具有无穷时滞的积微分方程的最优控制*

何明霞, 王 静

(兰州文理学院 教育学院, 甘肃 兰州 730010)

摘 要：研究了一类具有无穷时滞和瞬时脉冲的积微分方程的最优化控制问题. 利用分数幂算子、相空间理论、Gronwall 不等式和不动点定理得到了在空间解的存在性的充分条件, 然后使用最小化序列给出了积分成本函数的最优化控制的充分条件.

关键词： 最优控制; 无穷时滞; 瞬时脉冲; mild 解

DOI：10.13568/j.cnki.651094.651316. 2023.09.14.0001

中图分类号：O175 **文献标识码**：A **文章编号**：2096-7675(2024)03-0288-08

引文格式：何明霞, 王静. 具有无穷时滞的积微分方程的最优控制[J]. 新疆大学学报(自然科学版中英文), 2024, 41(3)：288-295.

英文引文格式：HE Mingxia, WANG Jing. Optimal control of integro-differential equations with infinite delay[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2024, 41(3)：288-295.

Optimal Control of Integro-Differential Equations with Infinite Delay

HE Mingxia, WANG Jing

(*School of Education, Lanzhou University of Arts and Science, Lanzhou Gansu 730010, China*)

Abstract： The optimal control problem for a class of integro-differential equations with infinite delay and instantaneous impulse is studied. By using fractional power operator, phase space theory, Gronwall's inequality and fixed point theorem, the sufficient conditions for the existence of solutions in space are obtained, and then the sufficient conditions for the optimal control of the integral cost function are given by using the minimization sequence.

Key words： optimal control; infinite delay; instantaneous impulse; mild solution

0 引 言

微分方程可以应用在很多领域, 如物理、生物、医学、金融等, 但是有时系统会出现滞后现象, 如在生物种群中个体的出生率以及在通讯中信息传递, 因此研究时滞微分方程更有实际价值和应用价值[1−2]. 另外, 由于受到一些外部条件的干扰, 会导致系统在有限个点不连续, 而脉冲方程能刻画这类方程[3−6]. 最优控制是有限 (无限) 维空间控制理论的一个重要问题, 时滞 (脉冲) 微分方程的最优控制具有重要的理论研究意义与实际应用价值. 近年来, 国内外许多学者对各种方程的最优化控制进行了一系列的研究. 随机偏微分方程在金融数学、量子场论和统计力学中有着广泛的应用. 具体来说, 在经济领域中用来解决期权定价问题; 在生物领域用于揭示疾病的发生规律以及疾病的传播流行过程; 在物理领域用于布朗粒子的逃逸与跃迁问题. 关于随机偏微分方程解的定性性质, 如存在唯一性、稳定性等, 已有报道. 特别的, 在文献 [1-3] 及其他学者所做的工作中, 随机偏泛函积分微分方程 mild 解的稳定性已被研究.

* **收稿日期**：2023-09-14

基金项目：兰州文理学院高水平研究成果培育项目科研基金“大数据背景下统计分析在经济领域的应用研究”(2022GSPYJ06).

作者简介：何明霞 (1982—), 女, 硕士, 讲师, 从事微分方程理论及其应用的研究, E-mail：66750744@qq.com.

Yang 等[3]利用两次最小化序列的方法讨论了具有瞬时脉冲的发展方程

$$\begin{cases} x'(t)=A(t)x(t)+f(t,x(t),G(t))+B(t)u(t),\ t\in J=[0,T],t\neq t_k, \\ \Delta x(t_k)=x(t_k^+)-x(t_k^-), \\ x(0)+g(x)=x_0. \end{cases}$$

的最优控制. Li 等[4]利用非紧性测度研究了具有有限时滞的二阶非局部脉冲问题

$$\begin{cases} x''(t)=Ax(t)+f(t,x_t(t),x(t)),\ t\in(0,T],t\neq t_k, \\ \Delta x(t_k)=x(t_k^+)-x(t_k^-), \\ x(t)=g(x(t))+\varphi(t),\ t\in[-r,0],x'(0)=\zeta. \end{cases}$$

解的存在性. Mokkedem 等[7]研究了具有无穷时滞的发展方程

$$\begin{cases} x'(t)=Ax(t)+L(x_t)+F(t,x_t)+Bu(t),\ t\in[0,T], \\ x(t)=\phi(t),\ t\in(-\infty,0]. \end{cases}$$

的最优化控制. 这里首先构造了线性系统的基本解理论, 在基本解理论的基础上得到 mild 解以及算子的紧性, 最后利用最小化序列的方法得到了该系统的最优控制的充分条件[8−10]. 在实际生活中, 受不稳定因素的影响, 会产生有限个不连续的点和滞后现象, 所以研究具有无穷时滞的脉冲方程有一定的现实意义.

受上述研究启发, 本文在 Banach 空间中研究一类具有无穷时滞和瞬时脉冲的积微分方程

$$\begin{cases} x'(t)=-Ax(t)+\displaystyle\int_0^t\gamma(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau+F(t,x_t)+Bu(t),\ t\in J=[0,T],t\neq t_k \\ \Delta x(t_k)=I_k(x(t_k)),\ k=1,\cdots,m \\ x(t)=\phi(t),\ t\in(-\infty,0] \end{cases}\tag{1}$$

的最优控制, 其中 $x(\cdot)\in X$ 是状态函数, $u(t)\in L^2(J;U)$ 是控制函数且 U 是另一个 Banach 空间. $A:D(A)\subset X\to X$ 是闭的线性算子, $-A$ 在 X 上生成一个解析半群. $\gamma(\cdot)$ 是一个闭线性算子, $D(\gamma)\supset D(A)$ 与时间无关. 由 $x_t(\theta)=x(t+\theta)$, $\theta\leq 0$ 得到的时滞 $x_t:(-\infty,0]\to X$ 属于某个具有公理化的抽象的相空间 Φ. $\phi(t)\in\Phi$. 脉冲函数 $I_k(x(t_k))=x(t_k^+)-x(t_k^-)$, 这里 $x(t_k^+)$ 和 $x(t_k^-)$ 分别表示在 $t=t_k$ 时 $x(t)$ 的右极限与左极限, $0=t_0<t_1<\cdots<t_m<t_{m+1}=T$. 函数 $F:J\times\Phi\to X$ 是 Lipschitz 连续的. $B:U\to X$ 是一个有界线性算子.

1 预备知识

这一部分给出预解算子、分数幂算子和相空间的公理化定义. 文中用 X 和 U 表示 Banach 空间赋予相同的范数 $\|\cdot\|$, 令 $-A:D(A)\subset X\to X$ 为一个紧的解析半群 $S(t)$, $t\geq 0$ 的无穷小生成元. 算子 A 的预解集为 $\rho(A)$, 分数幂算子 $A^\alpha(0<\alpha\leq 1)$ 为闭的线性算子, 在 $D(A^\alpha)$ 上定义范数为 $\|x\|_\alpha=\|A^\alpha x\|$. 定义 $(D(A^\alpha),\|\cdot\|_\alpha)$ 为 X_α 空间, 对每个 $0<\alpha\leq 1$, X_α 都是 Banach 空间.

若 $-A$ 的预解式 $R(\lambda,-A)=(\lambda I+A)^{-1}$ 是紧的, 则 $X_\alpha\to X_\beta(0<\beta<\alpha\leq 1)$ 嵌入是紧嵌入. Y 表示 Banach 空间 $D(A)$ 且赋予图像范数 $\|\cdot\|_Y$. 这里用 $L(X;Y)$ 表示从 X 到 Y 的所有有界算子构成的 Banach 空间, 特别的, $L(X)$ 表示从 X 到 X 的空间. 令 $PC(J;X)=\{x:J\to X|x$ 在 $t\neq t_k$ 处连续, $x(t_k)=x(t_k^-)$ 且 $x(t_k^+)$ 存在, $k=1,\cdots,m\}$, $PC(J;X)$ 是按照范数 $\|x\|_{PC}=\sup\limits_{t\in J}\|x(t)\|$ 构成的 Banach 空间.

定义 1[11] 一族有界的线性算子 $W(t)\in L(X)$, $t\in[0,T]$ 被称为方程

$$\begin{cases} x'(t)=-Ax(t)+\displaystyle\int_0^t\gamma(t-\tau)x(\tau)\mathrm{d}\tau,\ t\in[0,T] \\ x(0)=x_0 \end{cases}\tag{2}$$

的预解算子当且仅当

(i) $W(0)=I$, 对于每个 $W_1>0$, $\omega\in\mathbb{R}$ 有 $\|W(t)\|=W_1e^{\omega t}$;

(ii) 对所有的 $x\in X$, $W(t)x$ 是在 $t\in[0,T]$ 上的强连续;

(iii) 对 $t\geq 0$, $W(t)\in L(X)$ 且对所有 $x\in Y$, $W(\cdot)x\in C^1([0,+\infty];Y)\cap C([0,+\infty];Y)$ 有

$$W'(t)x=-AW(t)x+\int_0^t\gamma(t-\tau)W(\tau)x\mathrm{d}\tau=-W(t)Ax+\int_0^t W(t-\tau)\gamma(\tau)x\mathrm{d}\tau.$$

对算子 A 和 $\gamma(\cdot)$ 作出下列假设:

(V_1) $-A$ 生成 X 上的解析半群. $\gamma(\cdot)$ 是在 X 上的闭算子, 其定义域至少是 $D(A)$, 对每个 $x\in D(A)$, $\gamma(t)x$ 强可测并且 $\|\gamma(t)\|_Y\leq b(t)$, $b(t)\in L^1(0,\infty)$ 对每个 $\mathrm{Re}\lambda>0$, $b^*(\lambda)$ 绝对收敛 ($b^*(\lambda)$ 表示 $b(t)$ 的 Laplace 变换).

(V_2) $\rho(A):=(\lambda I+A-\gamma^*(\lambda))^{-1}$ 作为 X 上的一个有界算子存在, 对于 $0<\delta<\pi/2$, λ 在区域 $\Lambda=\{\lambda\in\mathbb{C},|\arg\lambda|<(\pi/2)+\delta\}$ 上. 在 Λ 上, 如果 $|\lambda|\geq\varepsilon>0$, 那么存在一个常数 $C=C(\varepsilon)>0$ 使得 $\rho(\lambda)\leq C/|\lambda|$.

(V_3) 对 $\lambda\in\Lambda$, $A\rho(\lambda)\in L(X)$ 将 Λ 解析为 $L(X)$, $\gamma^*(\lambda)\in L(Y;X)$, $\gamma^*(\lambda)\rho(\lambda)\in L(Y;X)$. 对于 $\lambda\in\Lambda$, 给定 $|\lambda|\geq\varepsilon>0$, 存在一个常数 $C=C(\varepsilon)>0$ 使得 $||A\rho(\lambda)||_Y+||\gamma^*(\lambda)\rho(\lambda)||_Y\leq C/|\lambda|$ 且在 Λ 上当 $|\lambda|\to\infty$ 时, $||\gamma^*(\lambda)||_Y\to 0$.

根据文献 [12] 可知, 在上述条件下, 存在一个由线性方程 (2) 得到的预解算子 $W(t)$, 满足 $W(0)=I$ 和

$$W(t)x=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}(\lambda I+A-\gamma^*(\lambda))^{-1}x\mathrm{d}\lambda,\ t>0,$$

这里 Γ 是用于获得解析半群的类型的轮廓, 轮廓 Γ (包含区域 Λ) 由 Γ_1, Γ_2, Γ_3 三部分组成, 这里 $\Gamma_1=\{re^{iv}:r>1\}$, $\Gamma_2=\{re^{-iv}:r\geq 1\}$, $\Gamma_3=\{e^{i\zeta}:-v\leq\zeta\leq v\}(\pi/2<v<\pi/2+\delta)$, 使得 $\mathrm{Im}(\lambda)$ 在 Γ_1, Γ_3 上增加. 因此, 线性方程 (2) 的 mild 解可以用预解算子 $W(t)$ 表示为 $x(t)=W(t)x(0)$. 此外, $W(t)$ 也是解析的并且存在一个 $S>0$, 使得对任意的 $0<\alpha\leq 1$,

$$||W(t)||\leq S,||A^\alpha W(t)||\leq\frac{S_\alpha}{t^\alpha},\ 0<t\leq T \tag{3}$$

下面给出相空间 Φ 的公理化定义[1]. 令相空间 Φ 为从 $(-\infty,0]$ 映射到 H 的线性空间, 赋予半范数 $||\cdot||_\Phi$ 且满足:

(A_1) 若 $x_t:(-\infty,\xi+T]\to X,T>0$, 在 $[\xi,\xi+T]$ 上是连续的并且 $x_\xi\in\Phi$, 则对每个 $t\in[\xi,\xi+T]$, 下列条件成立:

(i) $x_t\in\Phi$;

(ii) $||x(t)||\leq\Theta||x_t||_\Phi$;

(iii) $||x_t||_\Phi\leq K(t-\xi)\sup\{||x(\tau)||:\xi\leq\tau\leq t\}+M(t-\xi)||x_\xi||_\Phi$.

(A_2) 在 (A_1) 中的函数 $x(\cdot)$, x_t 在 $[\xi,\xi+T]$ 上是一个 Φ-值连续函数.

(A_3) 相空间 Φ 是完备的.

其中 $\Theta\geq 0$ 是一个常数, 函数 $K:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是连续的, 函数 $M:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 是局部有界的. 令 $K_T>0$ 和 $M_T>0$ 为两个常数, 定义为

$$K_T=\sup_{t\in[0,T]}K(t),\ M_T=\max_{t\in[0,T]}M(t) \tag{4}$$

其中函数 $K(\cdot)>0$ 和 $M(\cdot)>0$ 由 (A_1)(iii) 给出.

与文献 [12-13] 类似, 用上述定义的预解算子 $W(t)$ 表示方程 (1) 的 mild 解.

定义 2 如果 $x:(-\infty,T]\to X$ 满足

(i) 在 $t\in(-\infty,0]$ 上, $x(t)=\phi(t)$;

(ii) 在 $t=t_k$ 上, $\Delta x(t_k)=x(t_k^+)-x(t_k^-)=I_k(x(t_k))$;

(iii) 在 $t\in[0,t_1]\cup(t_k,t_{k+1}]$, $k=1,\cdots,m$ 上, 满足积分方程

$$x(t)=W(t)\phi(0)+\int_0^t W(t-s)(F(s,x_s)+Bu(s))\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<t}W(t-t_k)I_k(x(t_k)) \tag{5}$$

则称函数 $x:(-\infty,T]\to X$ 为方程 (1) 的 mild 解.

引理 1[14] (Schauder 不动点定理)　设 Ω 是 Banach 空间 X 中的一个凸闭子集, 算子 $T:\Omega\to\Omega$ 是全连续算子, 则算子 T 至少存在一个不动点 x^*, 使得 $Tx^*=x^*$.

控制函数 $u(t)\in L^2(J;U)$, 定义有界容许控制集合 $U_{ad}=\{u(\cdot)\in L^2(J;U):||u(t)||\le R,t\in J\}$, 其中 $R>0$. 令 $A_{ad}=\{(x_u,u):u\in U_{ad}\}$, 则 A_{ad} 被称为所有容许状态-控制对 (x_u,u) 构成的集合.

2　主要结果

为了证明方程 (1) mild 解的存在唯一性, 需要对函数 $F:J\times\Phi\to X$ 和 $I_k:X\to X$ 作出下列假设

(H_1) 函数 $F:J\times\Phi\to X$ 是连续的并且存在一个常数 $L_F>0$ 使得

$$||F(t,\phi_1)-F(t,\phi_2)||\le L_F||\phi_1-\phi_2||_\Phi,\ t\in[0,T],\phi_1,\phi_2\in\Phi.$$

更进一步有

$$||F(t,\phi)||\le L_F(1+||\phi||_\Phi),\ t\in[0,T],\phi\in\Phi.$$

(H_2) 脉冲函数 $I_k:X\to X,\ k=1,\cdots,m$ 是连续的并且满足

$$||I_k(x(t_k))||\le d_k,\ k=1,\cdots,m.$$

(H_3) $-A$ 的预解式 $R(\lambda,-A)=(\lambda I+A)^{-1}$ 是紧的.

定理 1　对于任意的 $\phi\in\Phi$. 若假设条件 $(H_1)\sim(H_3)$ 成立, 则方程 (1) 在 $(-\infty,T]$ 上至少有一个 mild 解 $x(t)$.

证明 对于任意的 $t\in[0,T]$, 定义一个算子 $Q:PC(J;X)\to PC(J;X)$ 为

$$Qx(t)=W(t)\phi(0)+\int_0^t W(t-s)(F(s,x_s)+Bu(s))\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<t}W(t-t_k)I_k(x(t_k)).$$

求方程 (1) 在 $t\in[0,T]$ 上的 mild 解的存在性等价于求算子 Q 的不动点, 因此令集合

$$B_r=\{x(\cdot)\in PC(J;X):u\in U_{ad},\phi(0)=x(0),||x||_{PC}\le r\},$$

显然 B_r 是 $PC(J;X)$ 的一个有界闭凸子集, 只要选择合适的 $r>0$ 使得

$$r>\Big(S||\phi(0)||+SL_FT+SL_FM_T||\phi||_\Phi+SRT||B||+S\sum_{k=1}^m d_k\Big)e^{SL_FK_TT}.$$

首先证明 $Q(B_r)\subset B_r$, 对 $\forall x\in B_r$, 根据式 (3) 和假设条件 (H_1), (H_2) 有

$$\begin{aligned}&||Qx(t)||\\ \le&||W(t)\phi(0)||+\int_0^t||W(t-s)(F(s,x_s)+Bu(s))||\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<t}||W(t-t_k)I_k(x(t_k))||\\ \le&S||\phi(0)||+SL_F\Big(T+\int_0^t||x_s||_\Phi\mathrm{d}s\Big)+SRT||B||+S\sum_{k=1}^m d_k\end{aligned}\tag{6}$$

由式 (4) 和公理化定义 (A_1)(iii) 可知

$$SL_F\Big(T+\int_0^t||x_s||_\Phi\mathrm{d}s\Big)\le SL_FT+SL_FK_T\int_0^t||x(s)||\mathrm{d}s+SL_FM_T||\phi||_\Phi\tag{7}$$

把式 (7) 带入式 (6), 再根据 Gronwall 不等式推出

$$\begin{aligned}&||Qx(t)||\\ \le&S||\phi(0)||+SL_FT+SL_FK_T\int_0^t||x(s)||\mathrm{d}s+SL_FM_T||\phi||_\Phi+SRT||B||+S\sum_{k=1}^m d_k\\ \le&\Big(S||\phi(0)||+SL_FT+SL_FM_T||\phi||_\Phi+SRT||B||+S\sum_{k=1}^m d_k\Big)e^{SL_FK_TT}<r,\end{aligned}$$

则 $||Qx||_{PC}\le r$, 因此 $Q(B_r)\subset B_r$.

然后证明 $Q:B_r\to B_r$ 是连续的. 令 $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}\subset B_r$ 是一个序列且在 B_r 上满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=x$. 所以对于任意的 $t\in[0,T]$, 由公理化定义 (A_1)(iii) 得到

$$||x_t^n-x_t||_\Phi\le K_T\sup_{t\in[0,T]}||x^n(t)-x(t)||\to 0,\ n\to\infty \tag{8}$$

由式 (3), 式 (8) 和假设条件 (H_1), (H_2) 可知

$$\begin{aligned}
&||Qx^n(t)-Qx(t)||\\
\le&\Big|\Big|\int_0^t W(t-s)(F(s,x_s^n)-F(s,x_s))\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<t}W(t-t_k)(I_k(x^n(t_k))-I_k(x(t_k)))\Big|\Big|\\
\le&\int_0^t ||W(t-s)(F(s,x_s^n)-F(s,x_s))||\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<t}||W(t-t_k)(I_k(x^n(t_k))-I_k(x(t_k)))||\\
\le&SL_FT||x_t^n-x_t||_\Phi+S\sum_{0<t_k<t}||(I_k(x^n(t_k))-I_k(x(t_k)))||\\
\to&0,n\to\infty
\end{aligned}\tag{9}$$

因此 $Q:B_r\to B_r$ 是连续的.

最后证明算子 Q 在 B_r 上是紧算子. 首先证明对每个 $t\in[0,T]$, 集合 $\{Qx(t):x\in B_r\}$ 在 X 上是相对紧的. 显然 $Qx(0)$ 是相对紧的, 下证 $Qx(t)$ 在 $t\in[0,T]$ 上是相对紧的. 令 $0<\varepsilon<t\le T$, 由假设条件 (H_3) 知预解算子 $-A$ 是紧的, 可以推出 $X_\alpha\to X(0<\alpha\le 1)$ 为紧嵌入. 对任意的 $x\in B_r$, $0<\alpha<\alpha_1\le 1$, 定义算子

$$\begin{aligned}
||Q^{\alpha_1}x(t)||=&W(t)\phi(0)+\int_0^t A^{\alpha_1}W(t-s)(F(s,x_s)+Bu(s))\mathrm{d}s\\
&+\sum_{0<t_k<t}A^{\alpha_1}W(t-t_k)I_k(x(t_k))
\end{aligned}\tag{10}$$

根据式 (3) 和上述讨论, 很容易得到 $||Q^{\alpha_1}x(t)||<\infty$. 由算子 $A^{-\alpha_1}:X\to X_{\alpha_1}$ (注意到 $X_{\alpha_1}\to X_\alpha$ 是紧嵌入) 的紧性可知 $Qx(t)$ 在 X_α 上是相对紧的. 因此得到对每个 $t\in[0,T]$, 集合 $\{Qx(t):x\in B_r\}$ 在 X 上是相对紧的. 然后证明 $Q(B_r)$ 在 B_r 上是等度连续的. 令 $0\le t'<t''\le T$, 对任意的 $x\in B_r$, 有

$$\begin{aligned}
&||Qx(t'')-Qx(t')||\\
\le&||W(t'')\phi(0)-W(t')\phi(0)||\\
&+\Big|\Big|\int_0^{t'}W(t''-s)F(s,x_s)\mathrm{d}s-\int_0^{t'}W(t'-s)F(s,x_s)\mathrm{d}s\Big|\Big|\\
&+\Big|\Big|\int_0^{t'}W(t''-s)Bu(s)\mathrm{d}s-\int_0^{t'}W(t'-s)Bu(s)\mathrm{d}s\Big|\Big|\\
&+\sum_{0<t_k<t}||(W(t''-t_k)-W(t'-t_k))I_k(x(t_k))||\\
\le&||W(t'')\phi(0)-W(t')\phi(0)||\\
&+\int_0^{t'}||(W(t''-s)-W(t'-s))F(s,x_s)||\mathrm{d}s+\int_{t'}^{t''}||W(t''-s)F(s,x_s)||\mathrm{d}s\\
&+\int_0^{t'}||(W(t''-s)-W(t'-s))Bu(s)||\mathrm{d}s+\int_{t'}^{t''}||W(t''-s)Bu(s)||\mathrm{d}s\\
&+\sum_{0<t_k<t}||(W(t''-t_k)-W(t'-t_k))I_k(x(t_k))||\\
=&\sum_{i=1}^{6}J_i
\end{aligned}\tag{11}$$

其中

$$\begin{aligned}
&J_1=||W(t'')\phi(0)-W(t')\phi(0)||\\
&J_2=\int_0^{t'}||(W(t''-s)-W(t'-s))F(s,x_s)||\mathrm{d}s\\
&J_3=\int_{t'}^{t''}||W(t''-s)F(s,x_s)||\mathrm{d}s\\
&J_4=\int_0^{t'}||(W(t''-s)-W(t'-s))Bu(s)||\mathrm{d}s\\
&J_5=\int_{t'}^{t''}||W(t''-s)Bu(s)||\mathrm{d}s\\
&J_6=\sum_{0<t_k<t}||(W(t''-t_k)-W(t'-t_k))I_k(x(t_k))||
\end{aligned}\tag{12}$$

因为 $W(t)x$ 对于所有的 $t\geq 0$ 是连续的 (文献 [13] 引理 2.3), 所以有 $\lim\limits_{t_2-t_1\to 0}J_1=\lim\limits_{t_2-t_1\to 0}J_6=0$. 根据假设条件 (H_1) 和公理化定义 (A_1)(iii) 可以推出, 对任意的 $0<\xi<t'$ 有

$$\begin{aligned}
J_2&=\int_0^{t'}||(W(t''-s)-W(t'-s))F(s,x_s)||\mathrm{d}s\\
&=\int_0^{t'-\xi}||(W(t''-s)-W(t'-s))F(s,x_s)||\mathrm{d}s+\int_{t'-\xi}^{t'}||(W(t''-s)-W(t'-s))F(s,x_s)||\mathrm{d}s\\
&\leq\Big(L_FT+L_FM_T||\phi||_\Phi+L_FK_TTr\Big)\int_0^{t'-\xi}||(W(t''-t'+\tau)-W(\tau))||\mathrm{d}\tau\\
&\quad+\int_{t'-\xi}^{t'}||(W(t''-s)-W(t'-s))F(s,x_s)||\mathrm{d}s;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_4&=\int_0^{t'}||(W(t''-s)-W(t'-s))Bu(s)||\mathrm{d}s\\
&=\int_0^{t'-\xi}||(W(t''-s)-W(t'-s))Bu(s)||\mathrm{d}s+\int_{t'-\xi}^{t'}||(W(t''-s)-W(t'-s))Bu(s)||\mathrm{d}s\\
&\leq R||B||\int_0^{t'-\xi}||(W(t''-t'+\tau)-W(\tau))||\mathrm{d}\tau+\int_{t'-\xi}^{t'}||(W(t''-s)-W(t'-s))Bu(s)||\mathrm{d}s;
\end{aligned}$$

再由 (H_3) 知 $W(t)$ 对 $t>0$ 是按一致算子拓扑连续的 (文献 [13] 引理 2.3). 因此当 $t''-t'\to 0$ 时, $||W(t''-t'+\tau)-W(\tau)||\to 0$, 根据 Lebesgue 控制收敛定理可知 $\lim\limits_{t_2-t_1\to 0}J_2=\lim\limits_{t_2-t_1\to 0}J_4=0$. 由式 (3), 公理化定义 (A_1)(iii) 和假设条件 (H_1) 知

$$J_3=\int_{t'}^{t''}||W(t''-s)F(s,x_s)||\mathrm{d}s\leq(L_F+L_FM_T||\phi||_\Phi+L_FK_Tr)|t''-t'|;$$

$$J_5=\int_{t'}^{t''}||W(t''-s)Bu(s)||\mathrm{d}s\leq SR||B|||t''-t'|;$$

因此 $\lim\limits_{t_2-t_1\to 0}J_3=\lim\limits_{t_2-t_1\to 0}J_5=0$. 综上, 当 $t''-t'\to 0$ 时, $||Qx(t'')-Qx(t')||\to 0$. 所以 $Q(B_r)$ 在 B_r 上是等度连续的.

由 Arzela-Ascoli 定理可知, $Q:B_r\to B_r$ 是紧算子. 再根据 Schauder 不动点定理可知, Q 至少有一个不动点 $x\in B_r$, 这个不动点就是方程 (1) 在 $t\in J$ 上的 mild 解. 然后利用 $x(t)=\phi(t),t\in(-\infty,0]$ 和 $\Delta x(t_k)=I_k(x(t_k))(k=1,\cdots,m)$ 可以把解延拓到 $(-\infty,T]$ 上.

方程 (1) mild 解的唯一性可以用著名的 Gronwall 不等式得到, 本文不再给出详细证明. 下面考虑限制 Lagrange 问题:

问题 1　找到一个控制 $u_0\in U_{ad}$ 使得 $J(x^{u_0},u_0)\leq J(x^u,u)$, 这里 $J(x^u,u)$ 表示积分成本函数, 定义为

$$J(x^u,u)=P_1(x(T))+\int_0^TP_2(s,x^u,u)\mathrm{d}s\tag{13}$$

为此, 作出下列假设:

(H_4) 函数 $P_1(\cdot):X\to\mathbb{R}$ 是连续的.

(H_5) 被积函数 $P_2:[0,T]\times X\times U\to\mathbb{R}$ 满足:

(i) $P_2(t,x,u)\in L^1(0,T)$;

(ii) $P_2(t,\cdot,\cdot)$ 在 $X\times U$ 上关于每个 $t\in[0,T]$ 是序列下半连续的, $P_2(t,x,\cdot)$ 在 U 上是凸连续的;

(iii) $P_2(t,x,u)\geq c$, c 为常数.

定理 2 若假设条件 $(\mathrm{H}_1)\sim(\mathrm{H}_5)$ 成立, 则问题 1 至少有一个解, 也就是说至少存在一个控制 $u_0\in U_{ad}$ 使得积分成本函数 $J(x^u,u)$ 最小, 其中 $x^u(t)$ 为方程 (1) 的解.

证明 我们假设 $\inf\limits_{u\in U_{ad}} J(x^u,u)=m<\infty$. 由最小化定义, 可以找到一组递减的序列 $\{(x^{u_n},u_n)\}_{n\geq 1}\in A_{ad}$ 满足 $n\to\infty$ 时,

$$J(x^{u_n},u_n)\to m \tag{14}$$

又因为 U_{ad} 是有界的, 所以 $\{u_n\}_{n\geq 1}\in U_{ad}$ 存在一个子列使得 $u_n\to u_0(n\to\infty)$. 根据 U_{ad} 是闭的凸的集合, 可知 $u_0\in U_{ad}$.

令 $x^{u_n}(t)$ 有带控制函数 u_n 的方程 (1) 的解, 满足

$$x^{u_n}(t)=W(t)\phi(0)+\int_0^t W(t-s)(F(s,x_s^{u_n})+Bu_n(s))\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<t}W(t-t_k)I_k(x^{u_n}(t_k)) \tag{15}$$

另一方面, $x^{u_0}(t)$ 有带控制函数 u_0 的方程 (1) 的解, 满足

$$x^{u_0}(t)=W(t)\phi(0)+\int_0^t W(t-s)(F(s,x_s^{u_0})+Bu_0(s))\mathrm{d}s+\sum_{0<t_k<t}W(t-t_k)I_k(x^{u_0}(t_k)) \tag{16}$$

又

$$\begin{aligned}
&||x^{u_n}(t)-x^{u_0}(t)||\\
\leq&\int_0^t ||W(t-s)(F(s,x_s^{u_n})-F(s,x_s^{u_0}))||\mathrm{d}s+\int_0^t ||W(t-s)(Bu_n(s)-Bu_0(s))||\mathrm{d}s\\
&+\sum_{0<t_k<t}||W(t-t_k)(I_k(x^{u_n}(t_k))-I_k(x^{u_0}(t_k)))||
\end{aligned} \tag{17}$$

与前面证明类似, 式 (17) 是相对紧的. 再根据式 (3) 和假设条件 (H_1), (H_2) 得到

$$\begin{aligned}
&||x^{u_n}(t)-x^{u_0}(t)||\\
\leq& SL_F\int_0^t ||x_s^{u_n}(t)-x_s^{u_0}(t)||_\Phi\mathrm{d}s+SR||B||\int_0^t ||u_n(s)-u_0(s)||\mathrm{d}s\\
&+S\sum_{0<t_k<t}||I_k(x^{u_n}(t_k))-I_k(x^{u_0}(t_k))||\\
\to& 0
\end{aligned} \tag{18}$$

因此在 $PC(J;X)$ 空间中, 当 $n\to\infty$ 时, $x^{u_n}\to x^{u_0}(n\to\infty)$.

下面证明状态-控制对 (x^{u_0},u_0) 是积分成本函数的最优解. 根据 Fatou 引理和假设条件 (H_4), (H_5) 可知

$$\liminf_{n\to\infty}P_1(x^{u_n}(T))=\lim_{n\to\infty}P_1(x^{u_n}(T))=P_1(x^{u_0}(T)) \tag{19}$$

$$\liminf_{n\to\infty}\int_0^T P_2(s,x^{u_n},u_n)\mathrm{d}s\geq\int_0^T\liminf_{n\to\infty}P_2(s,x^{u_n},u_n)\mathrm{d}s=\int_0^T P_2(s,x^{u_0},u_0)\mathrm{d}s \tag{20}$$

结合式 (19) 和式 (20) 可知,

$$
\begin{aligned}
m=\inf_{u\in U_{ad}}J(x^u,u)&=\liminf_{n\to\infty}P_1(x^{u_n}(T))+\liminf_{n\to\infty}\int_0^T P_2(s,x^{u_n},u_n)\mathrm{d}s\\
&\geq\lim_{n\to\infty}P_1(x^{u_n}(T))+\int_0^T\lim_{n\to\infty}P_2(s,x^{u_n},u_n)\mathrm{d}s\\
&=P_1(x^{u_0}(T))+\int_0^T P_2(s,x^{u_0},u_0)\mathrm{d}s\\
&=J(x_0,u_0)=m>-\infty
\end{aligned}
\tag{21}
$$

综上所述, 结论得证.

参考文献:

[1] HALE J K, KATO J. Phase space for retarded equations with infinite delay[J]. Funkcialaj Ekvacioj, 1978, 21(1): 11-41.

[2] HINO Y, MURAKAMI S, NAITO T. Functional differential equations with infinite delay[M]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1991.

[3] YANG H, ZHAO Y X. Existence and optimal controls of non-autonomous impulsive integro-differential evolution equation with nonlocal conditions[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2021, 148: 111027.

[4] LI F, WANG H W. An existence result for nonlocal impulsive second-order cauchy problems with finite delay[J]. Abstract and Applied Analysis, 2013, 2013: 724854.

[5] LIANG J, LIU J H, XIAO T J. Nonlocal impulsive problems for nonlinear differential equations in Banach spaces[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2009, 49(3/4): 798-804.

[6] ARORA S, MOHAN M T, DABAS J. Approximate controllability of the non-autonomous impulsive evolution equation with state-dependent delay in Banach spaces[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2021, 39: 100989.

[7] MOKKEDEM F Z, FU X L. Optimal control problems for a semilinear evolution system with infinite delay[J]. Applied Mathematics & Optimization, 2019, 79(1): 41-67.

[8] ZHOU J J, ZHANG Z F. Optimal control problems for stochastic delay evolution equations in Banach spaces[J]. International Journal of Control, 2011, 84(8): 1295-1309.

[9] WANG J R, ZHOU Y, MEDVEĎ M. On the solvability and optimal controls of fractional integrodifferential evolution systems with infinite delay[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2012, 152(1): 31-50.

[10] ZHU S G, FAN Z B, LI G. Optimal controls for riemann-liouville fractional evolution systems without lipschitz assumption[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2017, 174(1): 47-64.

[11] EZZINBI K, TOURE H, ZABSONRE I. Local existence and regularity of solutions for some partial functional integrodifferential equations with infinite delay in Banach spaces[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2009, 70(9): 3378-3389.

[12] GRIMMER R C, PRITCHARD A J. Analytic resolvent operators for integral equations in Banach space[J]. Journal of Differential Equations, 1983, 50(2): 234-259.

[13] FU X L, HUANG R. Existence of solutions for neutral integro-differential equations with state-dependent delay[J]. Applied Mathematics and Computation, 2013, 224: 743-759.

[14] PAZY A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations[M]. New York: Springer, 1983.

责任编辑: 赵新科