区域上一般存在整体经典解. 但是, 对非线性双曲方程组来说, 不管初值多么光滑多么小, 其柯西问题只存在局部的经典解, 而在有限时间内, 经典解的奇异性一定会发生. Lax^[25] 给出了非线性双曲偏微分方程组解奇异性的发展. Pan 和 Zhu^[26] 研究了一维全 Euler 方程组奇异性的形成. Chen, Pan 和 Zhu^[27] 得到了可压缩 Euler 方程组奇异性的形成. Athanasiou 和 Zhu^[28] 研究了相对论 Euler 方程组奇异性的形成.

基于以上的研究成果, 本文主要考虑方程组 (1) 带有初值

$$(\rho, u) = (\rho_0, u_0(x)), \quad x \in (-\infty, +\infty) \quad (4)$$

的解奇异性的形成, 其中: ρ_0 是正常数.

$$u_0(x) = \begin{cases} u_a, & x < a, \\ \bar{u}(x), & a \leq x \leq b, \\ u_b, & x > b, \end{cases}$$

$\bar{u}(a) = u_a$, $\bar{u}(b) = u_b$, $\bar{u}'(a) = \bar{u}'(b) = 0$, 当 $x \in (a, b)$ 时, $\bar{u}'(x) < 0$. 近来, Lai 和 Zhu^[29] 研究了 Chaplygin 气体可压缩 Euler 方程组经典解奇异性的形成. 本文把文献 [29] 的结果推广到 AR 模型中, 将证明在有限时间内, 柯西问题 ((1),(2),(4)) 和问题 ((1),(3),(4)) 经典解的密度会爆破, 见定理 1 和 2.

本文用特征分解的方法证明定理 1 和 2. Dai 和 Zhang^[30] 在研究压差方程组整体经典解的存在性时引进了该方法. 此后, Li, Zhang 和 Zheng^[31] 利用特征分解证明了 Courant 和 Friedrichs^[32] 的一个著名的定理, 即对于拟定常等熵无旋可压缩 Euler 方程组和绝热全 Euler 方程组, 与常状态相邻的流动一定是简单波.

1 方程组 (1) 和 (2) 奇异性的形成

1.1 特征方程和特征分解

把方程组 (1) 和 (2) 化简为

$$\begin{cases} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0 \\ u_t + (u - A\gamma\rho^{-\gamma})u_x = 0 \end{cases} \quad (5)$$

其特征值为

$$\lambda_1 = u, \quad \lambda_2 = u - \gamma k,$$

对应的左特征向量为

$$\ell_1 = (0, 1), \quad \ell_2 = (-\gamma k\rho^{-1}, 1),$$

其中: $k = A\rho^{-\gamma} = -p(\rho)$. 用左特征向量 $\ell_i (i=1, 2)$ 左乘方程组 (5) 得到特征方程

$$\begin{cases} \partial_1(u - k) = 0 \\ \partial_2 u = 0 \end{cases} \quad (6)$$

其中: $\partial_1 := \partial_t + u\partial_x$, $\partial_2 := \partial_t + (u - \gamma k)\partial_x$.

引理 1 方程组 (5) 中有以下交换关系

$$\partial_1\partial_2 - \partial_2\partial_1 = \frac{1-\gamma}{\gamma k}\partial_1 k(\partial_1 - \partial_2) \quad (7)$$

证明 由 $\partial_i (i=1, 2)$ 的定义得 $\partial_x = (\partial_1 - \partial_2)/\gamma k$, 所以

$$\begin{aligned} & \partial_1\partial_2 - \partial_2\partial_1 \\ &= (\partial_t + \lambda_1\partial_x)(\partial_t + \lambda_2\partial_x) - (\partial_t + \lambda_2\partial_x)(\partial_t + \lambda_1\partial_x) \\ &= (\partial_1\lambda_2 - \partial_2\lambda_1)\partial_x \\ &= (\partial_1 u - \gamma\partial_1 k)\partial_x = \frac{1-\gamma}{\gamma k}\partial_1 k(\partial_1 - \partial_2). \end{aligned}$$

命题 1 关于变量 k , 我们有特征分解

$$\begin{cases} \partial_1\partial_2 k = m\partial_2 k \\ \partial_2\partial_1 k = m\partial_1 k \end{cases} \quad (8)$$

其中: $m := (\gamma - 1)/\gamma k \partial_1 k$.

证明 由式 (7) 作用于变量 u 得

$$\partial_1\partial_2 u - \partial_2\partial_1 u = \frac{1-\gamma}{\gamma k}\partial_1 k(\partial_1 u - \partial_2 u),$$

又因为 $\partial_2 u = 0$, 所以

$$\partial_2\partial_1 u = \frac{\gamma-1}{\gamma k}\partial_1 k\partial_1 u,$$

由式 (6) 知 $\partial_1 k = \partial_1 u$, 因此

$$\partial_2\partial_1 k = \frac{\gamma-1}{\gamma k}(\partial_1 k)^2 \quad (9)$$

由式 (7) 作用于变量 k 得

$$\partial_1\partial_2 k - \partial_2\partial_1 k = \frac{1-\gamma}{\gamma k}\partial_1 k(\partial_1 k - \partial_2 k),$$

把式 (9) 代入上式得

$$\partial_1\partial_2 k = \frac{\gamma-1}{\gamma k}\partial_1 k\partial_2 k.$$

注记: 由式 (6), (8) 和 $\partial_x = (\partial_1 - \partial_2)/\gamma k$ 知, 当初值是 C^1 光滑函数时, 在状态方程 (2) 下, 方程组 (1) 有整体光滑解, 除非解在有限时间内发生爆破.

1.2 奇异性的形成

受文献 [33] 的启发, 利用特征方法可得到问题 ((1),(2),(4)) 经典解的局部存在性, 即存在一个足够小的时间 $T > 0$, 使得问题 ((1),(2),(4)) 在区域 $\Omega(T) := \{(x, t) | x \in (-\infty, +\infty), 0 < t < T\}$ 内有一个经典解.

引理 2 假设在区域 $\Omega(T)$ 内柯西问题 ((1),(2),(4)) 有一个经典解, 则解满足

$$u_b \leq u \leq u_a, \quad \partial_1 k \leq 0, \quad \partial_2 k \leq 0.$$

证明 在区域 $\Omega(T)$ 内, 由 $\partial_2 u = 0$ 知

$$u_b \leq u \leq u_a.$$

由方程组 (5) 的第一个方程得

$$k_t = \gamma k u \rho^{-1} \rho_x + \gamma k u_x = -u k_x + \gamma k u_x,$$

因此, 在初始时刻有

$$\partial_1 k = k_t + u k_x = \gamma k u_x = \gamma k_0 u'_0(x) \leq 0,$$

$$\partial_2 k = k_t + (u - \gamma k) k_x = \gamma k u_x - \gamma k k_x = \gamma k_0 u'_0(x) \leq 0,$$

其中: $k_0 = A\rho_0^{-\gamma}$. 由方程组 (8) 和 $\partial_1 k|_{t=0} \leq 0$ 知, 在区域 $\Omega(T)$ 内, 有

$$\partial_1 k \leq 0.$$

由方程组 (8) 和 $\partial_2 k|_{t=0} \leq 0$ 知, 在区域 $\Omega(T)$ 内, 有

$$\partial_2 k \leq 0.$$

定理 1 假设 $u_a - u_b > k_0$, 则存在一个 $(x_*, t_*) \in (-\infty, +\infty) \times (0, +\infty)$, 使得柯西问题 ((1),(2),(4)) 在区域 $\Omega(t_*)$ 内有一个经典解, 且解满足

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_*, t_*)} \rho(x, t) = +\infty \tag{10}$$

证明 令 $C_1^a: x = x_1(t; a)$ 和 $C_1^b: x = x_1(t; b)$ 分别由

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t; a)}{dt} = u(x_1(t; a), t), & t > 0 \\ x_1(0; a) = a \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \frac{dx_1(t; b)}{dt} = u(x_1(t; b), t), & t > 0 \\ x_1(0; b) = b \end{cases} \tag{11}$$

来决定. 这里 C_1^a 和 C_1^b 是两条分别从点 $(a, 0)$ 和点 $(b, 0)$ 发出的轨迹线, 如图 1 所示.

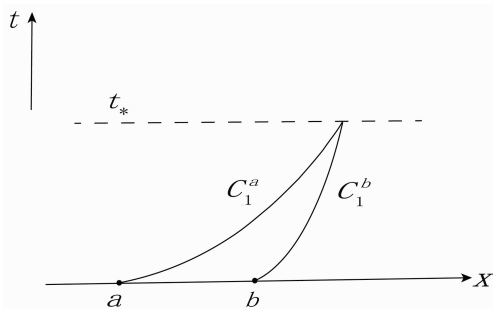


图 1 从 $(a, 0)$ 和 $(b, 0)$ 两点发出的轨迹线

由质量守恒知

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1(t; a)}^{x_1(t; b)} \rho(x, t) dx = 0 \tag{12}$$

沿着 C_1^a 对方程组 (6) 的第一个方程积分得

$$u = u_a + k - k_0 \geq u_a - k_0 \quad (13)$$

因此, 由式 (11) 和 (13) 知

$$\frac{dx_1(t; a)}{dt} = u(x_1(t; a), t) \geq u_a - k_0 \quad (14)$$

沿着 C_1^a 对式 (14) 积分, 有

$$x_1(t; a) \geq a + (u_a - k_0)t, \quad (t > 0) \quad (15)$$

沿着 C_1^b 对方程组 (6) 的第一个方程积分得

$$u = u_b + k - k_0 \leq u_b \quad (16)$$

因此, 由式 (11) 和 (16) 知

$$\frac{dx_1(t; b)}{dt} = u(x_1(t; b), t) \leq u_b \quad (17)$$

沿着 C_1^b 对式 (17) 积分, 有

$$x_1(t; b) \leq b + u_b t, \quad (t > 0) \quad (18)$$

用式 (18) 减去式 (15) 得

$$x_1(t; b) - x_1(t; a) \leq b - a - (u_a - u_b - k_0)t, \quad (t > 0) \quad (19)$$

所以, 存在 $0 < t_* \leq (b-a)/(u_a - u_b - k_0)$ 使得

$$x_2(t_*, a) < x_1(t_*, a) = x_1(t_*, b),$$

且当 $0 < t < t_*$ 时, 有

$$x_2(t, a) < x_1(t, a) < x_1(t, b).$$

此外, 由式 (12) 知

$$\int_{x_1(t; a)}^{x_1(t; b)} \rho(x, t) dx = \rho_0(b-a),$$

再结合式 (19) 得

$$\max_{x_1(t; a) < x < x_1(t; b)} \rho(x, t) \geq \frac{\rho_0(b-a)}{b-a - (u_a - u_b - k_0)t},$$

因此, 由假设 $u_a - u_b - k_0 > 0$ 知, 存在 $0 < t_* \leq (b-a)/(u_a - u_b - k_0)$ 和 $x_* \in (-\infty, +\infty)$ 使得式 (10) 成立.

1.3 数值模拟

本节将利用 Lax-Friedrichs 格式的数值模拟来验证定理 1 的正确性. 在数值实验中, A 取值为 1, γ 取值为 1/2. 下面给出两个例子.

例 1 给定初值

$$(\rho, u) = (1, u_0(x)), \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

其中

$$u_0(x) = \begin{cases} 8, & x < \frac{\pi}{2}, \\ 3 \sin x + 5, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}, \\ 2, & x > \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

数值结果如图 2 所示, 存在一个 $(x_*, t_*) \in (5, 6) \times \{0.5\}$, 使得柯西问题 ((1),(2),(4)) 经典解的密度发生爆破.

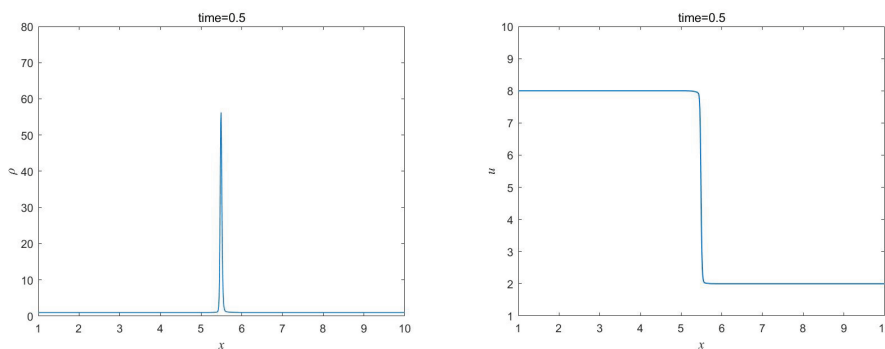


图 2 当 $t=0.5$ 时问题 ((1),(2),(4)) 中 ρ 和 u 的值

例 2 给定初值

$$(\rho, u) = (1, u_0(x)), \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

其中

$$u_0(x) = \begin{cases} 10, & x < 2, \\ x^3 - 9x^2 + 24x - 10, & 2 \leq x \leq 4, \\ 6, & x > 4. \end{cases}$$

数值结果如图 3 所示, 存在一个 $(x_*, t_*) \in (8, 9) \times \{0.7\}$, 使得柯西问题 ((1),(2),(4)) 经典解的密度发生爆破.

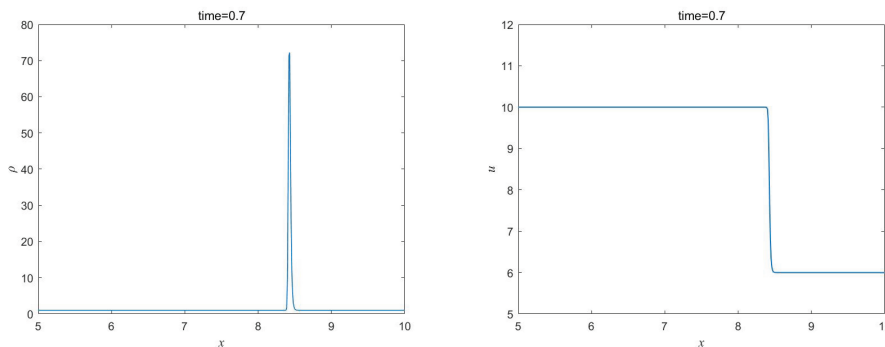


图 3 当 $t=0.7$ 时问题 ((1),(2),(4)) 中 ρ 和 u 的值

由例 1 和例 2 可知数值模拟结果与定理 1 的结论一致.

2 方程组 (1) 和 (3) 奇异性的形成

2.1 特征方程和特征分解

把方程组 (1) 和 (3) 化简为

$$\begin{cases} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0 \\ u_t + (u - \varepsilon A\gamma\rho^{-\gamma})u_x = 0 \end{cases} \quad (20)$$

其特征值为

$$\hat{\lambda}_1 = u, \quad \hat{\lambda}_2 = u - \varepsilon A\gamma\rho^{-\gamma},$$

对应的左特征向量为

$$\hat{\ell}_1 = (0, 1), \quad \hat{\ell}_2 = (-\varepsilon A\gamma\rho^{-\gamma-1}, 1).$$

用左特征向量 $\hat{\ell}_i (i = 1, 2)$ 左乘方程组 (20) 得到特征方程

$$\begin{cases} \hat{\partial}_1(u - \varepsilon A\gamma\rho^{-\gamma}) = 0 \\ \hat{\partial}_2 u = 0 \end{cases} \quad (21)$$

其中: $\hat{\partial}_1 := \hat{\partial}_t + u\hat{\partial}_x$, $\hat{\partial}_2 := \hat{\partial}_t + (u - \varepsilon A\gamma\rho^{-\gamma})\hat{\partial}_x$.

引理 3 方程组 (20) 中有以下交换关系

$$\hat{\partial}_1\hat{\partial}_2 - \hat{\partial}_2\hat{\partial}_1 = (\gamma - 1)\rho^{-1}\hat{\partial}_1\rho(\hat{\partial}_1 - \hat{\partial}_2) \quad (22)$$

证明 由 $\hat{\partial}_i (i=1,2)$ 的定义得 $\hat{\partial}_x = (\hat{\partial}_1 - \hat{\partial}_2)/(\varepsilon A\gamma\rho^{-\gamma})$, 所以

$$\begin{aligned} & \hat{\partial}_1\hat{\partial}_2 - \hat{\partial}_2\hat{\partial}_1 \\ &= (\hat{\partial}_t + \hat{\lambda}_1\hat{\partial}_x)(\hat{\partial}_t + \hat{\lambda}_2\hat{\partial}_x) - (\hat{\partial}_t + \hat{\lambda}_2\hat{\partial}_x)(\hat{\partial}_t + \hat{\lambda}_1\hat{\partial}_x) \\ &= (\hat{\partial}_1\hat{\lambda}_2 - \hat{\partial}_2\hat{\lambda}_1)\hat{\partial}_x \\ &= \hat{\partial}_1(u - \varepsilon A\gamma\rho^{-\gamma})\hat{\partial}_x = (\gamma - 1)\rho^{-1}\hat{\partial}_1\rho(\hat{\partial}_1 - \hat{\partial}_2). \end{aligned}$$

命题 2 关于变量 ρ , 我们有特征分解

$$\begin{cases} \hat{\partial}_1\hat{\partial}_2\rho = n_1\hat{\partial}_2\rho \\ \hat{\partial}_2\hat{\partial}_1\rho = n_2\hat{\partial}_1\rho \end{cases} \quad (23)$$

其中: $n_1 := 2\rho^{-1}\hat{\partial}_1\rho$, $n_2 := (1 - \gamma)\rho^{-1}\hat{\partial}_1\rho + (\gamma + 1)\rho^{-1}\hat{\partial}_2\rho$.

证明 由式 (22) 作用于变量 u 得

$$\hat{\partial}_1\hat{\partial}_2u - \hat{\partial}_2\hat{\partial}_1u = (\gamma - 1)\rho^{-1}\hat{\partial}_1\rho(\hat{\partial}_1u - \hat{\partial}_2u),$$

又因为 $\hat{\partial}_2u = 0$, 所以

$$\hat{\partial}_2\hat{\partial}_1u = (1 - \gamma)\rho^{-1}\hat{\partial}_1\rho\hat{\partial}_1u,$$

由方程组 (21) 知

$$\hat{\partial}_1u = -\varepsilon A\gamma\rho^{-\gamma-1}\hat{\partial}_1\rho,$$

因此

$$\hat{\partial}_2\hat{\partial}_1\rho = (1 - \gamma)\rho^{-1}(\hat{\partial}_1\rho)^2 + (\gamma + 1)\rho^{-1}\hat{\partial}_1\rho\hat{\partial}_2\rho \quad (24)$$

由式 (22) 作用于变量 ρ 得

$$\hat{\partial}_1\hat{\partial}_2\rho - \hat{\partial}_2\hat{\partial}_1\rho = (\gamma - 1)\rho^{-1}\hat{\partial}_1\rho(\hat{\partial}_1\rho - \hat{\partial}_2\rho),$$

把式 (24) 代入上式得

$$\hat{\partial}_1\hat{\partial}_2\rho = 2\rho^{-1}\hat{\partial}_1\rho\hat{\partial}_2\rho.$$

2.2 奇异性的形成

利用特征方法也可得到柯西问题 ((1),(3),(4)) 经典解的局部存在性, 即存在一个足够小的时间 $\hat{T} > 0$ 使得问题 ((1),(3),(4)) 在区域 $\hat{\Omega}(\hat{T}) := \{(x,t) | x \in (-\infty, +\infty), 0 < t < \hat{T}\}$ 内有一个经典解.

引理 4 假设在区域 $\hat{\Omega}(\hat{T})$ 内柯西问题 ((1),(3),(4)) 有一个经典解, 则解满足

$$u_b \leq u \leq u_a, \quad \hat{\partial}_1\rho \geq 0, \quad \hat{\partial}_2\rho \geq 0.$$

证明 在区域 $\hat{\Omega}(\hat{T})$ 内, 由 $\hat{\partial}_2u = 0$ 知

$$u_b \leq u \leq u_a.$$

由方程组 (20) 的第一个方程得

$$\rho_t = -u\rho_x - \rho u_x,$$

因此, 在初始时刻有

$$\begin{aligned} \hat{\partial}_1\rho &= \rho_t + u\rho_x = -\rho u_x = -\rho_0 u'_0(x) \geq 0, \\ \hat{\partial}_2\rho &= \rho_t + (u - \varepsilon A\gamma\rho^{-\gamma})\rho_x = -\rho u_x - \varepsilon A\gamma\rho^{-\gamma}\rho_x = -\rho_0 u'_0(x) \geq 0. \end{aligned}$$

由方程组 (23) 和 $\hat{\partial}_1 \rho|_{t=0} \geq 0$ 知, 在区域 $\hat{\Omega}(\hat{T})$ 内, 有

$$\hat{\partial}_1 \rho \geq 0,$$

由方程组 (23) 和 $\hat{\partial}_2 \rho|_{t=0} \geq 0$ 知, 在区域 $\hat{\Omega}(\hat{T})$ 内, 有

$$\hat{\partial}_2 \rho \geq 0.$$

定理 2 假设 $u_a - u_b > \varepsilon A \rho_0^{-\gamma}$, 则存在一个 $(\hat{x}_*, \hat{t}_*) \in (-\infty, +\infty) \times (0, +\infty)$, 使得柯西问题 ((1),(3),(4)) 在 $\hat{\Omega}(\hat{t}_*)$ 内有一个经典解, 且解满足

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (\hat{x}_*, \hat{t}_*)} \rho(x,t) = +\infty \tag{25}$$

证明 令 $\hat{C}_1^a: x = x_1(t; a)$ 和 $\hat{C}_1^b: x = x_1(t; b)$ 分别由

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t;a)}{dt} = u(x_1(t;a), t), & t > 0 \\ x_1(0;a) = a \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \frac{dx_1(t;b)}{dt} = u(x_1(t;b), t), & t > 0 \\ x_1(0;b) = b \end{cases} \tag{26}$$

来决定. 由质量守恒知

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1(t;a)}^{x_2(t;b)} \rho(x,t) dx = 0 \tag{27}$$

沿着 \hat{C}_1^a 对方程组 (21) 的第一个方程积分得

$$u = u_a + \varepsilon A \rho^{-\gamma} - \varepsilon A \rho_0^{-\gamma} \geq u_a - \varepsilon A \rho_0^{-\gamma},$$

再结合式 (26) 有

$$\frac{dx_1(t;a)}{dt} = u(x_1(t;a), t) \geq u_a - \varepsilon A \rho_0^{-\gamma} \tag{28}$$

沿着 \hat{C}_1^a 对式 (28) 积分, 有

$$x_1(t;a) \geq a + (u_a - \varepsilon A \rho_0^{-\gamma})t, \quad (t > 0) \tag{29}$$

沿着 \hat{C}_1^b 对方程组 (21) 的第一个方程积分得

$$u = u_b + \varepsilon A \rho^{-\gamma} - \varepsilon A \rho_0^{-\gamma} \leq u_b \tag{30}$$

所以, 由式 (26) 和 (30) 知

$$\frac{dx_1(t;b)}{dt} = u(x_1(t;b), t) \leq u_b \tag{31}$$

沿着 \hat{C}_1^b 对式 (31) 积分, 有

$$x_1(t;b) \leq b + u_b t, \quad (t > 0) \tag{32}$$

用式 (32) 减去式 (29) 得

$$x_1(t;b) - x_1(t;a) \leq b - a - (u_a - u_b - \varepsilon A \rho_0^{-\gamma})t, \quad (t > 0) \tag{33}$$

由式 (27) 知

$$\int_{x_1(t;a)}^{x_2(t;b)} \rho(x,t) dx = \rho_0(b-a),$$

再结合式 (33) 得

$$\max_{x_1(t;a) < x < x_1(t;b)} \rho(x,t) \geq \frac{\rho_0(b-a)}{b-a - (u_a - u_b - \varepsilon A \rho_0^{-\gamma})t},$$

因此, 由假设 $u_a - u_b - \varepsilon A \rho_0^{-\gamma} > 0$ 知, 存在 $0 < \hat{t}_* \leq (b-a)/(u_a - u_b - \varepsilon A \rho_0^{-\gamma})$ 和 $\hat{x}_* \in (-\infty, +\infty)$ 使得式 (25) 成立.

2.3 数值模拟

本节将利用 Lax-Friedrichs 格式的数值模拟来验证定理 2 的正确性. 在数值实验中, A 取值为 1, γ 取值为 $1/2$, ε 取值为 0.001. 下面给出两个例子.

例 3 给定初值

$$(\rho, u) = (1, u_0(x)), \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

其中

$$u_0(x) = \begin{cases} 8, & x < 0, \\ 2 \cos x + 6, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 4, & x > \pi. \end{cases}$$

数值结果如图 4 所示, 存在一个 $(\hat{x}_*, \hat{t}_*) \in (7, 8) \times \{1.0\}$, 使得柯西问题 ((1),(3),(4)) 经典解的密度发生爆破.

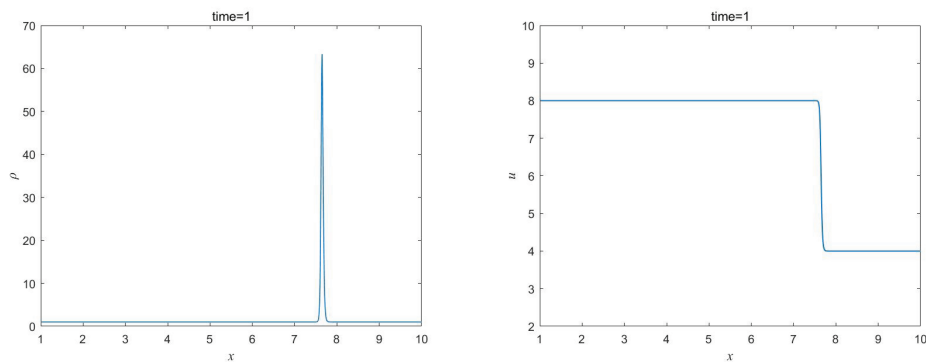


图 4 当 $t=1.0$ 时问题 ((1),(3),(4)) 中 ρ 和 u 的值

例 4 给定初值

$$(\rho, u) = (1, u_0(x)), \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

其中

$$u_0(x) = \begin{cases} 7, & x < 1, \\ x^3 - 6x^2 + 9x + 3, & 1 \leq x \leq 3, \\ 3, & x > 3. \end{cases}$$

数值结果如图 5 所示, 存在一个 $(\hat{x}_*, \hat{t}_*) \in (4, 5) \times \{0.5\}$, 使得柯西问题 ((1),(3),(4)) 经典解的密度发生爆破.

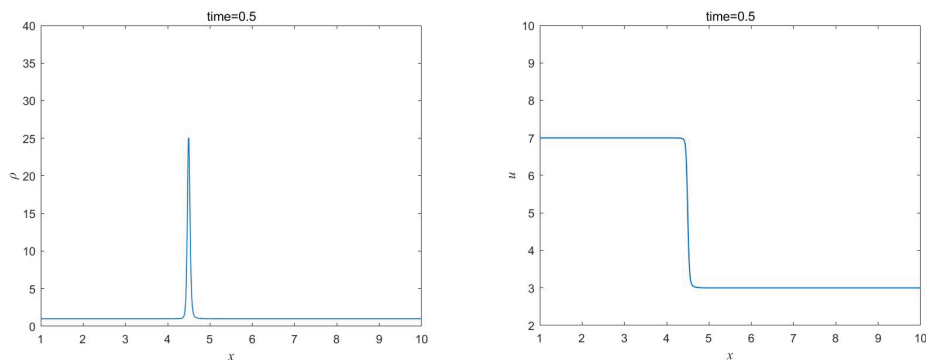


图 5 当 $t=0.5$ 时问题 ((1),(3),(4)) 中 ρ 和 u 的值

由例 3 和例 4 可知数值模拟结果与定理 2 的结论一致.

参考文献:

- [1] DAGANZO C F. Requiem for second-order fluid approximations of traffic flow[J]. Transportation Research Part B: Methodological, 1995, 29(4): 277-286.

- [2] AW A, RASCLE M. Resurrection of “second order” models of traffic flow[J]. *SIAM Journal Applied Mathematics*, 2000, 60(3): 916-938.
- [3] GREENBERG J M. Extensions and amplifications of a traffic model of Aw and Rascle[J]. *SIAM Journal Applied Mathematics*, 2001, 62(3): 729-745.
- [4] GREENBERG J M, KLAR A, RASCLE M. Congestion on multilane highways[J]. *SIAM Journal Applied Mathematics*, 2003, 63(3): 818-833.
- [5] MOUTARI S, RASCLE M. A hybrid Lagrangian model based on the Aw-Rascle traffic flow model[J]. *SIAM Journal Applied Mathematics*, 2007, 68(2): 413-436.
- [6] SUN M N. Interactions of elementary waves for the Aw-Rascle model[J]. *SIAM Journal Applied Mathematics*, 2009, 69(6): 1542-1558.
- [7] SUN M N. A note on the interactions of elementary waves for the Aw-Rascle model without vacuum[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2011, 31(4): 1503-1512.
- [8] SHEN C, SUN M N. Formation of δ shocks and vacuum states in the vanishing pressure limit of Rimmma solutions to the perturbed Aw-Rascle model[J]. *Journal of Differential Equations*, 2010, 249: 3024-3051.
- [9] CHAPLYGIN S. On gas jets[J]. *Scientific Memoirs, Moscow University Mathematic Physics*, 1904, 21: 1-121.
- [10] TSIEN H S. Two dimensional subsonic flow of compressible fluids[J]. *Journal of the Aeronautical Science*, 1939, 6: 399-407.
- [11] KARMAN T. Compressibility effects in aerodynamics[J]. *Journal of the Aeronautical Science*, 1941, 8: 337-365.
- [12] SAHNI V. Dark matter and dark energy[J]. *Lecture Notes in Physics*, 2005, 653: 141-179.
- [13] ZHANG X, WU F Q, ZHANG J. New generalized Chaplygin gas as a scheme for unification of dark energy and dark matter[J]. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2005, 2006(1): 731-750.
- [14] BRENIER Y. Solutions with concentration to the Riemann problem for one-dimensional Chaplygin gas equations[J]. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 2005, 7: 326-331.
- [15] CHENG H J, YANG H C. Riemann problem for the relativistic Chaplygin Euler equations[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2011, 381(1): 17-26.
- [16] WANG G D. The Riemann problem for one dimensional generalized Chaplygin gas dynamics[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2013, 403(2): 434-450.
- [17] CHEN S X, QU A F. Two dimensional Riemann problem for Chaplygin gas[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2012, 44: 2146-2178.
- [18] SERRE D. Multi-dimensional shock interaction for a Chaplygin gas[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2008, 191: 539-577.
- [19] 尹淦. AW-Rascle 模型的 Riemann 解的压力消失极限[J]. *新疆大学学报(自然科学版)*, 2013, 30(3): 289-296.
- [20] GUO L H, LI T, PAN X L. The Riemann problem with delta initial data for the one-dimensional Chaplygin gas equations with a source term[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2018, 41: 588-606.
- [21] LAI G, SHENG W C. Elementary wave interactions to the compressible Euler equations for Chaplygin gas in two dimensions[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2016, 76(6): 2218-2242.
- [22] SHEN C. The Riemann problem for the Chaplygin gas equations with a source term[J]. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechani*, 2016, 96(6): 681-695.
- [23] 宋赞, 郭俐辉. 带有源项的 Chaplygin 气体非对称 Keyfitz-Kranzer 方程组含狄拉克初值的广义黎曼问题[J]. *新疆大学学报(自然科学版)*, 2019, 36(3): 292-302.
- [24] SUN M N. The exact Riemann solutions to the generalized Chaplygin gas equations with friction[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2016, 36: 342-353.
- [25] LAX P. Development of singularities of solutions on nonlinear hyperbolic partial differential equations[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1964, 5: 611-613.
- [26] PAN R H, ZHU Y. Singularity formation for one dimensional full Euler equations[J]. *Journal of Differential Equations*, 2016, 261(12): 7132-7144.
- [27] CHEN G, PAN R H, ZHU S G. Singularity formation for the compressible Euler equations[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2017, 49(4): 2591-2614.
- [28] ATHANASIOU N, ZHU S G. Formation of singularities for the relativistic Euler equations[J]. *Journal of Differential Equations*,

2021, 284: 284-317.

- [29] LAI G, ZHU M. Formation of singularities of solutions to the compressible Euler equations for a Chaplygin gas[J]. Applied Mathematics Letters, 2022, 129: 107978.
- [30] DAI Z H, ZHANG T. Existence of a global smooth solution for a degenerate goursat problem of gas dynamics[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2000, 155(4): 277-298.
- [31] LI J Q, ZHANG T, ZHENG Y X. Simple waves and a characteristic decomposition of the two dimensional compressible Euler equations[J]. Communications in Mathematical Physics, 2006, 267: 1-12.
- [32] COURANT R, FRIEDRICHS K O. Supersonic flow and shock waves[M]. New York: Interscience, 1948.
- [33] LI T T, YU W C. Boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems[M]. North Carolina: Duke University, 1985.

责任编辑: 赵新科

(上接第 421 页)

- [21] ZHANG X Y, LYU X X, LI X D. Sampled-data-based lag synchronization of chaotic delayed neural networks with impulsive control[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 90(3): 2199-2207.
- [22] ABDURAHMAN A, ABUDUSAIMAITI M, JIANG H J. Fixed/predefined-time lag synchronization of complex-valued BAM neural networks with stochastic perturbations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2023, 444: 127811.
- [23] SADER M, ABDURAHMAN A, JIANG H J. General decay lag synchronization for competitive neural networks with constant delays[J]. Neural Processing Letters, 2019, 50: 445-457.
- [24] LI H L, CHEN S L, YANG J K. Fixed-time synchronization of delayed quaternion-valued neural networks with fractional-order under quantized control[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2023, 40(1): 1-9.
- [25] ZHENG C D, ZHANG L L. On synchronization of competitive memristor-based neural networks by nonlinear control[J]. Neurocomputing, 2020, 410: 151-160.
- [26] PANG L, HU C, YU J, et al. Fixed/preassigned-time synchronization for impulsive complex networks with mismatched parameters[J]. Neurocomputing, 2022, 511: 462-476.
- [27] 冯靛, 胡成, 于娟. 耦合忆阻复值神经网络的固定时间同步[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2021, 38(2): 129-143.
- [28] XU Z L, PENG D X, LI X D. Synchronization of chaotic neural networks with time delay via distributed delayed impulsive control[J]. Neural Networks, 2019, 118: 332-337.
- [29] HAN S Y, HU C, YU J, et al. Stabilization of inertial Cohen-Grossberg neural networks with generalized delays: a direct analysis approach[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2021, 142: 110432.
- [30] CUI N, JIANG H J, HU C. Global asymptotic and robust stability of inertial neural networks with proportional delays[J]. Neurocomputing, 2018, 272: 326-333.
- [31] ZHANG Y K, ZHOU L Q. Stabilization and lag synchronization of proportional delayed impulsive complex-valued inertial neural networks[J]. Neurocomputing, 2022, 507: 428-440.
- [32] POPOV V M, GEORGESCU R. Hyperstability of control systems[M]. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1973.

责任编辑: 赵新科