

基于动态梯形白化权函数的 DHGF 算法*

刘启函¹, 叶国菊^{1†}, 刘尉¹, 赵大方²

(1. 河海大学理学院, 江苏南京 210098; 2. 湖北师范大学数学与统计学院, 湖北黄石 435002)

摘要: 在 DHGF 算法中, 不同白化权函数的选择会产生不同的评估结果. 专家在确定函数类型上具有主观性, 针对结果会受到主观影响的问题, 基于中心点三角白化权函数, 构造动态梯形白化权函数, 增强结果客观性, 推广了经典 DHGF 算法. 该方法给出的评估值是区间形式, 有利于决策者清楚目标所在风险等级的概率, 提高评价准确性. 最后结合实例表明该方法的合理性和有效性.

关键词: 三角白化权函数; 动态梯形白化权函数; DHGF 算法

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2022.02.25.0002

中图分类号: N941.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2023)01-0023-07

引文格式: 刘启函, 叶国菊, 刘尉, 赵大方. 基于动态梯形白化权函数的 DHGF 算法[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2023, 40(1): 23-29.

英文引文格式: LIU Qihan, YE Guoju, LIU Wei, ZHAO Dafang. A DHGF algorithm based on dynamic trapezoid whiten weight functions[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2023, 40(1): 23-29.

A DHGF Algorithm Based on Dynamic Trapezoid Whiten Weight Functions

LIU Qihan¹, YE Guoju¹, LIU Wei¹, ZHAO Dafang²

(1. College of Science, Hohai University, Nanjing Jiangsu 210098, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Hubei Normal University, Huangshi Hubei 435002, China)

Abstract: The selection of different whiten weight functions produces different evaluation results in the DHGF algorithm. Experts have subjectivity in determining the function type. For the problem that the result will be subjectively affected, the dynamic trapezoid whiten weight function is constructed in this paper based on the center point triangular whiten weight function, which is used to enhance the objectivity of the result, and promote the classical DHGF algorithm. The evaluation value given by this method is in the form of intervals, which is beneficial for the decision makers to know the probability of the risk level at which the target is located and improve the accuracy of evaluation. Finally, an instance is given to verify the effectiveness and rationality of the method.

Key words: triangle whiten weight function; dynamic trapezoid whiten weight function; DHGF algorithm

0 引言

DHGF (Delphi Hierarchy Grey Fuzzy) [1]算法是在灰色理论、模糊数学的基础上, 结合改进的德尔菲法(Delphi)、层次分析法(AHP)、灰色理论评价方法、模糊综合评价方法的长处, 将开放性和复杂性的信息先定性再定量的综合集成, 较好地解决了由于指标信息的非完备性和不确定性而无法进行精确评价的问题. DHGF 算法实际运用非常广泛, 尤其是在风险评估[2-5]和安全性评价[6-7]方面, 然而 DHGF 算法中带有专家的主观因素, 所以研究者为了得到更好的评价结果, 会根据现有的方法对 DHGF 算法进行改进, 以尽量减少专家主观因素带来的影响, 如陈士涛[2]等基于 DHGF 算法对装备研制风险进行评估时, 引入三角模糊数, 以此避免专家对指标赋值时出现信息丢失; 刘桐渤[7]运用熵权法改进 DHGF 算法中的权重, 并结合物元法对水库大坝安全形态进行评价, 保证了评价结果的客观性和准确度; 谢亚丹[8]结合层次分析法和熵权法计算各指标综合权重, 将原

* 收稿日期: 2022-02-25

基金项目: 湖北省教育厅重点项目“时标上空间离散型分数阶偏动力方程的定性研究”(D20192501); 国家冰川冻土沙漠科学数据中心项目“基于区间数学理论的渭河河流健康评价”(2021kf03).

作者简介: 刘启函(1998-), 女, 硕士生, 从事模糊数学多目标决策的研究, E-mail: 1102550310@qq.com.

† 通讯作者: 叶国菊(1965-), 女, 博士, 教授, 博士生导师, 从事泛函分析、数学与交叉学科的研究, E-mail: yegj@hhu.edu.cn.

算法改为五元集成法,对智能制造能力成熟度作出评价;董威^[4]等基于组合数的 OWA 算子赋权法计算指标权重,在高速公路 PPP 项目中对融资风险作出评价.上述方法相对于传统 DHGF 算法,评价结果的准确性有所提高.

另一方面,不同背景下需要选择不同的白化权函数类型,而不同的白化权函数类型会得到不同的评价结果.1993年,刘思峰^[9]等首次提出基于端点三角白化权函数的灰色聚类评估模型,用该模型对河南省经济进行有效评估.其中,端点三角白化权函数发挥着关键作用,一定程度上决定了聚类结果.由于评价结果良好,以致后来三角白化权函数在装备研制风险评估^[10]、安全评价^[11-12]、城市交通^[13]等实际问题中得到广泛运用.之后,张松滨^[14]等在1994年利用共原点的方法通过构造白化权函数对环境质量进行评价.刘思峰^[15-16]等对已有的端点型三角白化权函数进行改进,构建了一类中心点三角白化权函数,经过对比,发现中心点比端点的三角白化权函数对灰类的把握和判定更精准,得到的评估结果也更加科学可靠.王化中^[17]等在2014年基于已有的纯中心点三角白化权函数,构建了一类混合型中心点三角白化权函数,并且证明混合型中心点三角白化权函数满足规范性,比纯中心点更加合理.2016年,冉宝峰^[18]等构建梯形白化权函数对飞机进行保障性灰色评估,很好地解决了相邻的若干类别对该类别聚类中心的影响问题.2017年,Ma^[13]等对城市绿色交通的评估中,将中心点三角白化权函数和熵权-AHP方法结合,得到了较好的评价结果.同年,罗党^[19]等构造白化权函数已知的区间灰数预测模型,将其应用于黄河某站的凌期日均流量预测,专家可根据预测结果,合理地调整方案.自刘思峰等提出基于三角白化权函数的灰色聚类评估模型后,三角白化权函数成为管理评估中的关键,不仅是灰色聚类的关键步骤,也是 DHGF 算法中的关键步骤.

由以往的研究发现,在不同的实际背景下,专家会选择不同类型的白化权函数,然而并未说明确定函数类型的理由,如文献[18]中未阐述为什么选择梯形白化权函数,同时文献也没有证明构造梯形白化权函数的合理性.因此,在确定白化权函数类型上会受到专家主观因素的影响,于是如何减弱专家主观因素带来的影响成为一个重要的问题.

根据对三角白化权函数的研究,本文基于中心点三角白化权函数,引入参数,构造动态梯形白化权函数.该模型通过参数变化,可以实现由三角白化权函数向梯形白化权函数的动态调整,避免专家主观对白化权函数类型的选择,同时最终的综合评价以区间形式呈现,评估结果更具客观性.

1 基于动态梯形白化权函数的 DHGF 算法

对 DHGF 算法的改进已经有大量的研究,多数是在求取权重这一步骤进行改善,比如运用熵权法来降低专家主观带来的影响、采用三角模糊数将专家的评价模糊化后计算权重等,这些方法的改进效果是明显的.而对于在不同背景下,如何采取适当的白化权函数类型降低主观对评价结果的不利影响成为关键问题,因此,本文重点对白化权函数进行改进,推广经典 DHGF 算法,以此降低专家主观选择的影响,使最终评价结果更为客观.本节主要基于经典 DHGF 算法,将传统的三角白化权函数改进为动态梯形白化权函数,以下为其步骤:

步骤 1 根据分析专家意见等,结合德尔菲法,确定信息系统评价指标集: $O = \{O_1, O_2, \dots, O_n\}$.

步骤 2 由各种求取权重的方法,求出指标权重,归一化处理后,因素权重向量为:

$$\omega_i = \sum_{j=1}^n O'_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{O_{ij}}{\sum_{i=1}^n O_{ij}}, (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

步骤 3 专家对指标进行评价,假设有 m 位专家参加评价过程,有 n 个评价指标,若第 $i(i = 1, 2, \dots, m)$ 位专家对第 $j(j = 1, 2, \dots, n)$ 个指标的评价量样本为 d_{ij} ,则全部专家对评价指标的评价数据构成的样本量矩阵为 $D = (d_{ij})_{m \times n}$.

步骤 4 评价等级划分,一般可分为若干级别.用 V_k 表示第 $k(k = 1, 2, \dots, s)$ 个评价标准, s 是评价标准总数,按照评价要素的具体情况,建立评价等级 $V = (V_1, V_2, \dots, V_s)$.

步骤 5 对中心点三角白化权函数进行改进,首先,将原中心点三角白化权函数中对应于灰类 1 和灰类 s 的三角白化权函数分别取为下限测度白化权函数和上限测度白化权函数,能够避免将各聚类指标的取值范围向左、右延拓的困扰;其次,按照评估要求所需划分的灰类数 s ,分别确定灰类 $k(k = 1, 2, \dots, s)$ 的中心点,设中心点分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s, [\lambda_k - t, \lambda_k + t]$ 内的白化权函数值为 1, t 为参数,其中 $0 \leq t \leq \min\{|\lambda_{k+1} - \lambda_k|, k = 1, 2, \dots, s-1\}$;

然后, 确定灰类的动态梯形白化权函数 $f_j^k(x)$, 同时连接 $(\lambda_k - t, 1)$ 与 $(\lambda_{k-1}, 0)$ 以及 $(\lambda_k + t, 1)$ 与 $(\lambda_{k+1}, 0)$, 得到了指标 j 关于灰类 k 的三角白化权函数 $f_j^k(x) (j=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, s)$. 对于 $f_j^1(x)$ 和 $f_j^s(x)$, 分别令 $[0, \lambda_1]$ 、 $[\lambda_s, +\infty]$ 内的函数值为 1. 动态梯形白化权函数的一般形式如图1所示.

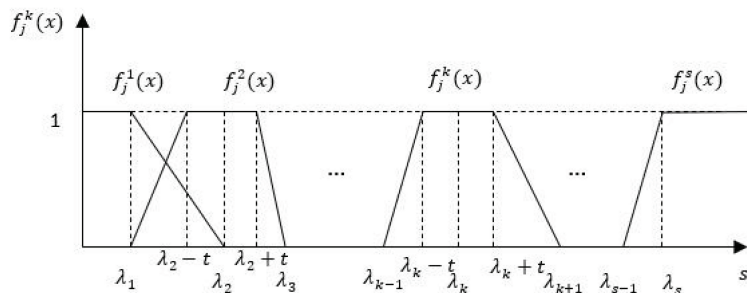


图 1 动态梯形白化权函数图像

对于指标 j 的一个实际值 x , 可分别由公式 (2) ~ (4) 计算出其属于灰类 $k (k=1, 2, \dots, s)$ 的白化权函数 f_j^k :

$$f_j^1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \lambda_1] \\ \frac{x - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, & x \in (\lambda_1, \lambda_2] \\ 0, & x \notin [0, \lambda_2] \end{cases}, \quad k = 1 \quad (2)$$

$$f_j^{s-1}(x) = \begin{cases} \frac{x - \lambda_{k-1}}{\lambda_k - \lambda_{k-1} - t}, & x \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k - t) \\ 1, & x \in [\lambda_k - t, \lambda_k + t] \\ \frac{x - \lambda_{k+1}}{\lambda_k - \lambda_{k+1} + t}, & x \in (\lambda_k + t, \lambda_{k+1}] \\ 0, & x \notin [\lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}] \end{cases}, \quad k = 2, 3, \dots, s-1 \quad (3)$$

$$f_j^s(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\lambda_s, +\infty) \\ \frac{x - \lambda_{s-1}}{\lambda_s - \lambda_{s-1}}, & x \in [\lambda_{s-1}, \lambda_s] \\ 0, & x \notin [\lambda_{s-1}, +\infty) \end{cases}, \quad k = s \quad (4)$$

其中: $0 \leq t \leq \min\{|\lambda_{k+1} - \lambda_k|, k=1, 2, \dots, s-1\}$.

代入观测值 x_{ij} , 可以得到指标 j 关于灰类 k 的梯形白化权的动态模型:

$$g(t) = f_j^k(x), 0 \leq t \leq \min\{|\lambda_{k+1} - \lambda_k|, k=1, 2, \dots, s-1\}.$$

运用灰色统计方法, 由各评价标准函数 (灰数的白化权数) 求出 d_{ij} 属于 k 评价标准的权 $f_k(d_{ij}) (k=1, 2, \dots, s)$, 据此求出判断矩阵的灰色统计数 n_{ik} 和总灰色统计数 n_i , 如式 (5) ~ (6) 所示:

$$n_{ik} = \sum_{j=1}^n f_k(d_{ij}) \quad (5)$$

$$n_i = \sum_{k=1}^s n_{ik} \quad (6)$$

步骤 6 综合 m 位专家对第 i 个评价因素主张第 j 种评价标准的灰色评估权值 $r_{ik} = \frac{n_{ik}}{n_i}$. 由 r_{ik} 构造灰色权矩阵, 即单因素模糊矩阵 $R = (r_{ik})_{n \times s}$.

步骤 7 根据评价指标矩阵和灰色权矩阵计算可得模糊综合评判矩阵 $B = (b_1, b_2, \dots, b_n) = W \cdot R$, 归一化处理使得 $\sum_{i=1}^n b_i = 1$, 从而计算综合评价的结果为

$$Z = B \cdot V^T = (W \cdot R) \cdot V^T.$$

根据最大隶属原则, 求出最终的评价结果.

最终计算综合评价的结果 Z 是关于 t 的函数, 记为 $Z(t)$, 当 t 在一定范围内变化时, $Z(t)$ 有范围, 即最终的评价结果是区间, 故决策者根据划分等级, 可以清楚地知道目标评估结果.

注 1 易知当 $t=0$ 时, 动态梯形白化权函数为混合型中心点三角白化权函数, 即三角白化权函数是该模型的特殊情形.

注 2 该模型避免了白化权函数是否满足规范性, 就是由于当 t 在一定范围内变化时, 动态梯形白化权函数也是在不断变化的, 此时的过程一定包含满足规范性要求的函数.

注 3 在不同的实际背景下, 本文的模型可以避免专家主观选择模型对评价结果产生的影响. 决策者通过本文中的模型, 求得的评估值为一个区间, 可以知道评价目标最终所处等级的概率.

2 实例分析

文献 [2] 是对装备研制风险作出可靠评价, 从而对装备研制进行有效的风险管理, 现以文献 [2] 中的实例进行分析.

步骤 1 利用改进的德尔菲法确定了 6 个一级指标和 12 个二级指标, 如图 2 所示.

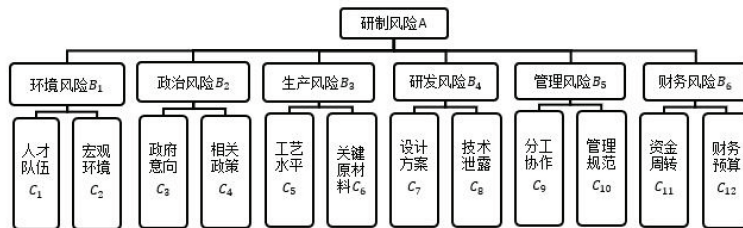


图 2 装备研制风险评价指标体系

步骤 2 构造三角模糊数风险判断矩阵, 根据三角模糊数的排序方法计算各指标的权重, 见表 1、表 2.

表 1 因素 B 的权重值

因素 B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
权重 P	0.059	0.088	0.324	0.176	0.235	0.118

表 2 因素 C 的权重值

因素 C	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}
权重 P	0.75	0.25	0.25	0.75	0.75	0.25	0.5	0.5	0.75	0.25	0.5	0.5

步骤 3 研制风险划分为研制风险很小、研制风险小、研制风险一般和研制风险大 4 个指标等级, 分别赋值 1、2、3、4 分, 同时在介于两相邻指标之间加上 3 个指标等级, 相应评分为 1.5、2.5、3.5 分; 并由 8 个专家对各评价指标评分, 得到某型装备研制风险的评估矩阵 $D = (d_{ij})_{12 \times 8}$, 具体数据如下:

$$D = (d_{ij})_{12 \times 8} = \begin{bmatrix} 2.5 & 3 & 2.5 & 2.5 & 2.5 & 2.5 & 2 & 2 \\ 3 & 2.5 & 2 & 2 & 2 & 1.5 & 2 & 2.5 \\ 3.5 & 3 & 3 & 3.5 & 3 & 2.5 & 3 & 3.5 \\ 3 & 2.5 & 2.5 & 3 & 2.5 & 2.5 & 2.5 & 3.5 \\ 2.5 & 3 & 3 & 3 & 2.5 & 3 & 1.5 & 2.5 \\ 3.5 & 3.5 & 2.5 & 3.5 & 3 & 3.5 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2.5 & 3.5 & 3 & 2.5 & 3.5 \\ 3 & 3.5 & 3 & 2.5 & 3 & 3.5 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2.5 & 2.5 & 2.5 & 2.5 \\ 3.5 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1.5 & 3 & 3.5 \\ 3 & 2.5 & 3.5 & 3 & 1.5 & 2 & 2.5 & 2.5 \\ 3.5 & 3 & 2.5 & 1.5 & 3 & 1.5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

步骤 4 按照要求,划分 4 个评价等级 $V = (1, 2, 3, 4)$.

步骤 5 确定灰类的等级数为 4,运用本文提出的动态梯形白化权函数,进行计算评估灰类值,该函数具体如下:

第一级(研制风险很小),灰类中心点为 1,白化权函数为:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 2-x, & x \in (1, 2]; \\ 0, & x \notin [0, 2] \end{cases}$$

第二级(研制风险小),灰类中心点为 2,梯形白化权函数为:

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{x}{2-t}, & x \in [0, 2-t] \\ 1, & x \in (2-t, 2+t); \\ \frac{x-4}{t-2}, & x \in [2+t, 4] \\ 0, & x \notin [0, 4] \end{cases};$$

第三级(研制风险一般),灰类中心点为 3,梯形白化权函数为:

$$f_3(x) = \begin{cases} \frac{x}{3-t}, & x \in [0, 3-t] \\ 1, & x \in (3-t, 3+t); \\ \frac{x-6}{t-3}, & x \in [3+t, 6] \\ 0, & x \notin [0, 6] \end{cases};$$

第四级(研制风险大),灰类中心点为 4,白化权函数为:

$$f_4(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, & x \in [0, 4] \\ 1, & x \in (4, +\infty); \\ 0, & x \notin [0, +\infty) \end{cases}$$

其中: $0 \leq t \leq 1$.

由于我们引入参数 t ,那么在接下来得出的各类结果中,均是含 t 的表达式,根据 t 的范围,则结果是区间形式.

根据式(5)~(6),对评估指标 C_1 属于每个评估灰类的系数为

$$n_{11} = 0, \quad n_{14} = \frac{39}{8};$$

$$n_{12} = \begin{cases} 2 - \frac{17}{2(t-2)}, & 0 \leq t \leq 0.5 \\ 7 - \frac{1}{t-2}, & 0.5 \leq t \leq 1 \end{cases}, \quad n_{13} = \begin{cases} 1 - \frac{33}{2(t-3)}, & 0 \leq t \leq 0.5 \\ 6 - \frac{4}{t-3}, & 0.5 \leq t \leq 1 \end{cases};$$

则总灰色评估数为

$$n_1 = \begin{cases} \frac{63}{8} - \frac{17}{2(t-2)} - \frac{33}{2(t-3)}, & 0 \leq t \leq 0.5 \\ \frac{143}{8} - \frac{1}{t-2} - \frac{4}{t-3}, & 0.5 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

其余 11 个指标类似计算.

步骤 6 根据公式 $r_{ik} = \frac{n_{ik}}{n_i}$,结合上述函数表达式,可以得到动态灰色评估矩阵 $R = (r_{ik})_{12 \times 4}$,如: $r_{11} = 0$,

$$r_{12} = \begin{cases} \frac{16t^2 - 148t + 300}{63t^2 - 515t + 846}, & 0 \leq t \leq 0.5 \\ \frac{56t^2 - 288t + 360}{143t^2 - 755t + 946}, & 0.5 < t \leq 1 \end{cases},$$

$$r_{13} = \begin{cases} \frac{8t^2 - 172t + 312}{63t^2 - 515t + 846}, & 0 \leq t \leq 0.5 \\ \frac{48t^2 - 272t + 352}{143t^2 - 755t + 946}, & 0.5 < t < 1 \end{cases},$$

$$r_{14} = \begin{cases} \frac{39t^2-195t+234}{63t^2-515t+846}, & 0 \leq t \leq 0.5 \\ \frac{39t^2-195t+234}{143t^2-755t+946}, & 0.5 < t \leq 1 \end{cases}$$

其余指标类似计算.

步骤 7 计算模糊综合评估矩阵, 由 MATLAB 可实现, 得到最终的装备研制风险关于参数 t 的动态综合评价函数 $Z(t)$:

当 $0 \leq t < 0.5$ 时, 有

$$\begin{aligned} z(t) = & \frac{33(28t^2-205t+318)}{1\ 250(3t^2-25t+42)} + \frac{22(33t^2-217t+318)}{125(19t^2-135t+210)} + \frac{141(17t^2-110t+162)}{200(19t^2-135t+214)} \\ & + \frac{59(15t^2-100t+147)}{125(39t^2-271t+414)} + \frac{243(67t^2-429t+630)}{500(39t^2-271t+426)} + \frac{11(37t^2-229t+324)}{125(41t^2-273t+410)} \\ & + \frac{177(53t^2-398t+618)}{1\ 000(63t^2-515t+846)} + \frac{59(58t^2-405t+612)}{250(69t^2-521t+834)} + \frac{81(65t^2-434t+630)}{250(73t^2-525t+802)} \\ & + \frac{59(58t^2-399t+588)}{1\ 000(79t^2-555t+838)} + \frac{44(79t^2-470t+654)}{125(89t^2-565t+834)} + \frac{141(26t^2-153t+212)}{200(91t^2-567t+830)}, \end{aligned}$$

当 $0.5 \leq t \leq 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} z(t) = & \frac{141(27t-58)}{200(35t-78)} + \frac{33(56t-117)}{250(37t-79)} + \frac{11(51t-113)}{125(61t-144)} + \frac{44(101t-226)}{125(121t-290)} \\ & + \frac{22(51t^2-268t+339)}{125(33t^2-176t+227)} + \frac{59(43t^2-241t+315)}{250(63t^2-353t+464)} + \frac{243(102t^2-535t+678)}{500(69t^2-367t+474)} \\ & + \frac{47(95t^2-508t+660)}{200(119t^2-655t+882)} + \frac{81(99t^2-523t+666)}{250(121t^2-653t+854)} + \frac{59(83t^2-476t+624)}{1\ 000(123t^2-699t+914)} \\ & + \frac{59(99t^2-526t+666)}{250(137t^2-733t+938)} + \frac{177(103t^2-543t+678)}{1\ 000(143t^2-755t+946)}. \end{aligned}$$

根据 t 的范围 $0 \leq t \leq 1$, 可得

$$2.859 \leq Z(t) \leq 3.010.$$

由风险等级划分可知, 该型装备的研制风险有 93% 的概率属于第二等级 (即研制风险小), 有 7% 的概率属于第三等级 (即研制风险一般), 是有一定风险的研制项目, 在装备研制过程中需要规避风险.

文献 [2] 直接运用的是中心点白化权函数, 最后计算模糊综合评估值为 3.010 2, 即研制风险值为 3.010 2, 对比等级评分, 可知该装备研制风险是一般偏上水平.

本文模型求得的结果包含文献 [2] 的结果, 并且还能使决策者了解到装备的研制风险处于具体风险等级的概率, 结果更加精确合理, 也证实了混合型中心点三角白化权函数是动态梯形白化权函数的一种特殊情况, 因此提出的动态梯形白化权函数模型用来改进 DHGF 算法是有效的、合理的.

3 结论

在研究 DHGF 算法时, 发现不同白化权函数类型的选取, 对最终的评价结果有一定的影响, 因此为了避免专家主观选取的类型产生的影响, 本文就如何构建白化权函数模型进行研究. 在灰色评估中, 三角白化权函数运用最广, 对灰色区间的把握和判定更精准, 得到的评估结果也更加科学可靠, 所以本文是基于中心点三角白化权函数, 引入参数 t , 构建动态梯形白化权函数, 当 $t=0$ 时, 该模型就是混合型中心点三角白化权函数, 避免了白化权函数是否满足规范性这一性质讨论, 即必然满足规范性. 再将构建的模型运用至 DHGF 算法中, 验证了其可以提高评价结果的准确性.

参考文献:

- [1] SUN Q S, CHANG J F. DHGF theory based on the concrete bridge safety evaluation methods[J]. Advanced Materials Research, 2011, (243/244/245/246/247/248/249): 1774-1782.

- [2] 陈士涛, 杨建军, 张志峰, 等. 基于 DHGF 算法和三角模糊数的装备研制风险评价[J]. 中国安全科学学报, 2010, 20(8): 54-58.
- [3] 沈瑛, 张树平. 基于 DHGF 集成法的锅炉火灾风险评价[J]. 消防科学与技术, 2016, 35(9): 1323-1326.
- [4] 董威, 路铁军. 基于 DHGF 的高速公路 PPP 项目融资风险评价[J]. 工程经济, 2020, 30(10): 48-51.
- [5] ZHU W L, DING L C, XU S L, et al. A study on the reconnaissance efficiency of the radar countermeasure equipment based on the DHGF algorithm[C]//2020 IEEE International Conference on Artificial Intelligence and Computer Applications (ICAICA). Dalian: IEEE, 2020.
- [6] 侯丽, 邢精连, 杨帆, 等. 基于改进 DHGF 算法与物元理论的大坝安全评价模型研究[J]. 水利规划与设计, 2020, 2: 83-87.
- [7] 刘桐渤. 庄河市朱隈水库大坝安全综合评价[J]. 水利科学与寒区工程, 2020, 3(6): 81-84.
- [8] 谢亚丹. 基于 DHGF 算法的智能制造能力成熟度评价研究[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2019.
- [9] 刘思峰, 朱永达. 区域经济评估指标与三角隶属函数评估模型[J]. 农业工程学报, 1993, 9(2): 8-13.
- [10] 闫宝会, 刘晓东, 吴诗辉, 等. AHP 和三角白化权函数的武器装备研制技术风险评估[J]. 火力与指挥控制, 2016, 41(1): 178-181.
- [11] 童沁妍, 琨在武, 肖芳, 等. 基于三角白化权函数的灾害综合治理能力评估模型构建研究[J]. 江苏科技大学学报(自然科学版), 2021, 35(3): 69-74.
- [12] 江雨欣, 郭湛, 王高磊, 等. 基于三角白化权函数聚类的高速铁路外部环境安全评价研究[J]. 铁道运输与经济, 2021, 43(6): 104-110+118.
- [13] MA F, HE J, MA J P, et al. Evaluation of urban green transportation planning based on central point triangle whiten weight function and entropy-AHP[J]. Transportation Research Procedia, 2017, 25: 3638-3648.
- [14] 张松滨, 马晓波. 环境质量评价中的共原点灰色聚类法[J]. 化工环保, 1994, 14(5): 305-309.
- [15] 刘思峰, 谢乃明. 基于改进三角白化权函数的灰评估新方法[J]. 系统工程学报, 2011, 26(2): 244-250.
- [16] LIU S F, FORREST J, YANG Y J. A summary of the progress in grey system research[C]//Proceedings of 2013 IEEE International Conference on Grey Systems and Intelligent Services(GSIS). Macau: IEEE, 2013.
- [17] 王化中, 强凤娇, 贺宝成. 基于改进的中心点三角白化权函数灰评估新方法[J]. 统计与决策, 2014, 8: 69-72.
- [18] 冉宝峰, 徐常凯, 张英锋, 等. 基于端点梯形白化权函数的飞机保障性灰色评估[J]. 火力与指挥控制, 2016, 41(9): 118-122+127.
- [19] 罗党, 李钰雯, 林培源. 基于白化权函数的区间灰数预测模型[J]. 数学的实践与认识, 2017, 47(8): 167-175.

责任编辑: 赵新科

(上接第 22 页)

- [13] ÓLAFSSON G, ØRSTED B. The holomorphic discrete series for affine symmetric spaces, I[J]. Journal of Functional Analysis, 1988, 81(1): 126-159.
- [14] HELGASON S. Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces[M]. Boston: Academic Press, 1978.
- [15] HECKMAN G, SCHLICHTKRULL H. Harmonic analysis and special functions on symmetric spaces[M]. Boston: Academic Press, 1994.
- [16] MATSUMOTO S. Discrete series for an affine symmetric space[J]. Hiroshima Mathematical Journal, 1981, 11: 291-301.
- [17] AHMETNIYAZ A, TURDEBEK N B. Group von Neumann algebra[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition), 2014, 31(1): 33-39.
- [18] YAN C. MAP of free group Fourier algebras with Haagerup measures[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition), 2017, 34(4): 386-389.

责任编辑: 赵新科