

字典积图的任意可分性*

西日尼阿依·努尔麦麦提¹, 刘凤霞^{2†}, 蔡华³

(1. 喀什大学 数学与统计学院, 新疆 喀什 844000; 2. 新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017;

3. 昌吉学院 数学与数据科学学院, 新疆 昌吉 831100)

摘要: 给定 n 个顶点的图 G , 对于满足 $\sum_{i=1}^k n_i = n$ 的任意一个正整数序列 (n_1, n_2, \dots, n_k) , 如果都存在顶点集 $V(G)$ 的划分 (V_1, V_2, \dots, V_k) , 满足 V_i 导出的子图 $G[V_i]$ 是连通的, 并且 $|V_i| = n_i$, 其中 $1 \leq i \leq k$, 则称图 G 是任意可分图(简称为 AP). 两个图 G 和 H 的字典积图记为 $G \circ H$, 其顶点集为 $V(G) \times V(H)$, $(g, h)(g', h')$ 是 $G \circ H$ 的一条边当且仅当 $gg' \in E(G)$ 或者 $g = g'$ 且 $hh' \in E(H)$. 讨论了可迹图和任意可分图的字典积图的任意可分性, 证明了对于最大度至多为 $n+1$ 的树 T , 如果 T 有一条路 P 满足全部度数为 $\Delta(T)$ 的顶点属于顶点集 $V(P)$, 则字典积图 $T \circ P_n$ 是任意可分图; 如果 G 是一个可迹图且 H 是任意可分图, 则图 $G \circ H$ 是任意可分图; 如果 $G = S(2, a, b)$ 是一个满足 $2 \leq a \leq b$ 的任意可分星型树, 则图 $G \circ G$ 是任意可分图; 如果 G 是哈密顿图且 H 是一个图, 则 $G \circ H$ 是任意可分图.

关键词: 图的任意可分性; 字典积图; 星型树; 可迹图

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2023.11.19.0001

中图分类号: O157.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2024)02-0181-07

引文格式: 西日尼阿依·努尔麦麦提, 刘凤霞, 蔡华. 字典积图的任意可分性[J]. 新疆大学学报(自然科学版中英文), 2024, 41(2): 181-187.

英文引文格式: XIRINIAYI Nuermaimaiti, LIU Fengxia, CAI Hua. Partitioning the lexicographic product of graphs[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2024, 41(2): 181-187.

Partitioning the Lexicographic Product of Graphs

XIRINIAYI Nuermaimaiti¹, LIU Fengxia², CAI Hua³

(1. School of Mathematics and Statistics, Kashgar University, Kashgar Xinjiang 844000, China;

2. School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China;

3. School of Mathematics and Data Science, Changji University, Changji Xinjiang 831100, China)

Abstract: An n -vertex graph G is said to be arbitrarily partitionable (AP, for short), if for any sequence (n_1, n_2, \dots, n_k) of positive integers such that $\sum_{i=1}^k n_i = n$, there exists a partition (V_1, V_2, \dots, V_k) of vertex set $V(G)$ such that the subgraph $G[V_i]$ induced by V_i is connected and $|V_i| = n_i$ for each $1 \leq i \leq k$. The lexicographic product of two graphs G and H , denoted by $G \circ H$, has vertex set $V(G) \times V(H)$ in which $(g, h)(g', h')$ is an edge whenever gg' is an edge in G or $g = g'$ and hh' is an edge in H . In this paper, we mainly discuss the arbitrary partitionability of the lexicographic product of traceable graph and AP graph. We prove that for a tree T of maximum degree at most $n+1$, if T has a path P such that all the vertices of degree $\Delta(T)$ are in $V(P)$, then the lexicographic product graph $T \circ P_n$ is AP; if G is a traceable graph and H is an AP graph, then $G \circ H$ is AP; if $G = S(2, a, b)$ is an AP star-like tree with $2 \leq a \leq b$, then $G \circ G$ is AP; if G is Hamiltonian, H is a graph, then $G \circ H$ is AP.

Key words: arbitrary partition ability of graphs; lexicographic product of graphs; star-like trees; traceable graphs

0 引言

设 $G = (V, E)$ 是简单的、无向的、 n 个顶点的图. 如果序列 $\tau = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ 满足 $\sum_{i=1}^k n_i = n$, 则称序列 τ

* 收稿日期: 2023-11-19

基金项目: 国家自然科学基金“图和有向图的任意可分性的研究”(11961067); 新疆维吾尔自治区自然科学基金“图的若干染色问题研究及在数据安全方面的应用”(2022D01C02).

作者简介: 西日尼阿依·努尔麦麦提(1992—), 女, 硕士, 助教, 从事图论及其应用的研究, E-mail: 1693926408@qq.com.

† 通讯作者: 刘凤霞(1981—), 女, 博士, 教授, 主要从事图论及其应用的研究, E-mail: xjulfx@163.com.

在图 G 中是可允许的. 对于图 G 的一个可允许序列 $\tau = (n_1, n_2, \dots, n_k)$, 如果存在顶点集 $V(G)$ 的一个划分 (V_1, V_2, \dots, V_k) , 满足 V_i 导出的子图 $G[V_i]$ 是连通的, 并且 $|V_i| = n_i$ 对于所有的 $1 \leq i \leq k$ 成立, 则称序列 τ 是在图 G 中可实现的. 如果图 G 的每个可允许序列在图 G 中可实现, 则我们把图 G 称为任意可分图 (简称为 AP 图或 AVD 图). 显然, 每个任意可分图必是连通的.

任意可分图的研究为平行系统如并行计算机、工作站的网络管理和设计提供理论支持, 也是目前国际上非常活跃的领域, 但它是一个比较年轻的方向, 还有很多问题值得去研究和挖掘.

两个顶点不交的图 G 和 H 的并记为 $G \cup H$, 其顶点集和边集分别为 $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ 和 $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$.

两个图 G 和 H 的字典积图记为 $G \circ H$, 其顶点集为 $V(G) \times V(H)$, $(g, h)(g', h')$ 是 $G \circ H$ 的一条边当且仅当 $gg' \in E(G)$ 或者 $g = g'$ 且 $hh' \in E(H)$. 图 1 给出 $3K_2 \circ P_3$, $P_4 \circ 2K_2$ 和 $P_4 \circ (K_1 \cup K_2)$, 图 $3K_2 \circ P_3$ 是不连通的, 图 $P_4 \circ 2K_2$ 和 $P_4 \circ (K_1 \cup K_2)$ 是连通的. 由图 1 可知, 当图 G 不连通时, 图 $G \circ H$ 也不连通, 没必要讨论任意可分性. 因此, 本文讨论的图 G 都是连通图.

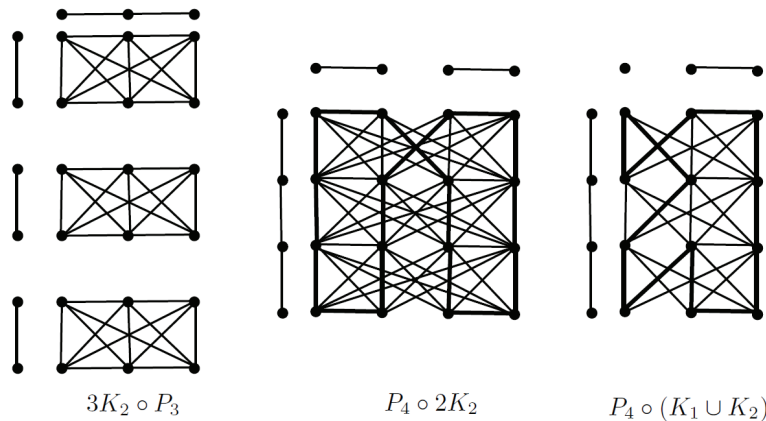


图 1 图的字典积

任意可分图的一个重要研究方向是与经典问题哈密顿路和完美匹配相结合. 含有哈密顿路的图一定是任意可分图, 即可迹图必是任意可分图 (哈密顿路是指图中一条经过所有顶点且只经过一次的路; 如果图 G 含有哈密顿路, 则此图称为可迹图); 任意可分图一定有完美匹配或几乎完美匹配, 因此一个图含有完美匹配或几乎完美匹配的 necessary 条件是一个图是任意可分图的 necessary 条件. 受到广泛关注的是著名的 Ore 定理, 主要是将 Ore 条件变弱, 并结合独立数或完美匹配得出一些结论^[1-3]. Horňák 等^[4]证明了对于一个顶点数至少为 20 的连通图 G , 如果图 G 有完美匹配或几乎完美匹配, 并且任意两个不相邻的顶点度数之和至少为 $n - 5$, 则图 G 是任意可分图. Liu 等^[2]认为如果图 G 是一个 $2K_2$ -free 图且 $\omega(G) = 2$, 则图 G 是任意可分图当且仅当图 G 含有完美匹配或几乎完美匹配. Marczyk^[3]结合独立数得到了任意可分图相关的结论: 如果图 G 连通, 对于任意不相邻的顶点 $x, y \in V(G)$ 满足 $d_G(x) + d_G(y) \geq n - 2$ 且 $\alpha(G) \leq \lceil n/2 \rceil$, 则图 G 是任意可分图.

本文主要研究字典积图的任意可分性. 分别讨论了树 T 和路 P_n 、可迹图和任意可分图、圈 C_n 和树 T 的字典积图的任意可分性.

1 树和路的字典积图

假设 T 是树. 对于任一顶点 $u \in V(T)$, $d(u)$ 表示 u 的度数. 点 u 和 v 在树 T 的距离记作 $d_T(u, v)$, 表示在 T 中 u 到 v 的最短路的长度.

为了后面证明方便, 下面介绍一个新的图类.

两个图 G 和 H 的笛卡儿积记为 $G \square H$, 其顶点集 $V(G) \times V(H)$, $G \square H$ 的两个顶点 $(g, h), (g', h')$ 相邻当且仅当 $g = g'$ 且 $hh' \in E(H)$ 或者 $h = h'$ 且 $gg' \in E(G)$.

设 $V(G)$ 与 $V(H)$ 分别是两个图 G 与 H 的顶点集. 如果在 $V(G)$ 与 $V(H)$ 的顶点之间存在一个 1-1 对应, 使得在图 G 中 $V(G)$ 的任意两顶点 (可以相同) 之间恰好有 k 条边, 当且仅当在图 H 中 $V(H)$ 的两对应顶点 (可以相同) 之间恰好有 k 条边, 这里 k 是非负整数, 那么称图 G 与图 H 同构, 记作 $G \cong H$.

定理 1 对于一个整数 $n \geq 3$ 和最大度为 $\Delta(T) \leq n+1$ 的树 T , 如果 T 有一条包含所有度数为 $\Delta(T)$ 的顶点的路, 则 $T \circ P_n$ 是可迹图.

证明 假设 $P^* = u_0 u_1 u_2 \cdots u_t$ 是 T 中包含所有最大度点的最长路. 显然, $d(u_0) = d(u_t) = 1, d(u_i) \leq n$ 对于 $u_i \in V(T) \setminus V(P^*)$. 为了方便, 记 $V(P^*) = V_0$. 令 $s = \max\{d_T(V_0, v) : v \in V(T) \setminus V_0\}$. 假设 $V_i = \{v | d_T(v, V_0) = i, v \in V(T) \setminus V_0\}$, 其中 $1 \leq i \leq s$. 因为 T 是树且 $T[V_0]$ 是连通的, 对于每个 $i \geq 1, V_i$ 是一个独立集. 假设 $T_i = T[\bigcup_{j=0}^i V_j]$, $0 \leq i \leq s$, 得 $T_s \cong T$ 且当 $i \geq j$ 时 $T_j \circ P_n$ 是 $T_i \circ P_n$ 的子图. 下面构造 $T \circ P_n$ 的一个哈密顿路.

步骤 1 因为 $V_0 = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_t\}, T_0 = T[V_0]$ 且 $T_0 \circ P_n$ 是 $T_0 \circ P_n$ 的生成子图, 所以在 $T_0 \circ P_n$ 中找一条哈密顿路 P_0 如下:

当 t 是偶数时, $P_0 = u_0^1 u_0^2 \cdots u_0^{n-1} u_0^n \underline{u_1^1 u_1^2 \cdots u_1^{n-1} u_1^n} \cdots \underline{u_2^1 u_2^2 \cdots u_2^{n-1} u_2^n} \cdots \underline{u_{t-1}^1 u_{t-1}^2 \cdots u_{t-1}^{n-1} u_{t-1}^n}$.

当 t 是奇数时, $P_0 = u_0^1 u_0^2 \cdots u_0^{n-1} u_0^n \underline{u_1^1 u_1^2 \cdots u_1^{n-1} u_1^n} \cdots \underline{u_2^1 u_2^2 \cdots u_2^{n-1} u_2^n} \cdots \underline{u_{t-1}^1 u_{t-1}^2 \cdots u_{t-1}^{n-1} u_{t-1}^n}$.

步骤 2 将 $T_0 \circ P_n$ 中的哈密顿路 P_0 扩大到 $T_1 \circ P_n$ 中的哈密顿路 P_1 , 其中 $T_1 = T[V_0 \cup V_1]$. 假设 $V_1 = \bigcup_{0 \leq i \leq t} \{u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{il_i}\}$ 是 $u_i (0 \leq i \leq t)$ 的不在 V_0 中的全部邻点. 显然, $l_0 = l_t = 0$ 且 $d(u_i) = l_i + 2 \leq n + 1 (1 \leq i \leq t-1)$, 故 $l_i + 1 \leq n$. 对任意 $1 \leq i \leq t-1$, 将 $T_0 \circ P_n$ 中的路 P_0 中的一部分 $u_i^1 u_i^2 \cdots u_i^{n-1} u_i^n$ 或者 $u_i^n u_i^{n-1} \cdots u_i^2 u_i^1$ 替换到 $T_1 \circ P_n$ 中的路 P_{1i} , 它的顶点集包含顶点 $u_i^1, u_i^2, \dots, u_i^{n-1}, u_i^n$ 和它们在 V_1 中的全部邻点.

如果这部分路为 $u_i^1 u_i^2 \cdots u_i^{n-1} u_i^n$, 则当 $l_i = 0$ 时 $P_{1i} = u_i^1 u_i^2 \cdots u_i^{n-1} u_i^n$, 当 $l_i \geq 1$ 时, $P_{1i} = u_i^1 u_{i1}^1 u_{i1}^2 \cdots u_{i1}^{l_i+1} u_i^1 u_i^2 \cdots u_i^{n-1} u_i^n u_{i2}^1 u_{i2}^2 \cdots u_{i2}^{l_i+1} u_i^2 u_i^3 \cdots u_i^{l_i} u_{il_i}^1 u_{il_i}^2 \cdots u_{il_i}^{l_i+1} u_i^{l_i+1} u_i^{l_i+2} \cdots u_i^n$. 因为 $l_i + 1 \leq n$, 总能得到路 P_{1i} . 如图 2 上图所示.

如果这部分路为 $u_i^n u_i^{n-1} \cdots u_i^2 u_i^1$, 则当 $l_i = 0$ 时 $P_{1i} = u_i^n u_i^{n-1} \cdots u_i^2 u_i^1$, 当 $l_i \geq 1$ 时, $P_{1i} = u_i^n u_{i1}^{n-1} u_{i1}^{n-2} \cdots u_{i1}^1 u_i^{n-1} u_{i2}^{n-2} u_{i2}^{n-3} \cdots u_{i2}^1 u_i^{n-2} u_{i3}^{n-3} u_{i3}^{n-4} \cdots u_{i3}^1 u_i^{n-3} u_{il_i}^{n-l_i} u_{il_i}^{n-l_i-1} \cdots u_{il_i}^1$. 如图 2 下图所示.

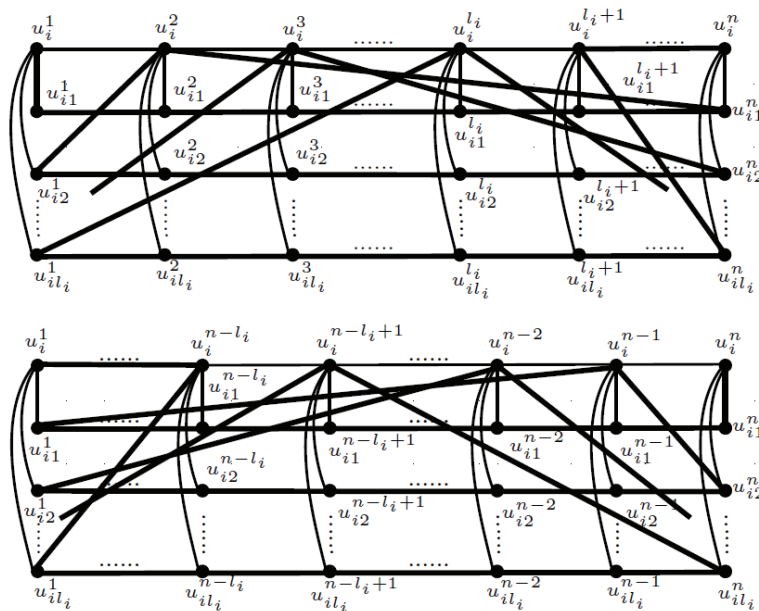


图 2 将 $T_0 \circ P_n$ 中的哈密顿路扩大到 $T_1 \circ P_n$ 中 (有些边省略)

综上所述可得 $P_1 = P_{10} P_{11} P_{12} \cdots P_{1(t-1)} P_{1t}$ 是 $T_1 \circ P_n$ 中的哈密顿路.

步骤 3 将 $T_1 \circ P_n$ 中的哈密顿路 P_1 扩大到 $T_2 \circ P_n$ 中的哈密顿路 P_2 , 其中 $T_2 = T[V_0 \cup V_1 \cup V_2]$. 假设 $u_{im1}, u_{im2}, \dots, u_{imh_m}$ 是顶点 u_{im} 在 V_2 中的全部邻点, 其中 u_{im} 是 V_1 中的顶点. 显然, $d(u_{im}) = h_m + 1 \leq n$. 对于每个 $m \in \{1, 2, \dots, l_i\}$, 将 $T_1 \circ P_n$ 中的路 P_1 的一部分 $u_{im}^1 u_{im}^2 \cdots u_{im}^{n-1} u_{im}^n$ 或者 $u_{im}^n u_{im}^{n-1} \cdots u_{im}^2 u_{im}^1$ 替换到 $T_2 \circ P_n$ 中的路 P_{2im} , 它的顶点集包含顶点 $u_{im}^1, u_{im}^2, \dots, u_{im}^{n-1}, u_{im}^n$ 和它们在 V_2 中的全部邻点.

如果这部分路为 $u_{im}^1 u_{im}^2 \cdots u_{im}^{n-1} u_{im}^n$, 则当 $h_m = 0$ 时 $P_{2im} = u_{im}^1 u_{im}^2 \cdots u_{im}^{n-1} u_{im}^n$, 当 $h_m \geq 1$ 时, $P_{2im} = u_{im}^1 u_{im1}^1 u_{im1}^2 \cdots u_{im1}^{h_m} u_{im}^1 u_{im2}^1 u_{im2}^2 \cdots u_{im2}^{h_m} u_{im}^2 u_{im3}^1 u_{im3}^2 \cdots u_{im3}^{h_m} u_{im}^3 u_{imh_m}^1 u_{imh_m}^2 \cdots u_{imh_m}^{h_m} u_{im}^{h_m+1} u_{im}^{h_m+2} \cdots u_{im}^n$.

如果这部分路为 $u_{im}^n u_{im}^{n-1} \cdots u_{im}^2 u_{im}^1$, 则当 $h_m = 0$ 时 $P_{2im} = u_{im}^n u_{im}^{n-1} \cdots u_{im}^2 u_{im}^1$, 当 $h_m \geq 1$ 时, $P_{2im} = \frac{u_{im}^n u_{im}^{n-1} u_{im}^{n-1} \cdots u_{im}^2 u_{im}^1 u_{im}^{n-1} \cdots u_{im}^2 u_{im}^1 u_{im}^{n-2} \cdots u_{im}^{n-h_m+1} u_{im}^{n-h_m} u_{im}^{n-1} \cdots u_{im}^2 u_{im}^{h_m} u_{im}^1}{u_{im}^{n-h_m} u_{im}^{n-h_m-1} \cdots u_{im}^1}$.
 故可以得到 $P_2 = P_{10} P_{211} P_{212} \cdots P_{21l_1} P_{221} P_{222} \cdots P_{22l_2} P_{231} \cdots P_{2(t-1)1} P_{2(t-1)2} \cdots P_{2(t-1)l_{t-1}} P_{1t}$ 是 $T_2 \circ P_n$ 的一条哈密顿路.

对于 $i = \{0, 1, 2, \dots, s\}$ 不停地重复步骤 3, 我们总能得到图 $T \circ P_n$ 的哈密顿路. 因此, $T \circ P_n$ 是可迹图.

推论 1 假设 G 是连通图, 且 H 是阶为 n 的可迹图. 如果图 G 有最大度至多为 $n+1$ 的生成树 T , 且 T 有一条包含全部度数为 $\Delta(T)$ 的顶点的路, 则 $G \circ H$ 是任意可分图.

树 T 被称为毛毛虫树, 如果 T 中度数至少为 2 的两个顶点导出一条路.

字典积图有结合律 (即 $(G \circ H) \circ K \cong G \circ (H \circ K)$), 但没有交换律 (即 $G \circ H \not\cong H \circ G$). 如果 T' 是毛毛虫树, 则 $P_n \circ T' \not\cong T' \circ P_n$. 下面主要讨论图 $P_n \circ T'$ 的任意可分性.

命题 1 如果 T' 是毛毛虫树且 $n \geq 2$ 是偶数, 则 $P_n \circ T'$ 是可迹图.

证明 假设 $P^* = u_0 u_1 u_2 \cdots u_t$ 是 T' 中的一条路, 且 P^* 包含 T' 中度数至少为 2 的全部顶点. 记 $P_n = v_1 v_2 \cdots v_{n-1} v_n$ 且 $P_n \circ P^*$ 中的顶点记为 v_i^j ($1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq t$). 显然, $d(u_0) = d(u_t) = 1$, 且对于 $u_i \in V(T') \setminus V(P^*)$ 有 $d(u_i) = 1$. 为了方便, 记 $V(P^*) = V_0, V_1 = V(T') \setminus V_0$. $T'[V_0]$ 是连通的, V_1 是个独立集且 $P_n \circ T'_0$ 是 $P_n \circ T'$ 的子图, 其中 $T'_0 \cong P^*$. 按如下方式可以找到图 $P_n \circ T'$ 中的哈密顿路.

步骤 1 因为 $V_0 = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_t\}$, 且 $P_n \circ T'_0$ 是 $P_n \circ T'$ 的一个生成子图, 故总能得到 $P_n \circ T'_0$ 中的哈密顿路 P_0 如下:

当 t 是偶数时, $P_0 = v_1^0 v_2^0 \cdots v_{n-1}^0 v_n^0 v_{n-1}^1 v_n^1 \cdots v_2^1 v_1^1 v_2^2 v_3^2 \cdots v_{n-1}^2 v_n^2 v_{n-1}^3 v_n^3 \cdots v_2^{t-1} v_1^{t-1} v_2^t v_3^t \cdots v_{n-1}^t v_n^t$.

当 t 是奇数时, $P_0 = v_1^0 v_2^0 \cdots v_{n-1}^0 v_n^0 v_{n-1}^1 v_n^1 \cdots v_2^1 v_1^1 v_2^2 v_3^2 \cdots v_{n-1}^2 v_n^2 v_{n-1}^3 v_n^3 \cdots v_2^{t-1} v_1^{t-1} v_2^t v_3^t \cdots v_{n-1}^t v_n^t$.

步骤 2 将 $P_n \circ T'_0$ 中的哈密顿路 P_0 扩大到 $P_n \circ T'$ 中的哈密顿路 P . 假设 $V_1 = \bigcup_{0 < i < t} \{u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{il_i}\}$ 是 u_i ($0 < i < t$) 的不在 V_0 中的全部邻点. 显然, 当 $1 \leq i \leq t-1$ 时 $d(u_i) = l_i + 2$. 对于每个 $1 \leq i \leq t-1$, 将 $P_n \circ T'_0$ 中的路 P_0 的一部分 $v_1^i v_2^i \cdots v_{n-1}^i v_n^i$ 或者 $v_n^i v_{n-1}^i \cdots v_2^i v_1^i$ 替换到 $P_n \circ T'$ 中的路 P_{1i} , 它的顶点集包含顶点 $v_1^i, v_2^i, \dots, v_{n-1}^i, v_n^i$ 和它们在 V_1 中的全部邻点.

如果这部分路为 $v_1^i v_2^i \cdots v_{n-1}^i v_n^i$ (或者 $v_n^i v_{n-1}^i \cdots v_2^i v_1^i$), 则当 $i = 0, t$ 时 $P_{1i} = v_1^i v_2^i \cdots v_{n-1}^i v_n^i$ (或者 $P_{1i} = v_n^i v_{n-1}^i \cdots v_2^i v_1^i$), 当 $l_i \geq 1$ 时, $P_{1i} = v_1^{i1} v_2^{i1} v_1^{i2} v_2^{i2} v_1^{i3} \cdots v_1^{il_i-1} v_2^{il_i-1} v_1^{il_i} v_2^{il_i} v_3^{i1} v_4^{i1} v_3^{i2} v_4^{i2} v_3^{i3} \cdots v_3^{il_i-1} v_4^{il_i-1} v_3^{il_i} v_4^{il_i} v_3^i v_4^i v_5^i \cdots v_{n-2}^i v_{n-1}^i v_n^i v_{n-1}^{i2} v_n^{i2} v_{n-1}^{i3} \cdots v_{n-1}^{il_i-1} v_n^{il_i-1} v_{n-1}^{il_i} v_n^{il_i} v_{n-1}^i v_n^i$ (路 P_{1i} 可以以顶点 v_n^i 作为起点, 以 v_1^i 作为终点), 如图 3 左图所示.

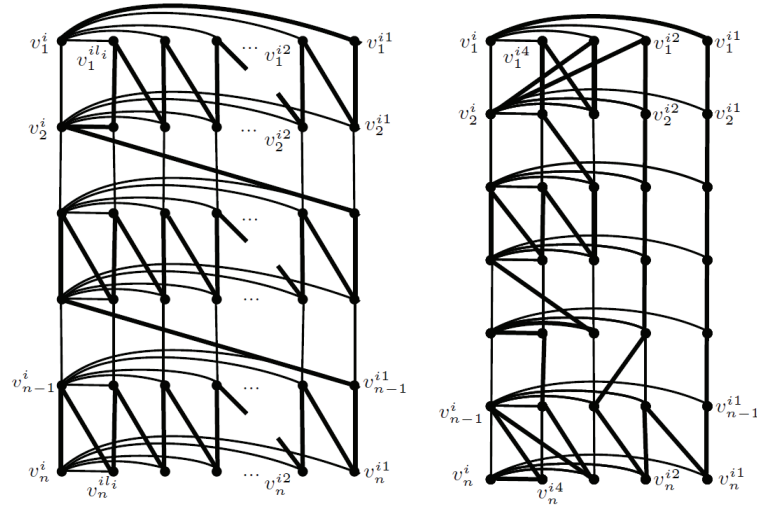


图 3 $P_n \circ K_{1,l_i}$ (n 是偶数) 且 $P_n \circ K_{1,4}$ (n 是奇数) (有些边省略)

故可以得到 $P = P_{10} P_{11} P_{12} \cdots P_{1(t-1)} P_{1t}$ 是 $P_n \circ T'$ 中的一条哈密顿路. 因此, $P_n \circ T'$ 是可迹图.

命题 2 如果 T' 是满足 $\Delta(T') \leq 6$ 的毛毛虫树且 $n \geq 3$ 是奇数, 则 $P_n \circ T'$ 是可迹图.

证明跟命题 1 类似, 只需将步骤 2 中的路 P_{1i} 替换为图 3 右图的粗线即可.

2 可迹图和任意可分图的字典积图

设 G 是 n 个顶点的可迹图, H 是 m 个顶点的任意可分图. 在这一节, 图 G 中的哈密顿路记为 $P = u_1 u_2 \cdots u_{n-1} u_n$, 图 H 中的顶点记为 $v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, v_m$, 字典积图 $G \circ H$ 的顶点 (u_i, v_j) 记为 u_i^j .

猜想 1^[5] 设 G 是可迹图且 H 是任意可分图, 则 $G \square H$ 是任意可分图.

本文证明这个猜想的字典积图形式.

定理 2 设 G 是可迹图且 H 是任意可分图, 则 $G \circ H$ 是哈密顿图.

证明 因为 H 是一个任意可分图, 所以当 $|V(H)|$ 是偶数 (或者奇数) 时, H 有完美匹配 (或者几乎完美匹配). 为了方便, 我们用 $\underbrace{K_2 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_2}_{|V(H)|/2}$ 或者 $K_1 \cup \underbrace{K_2 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_2}_{(|V(H)|-1)/2}$ 来记. 显然, 图 $G \square K_2$ 是 $G \circ K_2$ 的生成子图, 故 $G \circ K_2$ 有哈密顿圈 $C = u_1^1 u_2^1 \cdots u_{n-1}^1 u_n^1 u_{n-1}^2 u_{n-2}^2 \cdots u_2^2 u_1^2$.

如果 $|V(H)|$ 是偶数, 图 $G \circ H$ 中有 $|V(H)|/2$ 个 $(G \circ K_2)$, 即在 $G \circ H$ 中有 $|V(H)|/2$ 个圈 C , 由字典积图的定义可知, $u_1^{2t} u_2^{2t+1}, u_2^{2t} u_1^{2t+1} \in E(G \circ H), t=1, 2, \dots, |V(H)|/2-1$. 故边 $u_1^{2t} u_2^{2t}$ 和 $u_1^{2t+1} u_2^{2t+1}$ 替换掉边 $u_1^{2t} u_2^{2t+1}$ 和 $u_2^{2t} u_1^{2t+1}$ 可得经过全部顶点的圈, 如图 1 中的中间图所示.

如果 $|V(H)|$ 是奇数, 图 $G \circ H$ 有一个 K_1 和 $(|V(H)|-1)/2$ 个 $(G \circ K_2)$, 且 $G \circ (K_1 \cup K_2)$ 有哈密顿圈 $C' = u_1^1 u_2^2 u_3^1 u_4^1 \cdots u_{n-1}^1 u_n^1 u_{n-1}^2 u_{n-2}^2 u_{n-3}^3 u_{n-2}^3 u_{n-3}^3 u_{n-2}^3 u_{n-3}^3 \cdots u_3^3 u_2^3 u_1^2 u_1^1$, 如图 1 右图所示. 易知, 前 $(|V(H)|-1)/2-1$ 个圈 C 合并得到一个圈 C'' . 故 $C' \cup C'' \cup \{u_1^3 u_2^4\} \cup \{u_2^3 u_1^4\} - \{u_1^3 u_2^3, u_1^4 u_2^4\}$ 是图 $G \circ H$ 的一个哈密顿圈.

推论 2 如果 G 是可迹图且 H_1, H_2, \dots, H_t 是任意可分图, 则 $G \circ (H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_t)$ 是哈密顿图.

证明 设 $|V(H_k)| = m_k (1 \leq k \leq t)$ 且图 H_k 的顶点记为 $v_{k1}, v_{k2}, \dots, v_{km_k}$. 由定理 2 可知, 图 $G \circ H_k$ 是哈密顿图且 $u_1^{k m_k} u_2^{(k+1)1}, u_2^{k m_k} u_1^{(k+1)1} \in E(G \circ (H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_t))$. 故它们可得到经过全部顶点的圈.

因此, 图 $G \circ (H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_t)$ 是哈密顿图.

如果图 T 是一个同构于星 $K_{1,q}$ 的树, 则树 T 称为星型树. 本文用 $S(2, a, b)$ 来表示星型树, 其中 $2 \leq a \leq b$, 如图 4 左图所示. 请注意, 这个星型树的顶点数为 $a+b$.

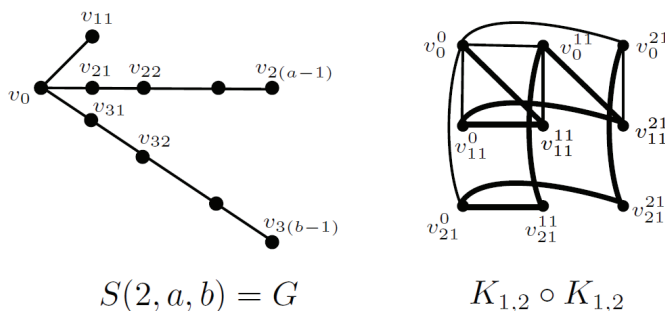


图 4 星型树 $S(2, a, b)$ 和 $K_{1,2} \circ K_{1,2}$ (有些边省略)

Barth 等^[6]和 Horňák 等^[4]发现了关于星型树性质的第一个结果.

命题 3 设 $S(2, a, b)$ 是 $2 \leq a \leq b$ 的星型树, 则 $S(2, a, b)$ 是任意可分图当且仅当 a 和 b 互素. 此外, 图 $S(2, a, b)$ 中可允许但不可实现的序列形式为 $(d^k) = (\underbrace{d, d, \dots, d}_k)$, 其中 $a \equiv b \equiv 0 \pmod{d}$ 且 $d > 1$.

定理 3 如果 $G = S(2, a, b)$ 是 $2 \leq a \leq b$ 的任意可分星型树, 则图 $G \circ G$ 是任意可分图.

证明 因为 $S(2, a, b)$ 是任意可分星型树, 则 a 和 b 互素. 假设 $V(G) = \{v_0, v_{11}, v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2(a-1)}, v_{31}, v_{32}, \dots, v_{3(b-1)}\}$ 且图 $G \circ G$ 的顶点记为 v_i^j , 对于任意 $i, j \in \{0, 11, 21, 22, \dots, 2(a-1), 31, 32, \dots, 3(b-1)\}$.

如果 a 和 b 中的一个为 2, 不妨设 $a=2$. 假设 P 是图 G 中的一条路, $|V(P)| = b-1$, 且 $V(G) \setminus V(P) = K_{1,2}$. 图 $G \circ G$ 可分成三个部分: $G \circ P, P \circ K_{1,2}$ 和 $K_{1,2} \circ K_{1,2}$.

由定理 1 可知, 图 $G \circ P$ 有以 v_{11}^{31} 为起点且以 $v_{3(b-1)}^{31}$ 为终点的哈密顿路. 由命题 1 或命题 2 可知, 图 $P \circ K_{1,2}$ 有以 $v_{3(b-1)}^0$ 为起点且以 v_{31}^0 为终点的哈密顿路. 图 $K_{1,2} \circ K_{1,2}$ 有哈密顿路 $v_0^{21} v_{21}^{21} v_{21}^0 v_{21}^{11} v_{11}^{11} v_{11}^{21} v_{11}^0 v_{11}^{11} v_0^0$, 如图 4 右图所示. 因为 $v_{3(b-1)}^0 v_{31}^{31}, v_{31}^0 v_0^{21} \in E(G \circ G)$, 故能得到图 $G \circ G$ 的一条哈密顿路.

如果 $a, b \geq 3$, 可假设 P_1 和 P_2 是图 G 中的两条路, $|V(P_1)| = a-1, |V(P_2)| = b-1, V(G) \setminus V(P_2) = P_{a+1}$ 且 $V(G) \setminus (V(P_1) \cup V(P_2)) = K_2$. 图 $G \circ G$ 可分成四部分: $G \circ P_2, P_2 \circ P_{a+1}, P_1 \circ P_{a+1}$ 和 $K_2 \circ P_{a+1}$.

由定理 1 可知, 图 $G \circ P$ 有以 v_{11}^{31} 为起点且以 $v_{3(b-1)}^{31}$ 为终点的哈密顿路. 图 $P_2 \circ P_{a+1}$ 和 $P_1 \circ P_{a+1}$ 分别有以 $v_{3(b-1)}^0$ 和 $v_{21}^{2(a-1)}$ 为起点且以 v_{31}^0 和 v_{21}^0 为终点的哈密顿路. 图 $(K_2 \circ P_{a+1}) \setminus \{v_0^{2(a-1)}\}$ 有哈密顿路 $v_0^{2(a-2)}v_{11}^{2(a-1)}v_{11}^{2(a-2)}v_0^{2(a-3)}v_{11}^{2(a-3)} \dots v_0^{22}v_{11}^{22}v_{11}^{21}v_0^{11}v_{11}^{11}v_0^0v_{11}^0v_0^0$. 因为 $v_{3(b-1)}^0v_{3(b-1)}^{31}, v_{31}^0v_0^{2(a-1)}, v_0^{2(a-1)}v_{21}^{2(a-1)}, v_{21}^0v_0^{2(a-2)} \in E(G \circ G)$, 故能得到图 $G \circ G$ 的一条哈密顿路.

因此, 图 $G \circ G$ 是可迹图, 从而是任意可分图.

猜想 2 设 H 和 G 是任意可分图, 则 $G \circ H$ 是任意可分图.

3 圈和树的字典积图

定理 4^[1] 设 G 是 $\Delta(G) \leq n$ 的连通图, 则笛卡儿积图 $G \square C_n$ 是哈密顿图.

定理 5^[7] 设 T 是 $\Delta(T) \leq n+1$ 的树且正整数 $n \geq 3$. 如果树 T 中的一条路包含全部度数为 $n+1$ 的顶点, 则 $T \square C_n$ 是可迹图.

定理 6 如果树 T 有一条包含全部度数为 $\Delta(T)$ 的顶点的路, 则 $C_n \circ T$ 是可迹图.

证明 因为笛卡儿积图有交换律 $(G \square H \cong H \square G)$, 且 $G \square H \subseteq G \circ H$. 故由定理 5 可知, 只需证明 $\Delta(T) \geq n+2$ 的情况. 假设 $P^* = u_0u_1u_2 \dots u_t$ 是树 T 中的包含全部最大度点的路, $C_n = v_1v_2 \dots v_{n-1}v_nv_1$ 且图 $C_n \circ P^*$ 中的顶点记为 v_i^j ($1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq t$). 显然, 当 $u_i \in V(T) \setminus V(P^*)$ 时 $d(u_0) = d(u_t) = 1, d(u_i) \leq \Delta(T) - 1$. 为了方便, 记 $V(P^*) = V_0$. 设 $s = \max\{d_T(V_0, v) : v \in V(T) \setminus V_0\}, V_i = \{v | d_T(v, V_0) = i, v \in V(T) \setminus V_0\}$ 对任意 $1 \leq i \leq s$. 因为 T 是树且 $T[V_0]$ 是连通的, 对于每个 $i \geq 1, V_i$ 是独立集. 设 $T_i = T[\bigcup_{0 \leq j \leq i} V_j]$ ($0 \leq i \leq s$), $T_s \cong T$ 且 $C_n \circ T_j$ 是 $C_n \circ T_i$ ($i \geq j$) 的一个子图. 总能找到图 $C_n \circ T$ 中的哈密顿路.

步骤 1 因为 $V_0 = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_t\}, T_0 = T[V_0]$ 且 $C_n \square T_0$ 是 $C_n \circ T_0$ 的一个生成子图, 故总能得到 $C_n \circ T_0$ 中的哈密顿路 P_0 如下:

当 t 是偶数时, $P_0 = \frac{v_1^0v_2^0 \dots v_{n-1}^0v_n^0}{v_n^1v_{n-1}^1 \dots v_2^1v_1^1} \frac{v_1^2v_2^2 \dots v_{n-1}^2v_n^2}{v_n^3v_{n-1}^3 \dots v_2^3v_1^3} \dots \frac{v_1^{t-1}v_2^{t-1} \dots v_{n-1}^{t-1}v_n^{t-1}}{v_n^tv_{n-1}^t \dots v_2^tv_1^t}$.

当 t 是奇数时, $P_0 = \frac{v_1^0v_2^0 \dots v_{n-1}^0v_n^0}{v_n^1v_{n-1}^1 \dots v_2^1v_1^1} \frac{v_1^2v_2^2 \dots v_{n-1}^2v_n^2}{v_n^3v_{n-1}^3 \dots v_2^3v_1^3} \dots \frac{v_1^{t-1}v_2^{t-1} \dots v_{n-1}^{t-1}v_n^{t-1}}{v_n^tv_{n-1}^t \dots v_2^tv_1^t}$.

步骤 2 将 $C_n \circ T_0$ 中的哈密顿路 P_0 扩大到 $C_n \circ T_1$ 中的哈密顿路 P_1 , 其中 $T_1 = T[V_0 \cup V_1]$. 假设 $V_1 = \bigcup_{0 \leq i \leq t} \{u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{i l_i}\}$ 是 u_i ($0 \leq i \leq t$) 的不在 V_0 中的全部邻点. 显然, $l_0 = l_t = 0$ 且 $d(u_i) \leq l_i + 2 \leq \Delta(T)$ ($1 \leq i \leq t-1$). 对于每个 $1 \leq i \leq t-1$, 将 $C_n \circ T_0$ 中的路 P_0 中的一部分 $v_1^i v_2^i \dots v_{n-1}^i v_n^i$ 或者 $v_n^i v_{n-1}^i \dots v_2^i v_1^i$ 替换到 $C_n \circ T_1$ 中的路 P_{1i} , 它的顶点集包含顶点 $v_1^i, v_2^i, \dots, v_{n-1}^i, v_n^i$ 和它们在 V_1 中的全部邻点.

如果这部分路为 $v_n^i v_{n-1}^i \dots v_2^i v_1^i$, 则当 $l_i = 0$ 时 $P_{1i} = v_n^i v_{n-1}^i \dots v_2^i v_1^i$, 当 $l_i \geq 1$ 时, $P_{1i} = v_n^i v_{n-1}^i v_{n-1}^{i1} \dots v_2^i v_1^i v_1^{i2} v_{n-1}^{i2} \dots v_2^{i2} v_1^{i2} v_{n-1}^{i3} v_{n-1}^{i3} \dots v_2^{i l_i - 1} v_1^{i l_i - 1} v_n^i v_1^{i l_i} v_1^{i l_i} \dots v_{n-2}^{i l_i} v_{n-1}^{i l_i} v_{n-1}^i \dots v_2^i v_1^i$, 如图 5 左图所示.

如果这部分路为 $v_1^i v_2^i \dots v_{n-1}^i v_n^i$, 则当 $l_i = 0$ 时 $P_{1i} = v_1^i v_2^i \dots v_{n-1}^i v_n^i$, 当 $l_i \geq 1$ 时, $P_{1i} = v_1^i v_1^{i1} v_2^{i1} \dots v_{n-1}^{i1} v_n^i v_n^{i2} v_{n-1}^{i2} \dots v_2^{i2} v_1^{i2} v_{n-1}^{i2} \dots v_2^{i l_i} v_1^{i l_i} v_{n-1}^{i l_i} \dots v_3^{i l_i} v_2^{i l_i} v_2^{i l_i} \dots v_{n-1}^i v_n^i$, 如图 5 右图所示.

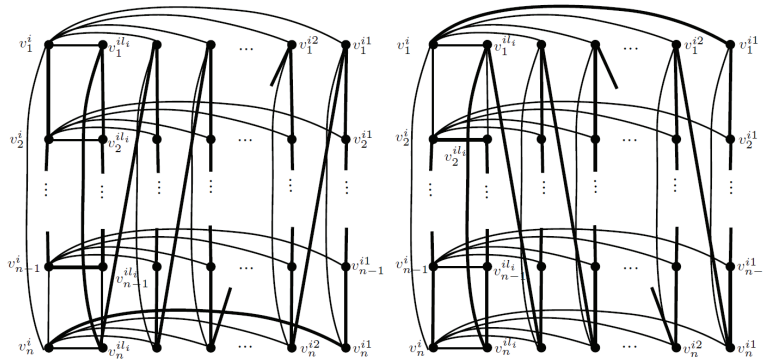


图 5 将 $C_n \circ T_0$ 中的哈密顿路扩大到 $C_n \circ T_1$ 中 (有些边省略)

综上可得 $P_1 = P_{10}P_{11}P_{12} \dots P_{1(t-1)}P_{1t}$ 是 $C_n \circ T_1$ 中的哈密顿路.

步骤 3 将 $C_n \circ T_1$ 中的哈密顿路 P_1 扩大到 $C_n \circ T_2$ 中的哈密顿路 P_2 , 其中 $T_2 = T[V_0 \cup V_1 \cup V_2]$. 假设 $u_{i m_1}, u_{i m_2}, \dots, u_{i m_{h_m}}$ 是顶点 u_{im} 在 V_2 中的全部邻点, 其中 u_{im} 是 V_1 中的一些顶点. 显然, $d(u_{im}) = h_m + 1 \leq$

$\Delta(T) - 1$. 对于每个 $m \in \{1, 2, \dots, l_i\}$, 将 $C_n \circ T_1$ 中的路 P_1 的一部分 $v_1^{im} v_2^{im} \dots v_{n-1}^{im} v_n^{im}$ 或 $v_n^{im} v_{n-1}^{im} \dots v_2^{im} v_1^{im}$ 替换 $C_n \circ T_2$ 中的路 P_{2im} , 它的顶点集包含顶点 $v_1^{im}, v_2^{im}, \dots, v_{n-1}^{im}, v_n^{im}$ 和它们在 V_2 中的全部邻点.

如果这部分路为 $v_1^{im} v_2^{im} \dots v_{n-1}^{im} v_n^{im}$, 则当 $h_m = 0$ 时 $P_{2im} = v_1^{im} v_2^{im} \dots v_{n-1}^{im} v_n^{im}$, 当 $h_m \geq 1$ 时, $P_{2im} = v_1^{im} v_1^{im1} v_2^{im1} v_2^{im1} \dots v_{n-1}^{im1} v_n^{im1} v_1^{im2} v_2^{im2} \dots v_{n-1}^{im2} v_n^{im2} v_1^{im3} v_2^{im3} \dots v_{n-1}^{im3} v_n^{im3} \dots v_1^{imh_m-1} v_2^{imh_m-1} v_1^{imh_m} v_n^{imh_m} v_n^{imh_m} \dots v_3^{imh_m} v_2^{imh_m} v_2^{imh_m} \dots v_{n-1}^{imh_m} v_n^{imh_m}$.

如果这部分路为 $v_n^{im} v_{n-1}^{im} \dots v_2^{im} v_1^{im}$, 则当 $h_m = 0$ 时 $P_{2im} = v_n^{im} v_{n-1}^{im} \dots v_2^{im} v_1^{im}$, 当 $h_m \geq 1$ 时, $P_{2im} = v_n^{im} v_n^{im1} v_{n-1}^{im1} \dots v_2^{im1} v_1^{im1} v_n^{im2} v_{n-1}^{im2} \dots v_2^{im2} v_1^{im2} v_n^{im3} v_{n-1}^{im3} \dots v_2^{imh_m-1} v_1^{imh_m-1} v_n^{imh_m} v_1^{imh_m} v_2^{imh_m} \dots v_{n-2}^{imh_m} v_{n-1}^{imh_m} v_{n-1}^{imh_m} \dots v_2^{imh_m} v_1^{imh_m}$.

故可以得到 $P_2 = P_{10} P_{211} P_{212} \dots P_{21l_1} P_{221} P_{222} \dots P_{22l_2} P_{231} \dots P_{2(t-1)1} P_{2(t-1)2} \dots P_{2(t-1)l_{t-1}} P_{1t}$ 是 $C_n \circ T_2$ 的一条哈密顿路.

对于 $i = \{0, 1, 2, \dots, s\}$ 不停地重复步骤 3, 可以得到图 $C_n \circ T$ 的哈密顿路. 因此, 图 $C_n \circ T$ 是可迹图.

推论 3 假设 G 是一个哈密顿图, 且 $K_{1,k_1}, K_{1,k_2}, \dots, K_{1,k_t}$ 是星. 则 $G \circ (K_{1,k_1} \cup K_{1,k_2} \cup \dots \cup K_{1,k_t})$ 是可迹图.

证明 设 K_{1,k_i} 是最大度为 k_i ($1 \leq i \leq t$) 的星, 分别用 v_{0_i} 和 v_{j_i} ($1 \leq j_i \leq k_i$) 来表示它的中心点和叶子点. 图 $G \circ K_{1,k_i}$ 有哈密顿路 $P = v_{0_i}^1 v_{0_i}^2 \dots v_{0_i}^{n-1} v_{0_i}^n v_{1_i}^1 v_{1_i}^2 \dots v_{1_i}^{n-1} v_{1_i}^n v_{2_i}^1 v_{2_i}^2 \dots v_{2_i}^{n-1} v_{2_i}^n v_{3_i}^1 v_{3_i}^2 \dots v_{k_i-1}^{n-1} v_{k_i-1}^n v_{k_i}^1 v_{k_i}^2 \dots v_{k_i}^{n-1} v_{k_i}^n$, 由字典积图的定义可知, $v_{k_i}^n v_{0_{i+1}}^1 \in E(G \circ (K_{1,k_1} \cup K_{1,k_2} \cup \dots \cup K_{1,k_t}))$. 故合并它们可得经过全部顶点的路.

因此, 图 $G \circ (K_{1,k_1} \cup K_{1,k_2} \cup \dots \cup K_{1,k_t})$ 是可迹图.

推论 4 如果 G 是哈密顿图且 H 是任意图, 则 $G \circ H$ 是任意可分图.

参考文献:

- [1] ČADA R, FLANDRIN E, LI H. Hamiltonicity and pancyclicity of Cartesian products of graphs[J]. Discrete Mathematics, 2009, 309(22): 6337-6343.
- [2] LIU F X, WU B, MENG J X. Arbitrarily partitionble $\{2K_2, C_4\}$ -free graphs[J]. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 2022, 42(2): 485-500.
- [3] MARCZYK A. A note on arbitrarily vertex decomposable graphs[J]. Opuscula Mathematica, 2006, 26(1): 109-118.
- [4] HORŇÁK M, WOŹNIAK M. On arbitrarily vertex decomposable trees[J]. Discrete Mathematics, 2008, 308(7): 1268-1281.
- [5] BAUDON O, BENSMAIL J, KALINOWSKI R, et al. On the Cartesian product of an arbitrarily partitionable graph and a traceable graph[J]. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 2014, 16(2): 225-232.
- [6] BARTH D, BAUDON O, PUECH J. Decomposable trees: A polynomial algorithm for tripodes[J]. Discrete Applied Mathematics, 2002, 119(3): 205-216.
- [7] LIU F X, WU B, MENG J X. Partitioning the Cartesian product of a tree and a cycle[J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 332: 90-95.

责任编辑: 赵新科