笛卡儿积图的2-hued列表染色*

刘丙雪, 刘凤霞†

(新疆大学 数学与系统科学学院，新疆 乌鲁木齐 830017)

摘　要：给定图G的一个列表分配L, 图G的一个(L,r)-染色, 是一个正常染色c满足: 每个顶点v都至少和$\min\{d(v),r\}$种不同颜色的顶点相邻, 并且$c(v)$属于$L(v)$. 图G的r-hued列表染色数, 记为$\chi_{L,r}(G)$, 是最小正整数k满足对于任意一个$|L(v)|=k$的列表分配L, 图G有一个(L,r)-染色. 最后证明了$\chi_{L,2}(P_m\Box P_n)=4$, 并且确定了$\chi_{L,2}(P_m\Box C_n)$的范围.

关键词： 路; 圈; 笛卡儿积图; 2-hued列表染色

DOI：10.13568/j.cnki.651094.651316. 2022.01.22.0004

中图分类号：O157.5　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**2096-7675(2023)01-0030-06

引文格式: 刘丙雪, 刘凤霞. 笛卡儿积图的2-hued列表染色[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2023, 40(1): 30-35.

英文引文格式： LIU Bingxue, LIU Fengxia. On 2-hued list coloring of cartesian product graphs[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2023, 40(1): 30-35.

On 2-Hued List Coloring of Cartesian Product Graphs

LIU Bingxue, LIU Fengxia

(*School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China*)

Abstract： For a given list assignment L of a graph G, an (L,r)-coloring of G is a proper coloring c such that for any vertex v, v is adjacent to vertices of at least $\min\{d(v),r\}$ different colors with $c(v)\in L(v)$. The r-hued list chromatic number of G, denoted as $\chi_{L,r}(G)$, is the least integer k, such that for any $v\in V(G)$, and every list assignment L with $|L(v)|=k$, G has an (L,r)-coloring. In this paper, we prove that $\chi_{L,2}(P_m\Box P_n)=4$, and determine the range of $\chi_{L,2}(P_m\Box C_n)$.

Key words： paths; cycles; Cartesian product of graphs; 2-hued list coloring

0　引 言

本文所有涉及到的定义和符号, 参见文献[1]. Montgomery[2]首次提出了r-hued染色概念, 设r为正整数, 图G的(k,r)-染色是一个映射$c:V(G)\to\{1,2,\cdots,k\}$, 满足:

(i) 若v_1, $v_2\in V(G)$, $v_1v_2\in E(G)$, 则$c(v_1)\neq c(v_2)$;

(ii) 对于任意顶点$v\in V(G)$, $|c(N_G(v))|\geq\min\{|N_G(v)|, r\}$.

使图G染色有(k,r)-染色的最小整数k, 称为图G的(k,r)染色数, 记为$\chi_r(G)$. Lai等[3]将2-hued染色称为动态染色; Chen等[4]提出了r-hued列表染色, 图G的一个列表是指一个分配$L:V(G)\to 2^N$, 使得$V(G)$中任意的顶点都有一个颜色的列表$L(v)$. 一个L-染色是一个映射$c:V(G)\to N$, 满足相邻顶点染色不同, 且v的颜色是$L(v)$中选取的. 若图G有一个L-染色, 则称图G是L-可染的. 对于正整数k, 图G的列表L称为k-列表, 是指$V(G)$中每个顶点的列表$L(v)$都有k个元素, 即$|L(v)|=k$. 图G的一个列表L称为k-列表可染的, 是指任意一个k-列表L, 图G都是L-可染的. 使图G是k-列表可染的最小正整数k, 称为图G的列表染色数, 记为$\chi_L(G)$.

设r是一个整数, 给定图G的一个列表分配L, 图G的(L,r)-染色c是指满足以下条件的一个映射$c:V(G)\to N$.

(i) $\forall\ uv\in E(G)$, $c(u)\neq c(v)$;

* 收稿日期：2022-01-22
基金项目：国家自然科学基金“图和有向图的任意可分性的研究”(11961067).
作者简介：刘丙雪(1997-)，女，硕士生，从事图论及其应用的研究，E-mail: 1523421503@qq.com.
† 通讯作者：刘凤霞，女，博士，副教授，从事图论及其应用的研究，E-mail: xjulfx@163.com.

(ii) $\forall\, v \in V(G)$, $|c(N_G(v))| \geq \min\{|N_G(v)|,\, r\}$;

(iii) $\forall\, v \in V(G)$, $c(v) \in L(v)$.

图G的r-hued列表染色数, 记为$\chi_{L,r}(G)$, 是指最小正整数k, 满足对图G的任何k-列表L, 图G有一个(L,r)-染色. 对于任意图的r-hued染色数$\chi_r(G)$, Lai等[5]得到了以下规律:

$$\chi(G) = \chi_1(G) \leq \chi_2(G) \leq \cdots \leq \chi_{r-1}(G) \leq \chi_r(G) \leq \cdots \leq \chi_{\Delta(G)}(G) = \chi_{\Delta(G)+1}(G) = \cdots \tag{1}$$

从式(1)中可以看出$\chi_r(G)$随着r的增大在不断增大, 当$r \geq \Delta(G)$时, 无论r如何增大, v最多有$\Delta(G)$个邻点, 所以后面出现了连等的情况. Chen等[4]提出了$\chi_{L,r}(G)$关于r的变化规律的结论: $\chi_L(G) = \chi_{L,1}(G) \leq \chi_{L,2}(G) \leq \cdots \leq \chi_{L,r-1}(G) \leq \chi_{L,r}(G) \leq \cdots \leq \chi_{L,\Delta(G)}(G) = \chi_{L,\Delta(G)+1}(G) = \cdots$, 可以明显地看出$\chi_{L,r}(G)$与$\chi_r(G)$有着类似的规律. 在2006年, Lai等[5]就发现了$\chi_{L,r}(G)$, $\chi_r(G)$, $\Delta(G)$以及$|V(G)|$的关系:

$$\min\{r, \Delta(G)\} + 1 \leq \chi_r(G) \leq \chi_{L,r}(G) \leq |V(G)| \tag{2}$$

一些学者对具体图的染色进行了研究. 例如Lai等[5]对圈C_n的r-hued染色数$\chi_r(C_n)$得到了:

$$\chi_r(C_m) = \begin{cases} 5, & m = 5; \\ 3, & m \equiv 0\ (mod\ 3); \\ 4, & \text{其它}. \end{cases}$$

Akbari等[6]利用圈的平方图C_m^2得到了$\chi_{L,2}(C_m)$的结果:

$$\chi_{L,2}(C_m) \doteq \begin{cases} 5, & m = 5; \\ 3, & m \equiv 0\ (mod\ 3); \\ 4, & \text{其它}. \end{cases} \tag{3}$$

Yang等[7]证明了, 如果$m \geq 3$, 则

$$\chi(C_m^2) = \chi_2(C_m^2) = \begin{cases} 5, & m = 5; \\ 3, & m \equiv 0\ (mod\ 3); \\ 4, & \text{其它}. \end{cases} \tag{4}$$

通常我们将二部图$K_{1,3}$称为一个爪, 一个图G如果是无爪图, 那么它的任意子图H都不包含爪. 如果一个图G的任意导出子图H满足$\chi(H) = \omega(H)$, 则我们称图G为完美图. 所以无爪完美图是一个不含$K_{1,3}$的完美图. Gravier等[8]证明了, 若图G是一个无爪完美图且$\chi(G) \leq 3$, 则$\chi_L(G) = \chi(G)$.

两个无向简单图G和H的笛卡儿积, 记为$G\Box H$, 其中$V(G\Box H) = V(G) \times V(H)$, 若$(u_1, v_1)$与$(u_2, v_2)$相邻当且仅当$u_1 = u_2, v_1v_2 \in E(H)$或$v_1 = v_2, u_1u_2 \in E(G)$. 本文中点$(u_i, v_j)$我们记为$v_{ij}$.

对于一些笛卡儿乘积图的2-hued染色数, Akbari等[9]给出了一些好的结论.

定理 1[9] 对于自然数m, n下面结论成立,

(i) 若m, $n \geq 2$, 则

$$\chi_2(P_m \Box P_n) = 4.$$

(ii) 若$n \geq 3$, 则

$$\chi_2(P_m \Box C_n) = \begin{cases} \chi_2(C_n), & m = 1; \\ 3, & n \equiv 0\ (mod\ 3); \\ 4, & \text{其它}. \end{cases}$$

(iii)如果m, $n \geq 3$, 则

$$\chi_2(C_m \Box C_n) = \begin{cases} 3, & mn \equiv 0\ (mod\ 3); \\ 4, & \text{其它}. \end{cases}$$

本文将定理1的结论(i)推广到了列表染色上, 证明了$\chi_{L,2}(P_m \Box P_n) = 4$, 且将定理1的结论(ii)推广到了列表染色上, 确定了$\chi_{L,2}(P_m \Box C_n)$的范围.

1 图$P_m\square P_n$的2-hued列表染色

设P_m, P_n分别是含有$m\geq 2$个顶点和$n\geq 2$个顶点的路. P_m与P_n的笛卡儿积记为$P_m\square P_n$, 我们总是记$V(P_m\square P_n)=\{v_{ij}|i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n\}$.

定理 2 设m, n是两个正整数, 则$\chi_{L,2}(P_m\square P_n)=4$.

证明 由定理1的(i)和不等式(2), $\chi_{L,2}(P_m\square P_n)\geq\chi_2(P_m\square P_n)=4$.

下面我们证明$\chi_{L,2}(P_m\square P_n)\leq 4$. 如果$m=n=2$, 由不等式(2)可知$\chi_{L,2}(P_2\square P_2)\leq|V(P_2\square P_2)|=4$. 我们假设$m$和$n$至少有一个严格大于2, 并记$P_m\square P_n=G$.

情况 1 $m=2$, $n\geq 3$或$m\geq 3$, $n=2$.

不失一般性, 设$m=2$, $n\geq 3$. 首先构造一个由图G加边得到的图G'. $V(G')=V(G)$, $E(G')=E(G)\cup\{v_{1j}v_{2,j+1}|j=1,2,\cdots,n-1\}\cup\{v_{12}v_{21},v_{1n}v_{2,n-1}\}$. 如图1所示.

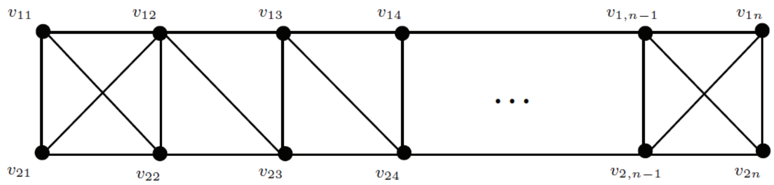

图 1 图G'

断言 1: $\chi_L(G')\leq 4$.

设L是图G'的一个4-列表, 按照如下顺序给图G'的顶点染色, $v_{11},v_{21},v_{12},v_{22},v_{13},v_{23},\cdots,v_{1,n-1}$, $v_{2,n-1}$, v_{1n},v_{2n}. 任意顶点v_{ij}, 该点的邻点中已染颜色的点至多有3个, 而$|L(v_{ij})|=4$, 总是可以选取$L(v_{ij})$中的颜色给点v_{ij}染色. 因此, $\chi_L(G')\leq 4$.

断言 2: $\chi_{L,2}(G)\leq\chi_L(G')$.

设c是图G'的一个列表染色, 下面证明c是图G的一个2-hued列表染色, 我们只需要证明c是图G的满足(ii)条件的一个染色.

因为顶点v_{11},v_{12},v_{21}构成图G'中一个三角形, 从而$c(v_{12})\neq c(v_{21})$, 由此知v_{11}满足(ii)条件. 顶点$v_{2,n-1},v_{1n}$, v_{2n}构成图G'中一个三角形, 从而$c(v_{2,n-1})\neq c(v_{1n})$, 由此知$v_{2n}$满足(ii)条件. 任意$2\leq j\leq n$, 顶点$v_{1j},v_{1,j-1}$, v_{2j}构成图G'中一个三角形, 从而v_{1j}满足(ii)条件. 任意$1\leq j\leq n-1$, 顶点$v_{1j},v_{2j},v_{2,j+1}$构成图G'中一个三角形, 从而v_{2j}满足(ii)条件.

综上, 图G中所有点在染色c下满足(ii)条件, 即c是图G的一个2-hued列表染色, 因此, $\chi_{L,2}(G)\leq 4$, 情况1得证.

情况 2 $m\geq 3$且$n\geq 3$.

首先构造一个由图G加边得到的图G''. $V(G'')=V(G)$, $E(G'')=E(G)\cup\{v_{ij}v_{i+1,j+1}|i=1,2,\cdots,m-1;\ j=1,\ 2,\cdots,n-1\}\cup\{v_{12}v_{21},v_{m-1,n}v_{m,n-1}\}$. 如图2所示.

断言 1: $\chi_L(G'')\leq 4$.

设L是图G''的一个4-列表, 按照如下顺序给图G''的顶点染色, $v_{11},v_{12},\cdots,v_{1n};v_{21}$, $v_{22},\cdots,v_{2n};\cdots;$ $v_{m-1,1},v_{m-1,2}$, $\cdots,v_{m-1,n}$. 继而染顶点$v_{m,n-1},v_{m,n-2},\cdots,v_{m1}$, 随后染顶点$v_{mn}$. 任意顶点$v_{ij}$, 该点的邻点中已染颜色的点至多有3个, 而$|L(v_{ij})|=4$, 总是可以选取$L(v_{ij})$中的颜色染点$v_{ij}$. 因此, $\chi_L(G'')\leq 4$.

断言 2: $\chi_{L,2}(G)\leq\chi_L(G'')$.

设c是图G''的一个列表染色, 下面证明c是图G的一个2-hued列表染色, 我们只需要证明c是图G的满足(ii)条件的一个染色.

因为顶点v_{11}, v_{12}, v_{21}构成G''中一个三角形, 从而$c(v_{12})\neq c(v_{21})$, 由此知v_{11}满足(ii)条件. 顶点v_{mn}, $v_{m-1,n},v_{m,n-1}$构成图G''中一个三角形, 从而$c(v_{m-1,n})\neq c(v_{m,n-1})$, 由此知$v_{mn}$满足(ii)条件. 任意$1\leq i\leq m-1$; $2\leq j\leq n$, 顶点v_{ij}, $v_{i,j-1}$, $v_{i+1,j}$构成图G''中一个三角形, 从而v_{ij}满足(ii)条件. 任意$2\leq i\leq m$; $1\leq j\leq n$–1, 顶点v_{ij}, $v_{i-1,j}$, $v_{i,j+1}$构成图G''中一个三角形, 从而v_{ij}满足(ii)条件.

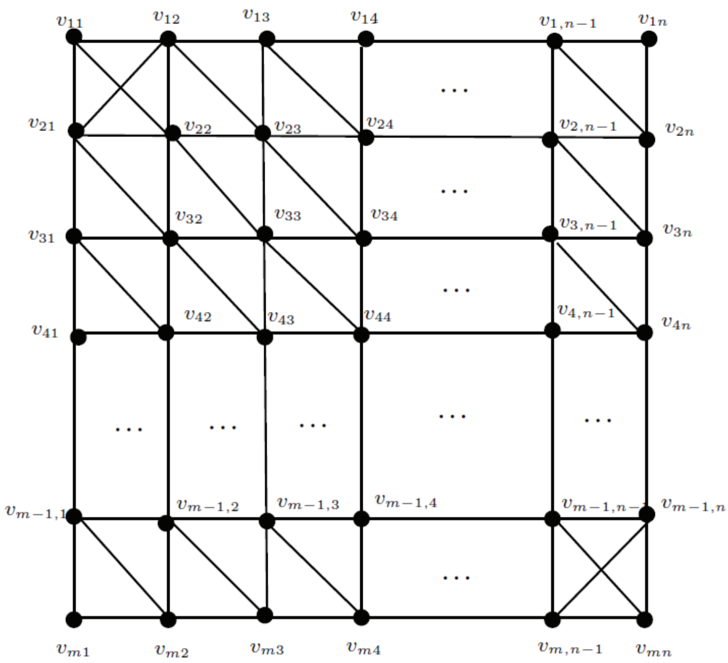

图 2　图 G''

综上, 图G中所有点在染色c下满足(ii)条件, 即c是图G的一个2-hued列表染色. 因此, $\chi_{L,2}(G)\le 4$, 情况2得证.

结合情况1和情况2, 对任意$m\ge 2$, $n\ge 2$, 都有$\chi_{L,2}(G)\le 4$, 定理2得证.

2　图$P_m\square C_n$的2-hued列表染色

在这一节, 我们总是用P_m, C_n分别来记$m\ge 2$个顶点的路和$n\ge 2$个顶点的圈. 记$H=P_m\square C_n$. $V(H)=\{v_{ij}|\ 1\le i\le m,\ 1\le j\le n\}$.

引理 1[8] 若图G是一个无爪完美图且$\chi(G)\le 3$, 则$\chi_L(G)=\chi(G)$.

定理 3 若$n\equiv 0(mod\ 3)$, 则$\chi_{L,2}(P_2\square C_n)=3$.

证明　记$H=P_2\square C_n$, $V(H)=\{v_{11},v_{12},\cdots,v_{1n},v_{21},v_{22},\cdots,v_{2n}\}$. 由(2)可知, $\chi_{L,2}(H)\ge \min\{2,\ \Delta(H)\}+1=3$, 下面我们只需证明$\chi_{L,2}(H)\le 3$. 记$H'$为图$H$加上边$\{v_{21}v_{1n},\ v_{1j}v_{j+1}|\ j=1,2,\cdots,n-1\}$所得图, 如图3所示.

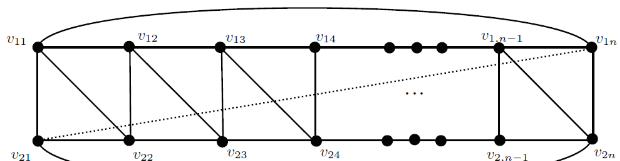

图 3　图 H'

断言 1: $\chi_{L,2}(H)\le\chi_L(H')$.

设c是图H'的一个列表染色, 下面证明c是图H的一个2-hued列表染色, 只需证明c是图H上满足(ii)条件的一个染色. 由于顶点v_{11}, v_{21}, v_{1n}构成图H'中的一个三角形, 从而$c(v_{21})\ne c(v_{1n})$, 由此知v_{11}满足(ii)条件. 因为顶点v_{1n}, v_{21}, v_{2n}构成图H'中的一个三角形, 从而$c(v_{21})\ne c(v_{1n})$, 由此知v_{2n}满足(ii)条件. 任意$2\le j\le n$, 顶点v_{1j}, $v_{1,j-1}$, v_{2j}构成图H'中的一个三角形, 从而$c(v_{1,j-1})\ne c(v_{2j})$, 由此知$v_{1j}$满足(ii)条件. 任意$1\le j\le n-1$, 顶点$v_{2j}$, v_{1j}, $v_{2,j+1}$构成图H'中的一个三角形, 从而$c(v_{1j})\ne c(v_{2,j+1})$, 由此知$v_{2j}$满足(ii)条件. 综上, 图$H$的所有点在染色$c$下都满足(ii)条件. 由此可知$\chi_{L,2}(H)\le\chi_L(H')$.

断言 2: $\chi_L(H')=3$.

图H'是一个无爪完美图, 若$\chi(H')=3$, 则由引理1知, $\chi_L(H')=3$. 接下来我们证明$\chi(H')=3$.

因为图H'中有K_3, 所以$\chi(H')\ge 3$. 下面我们给出图H'的一个3-染色, 以此说明$\chi(H')\le 3$. 记$c:\ V(H')\to$

$\{1,2,3\}$ 是如下一个染色:

$$c(v_{1j})=\begin{cases}1, & j\equiv 1(mod\ 3);\\ 2, & j\equiv 2(mod\ 3);\\ 3, & j\equiv 0(mod\ 3).\end{cases}\quad c(v_{2j})=\begin{cases}1, & j\equiv 0(mod\ 3);\\ 2, & j\equiv 1(mod\ 3);\\ 3, & j\equiv 2(mod\ 3).\end{cases}$$

由c的定义方式和$n\equiv 0(mod\ 3)$知, 任意$i=1,2$; $1\le j\le n$, v_{ij}的邻点的颜色与v_{ij}的颜色一定不同, 即c是图H'的一个正常染色. 因此$\chi(H')=3$, 断言2得证.

综合断言1和断言2, $\chi_{L,2}(H)\le 3$, 定理3得证.

定理 4 设$m\ge 2$, $n\ge 3$, 则$\chi_{L,2}(P_m\square C_n)\le 5$.

证明 记$F=P_m\square C_n$, 首先构造一个由图F加边得到的图F'. 其中, $V(F')=V(F)$, $E(F')=E(F)\cup\{v_{ij}v_{i+1,j+1}|\ i=1,2,\cdots,m-1;\ j=1,2,\cdots,n-1\}\cup\{v_{in}v_{i+1,1},|\ i=1,2,\cdots,m-1\}$, 如图4所示.

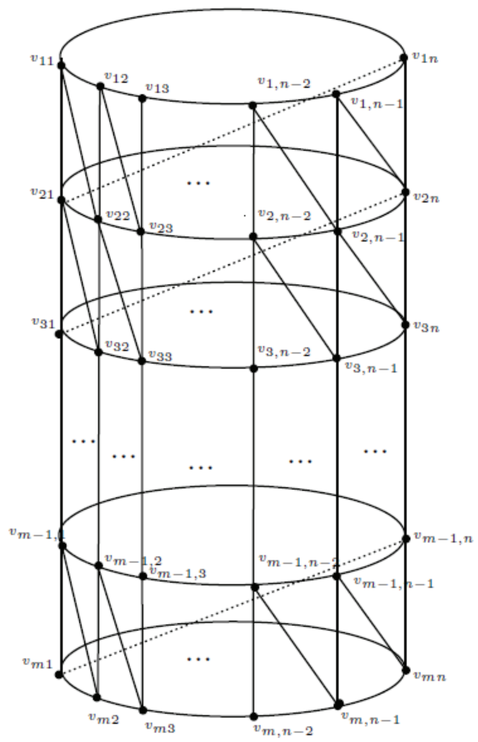

图 4 图 F'

断言 1: $\chi_L(F')\le 5$.

设L是图F'的一个5-列表, 按照如下顺序给图F'的顶点染色, $v_{11},v_{12},\cdots,v_{1n}$; $v_{21},v_{22},\cdots,v_{2n}$;$\cdots$; $v_{m1}, v_{m2},\cdots, v_{mn}$. 则该点的邻点中已染颜色的点至多有4个, 而$|L(v_{ij})|=5$, 总是可以选取$L(v_{ij})$中的颜色染点$v_{ij}$. 因此, $\chi_L(F')\le 5$.

断言 2: $\chi_{L,2}(F)\le\chi_L(F')$.

设c是图F'的一个列表染色, 下面证明c是图F的一个2-hued列表染色, 我们只需要证明c是图F的满足(ii)条件的一个染色.

任意$1\le i\le m-1$, $2\le j\le n$, 因为顶点v_{ij}, $v_{i,j-1}$, $v_{i+1,j}$构成图F'中一个三角形, 从而$c(v_{i,j-1})\ne c(v_{i+1,j})$, 由此知$v_{ij}$满足(ii)条件. 任意$1\le i\le m-1$, 顶点$v_{i1}$, $v_{i+1,1}$, v_{in}构成图F'中一个三角形, 从而v_{i1}满足(ii)条件. 任意$1\le j\le n-1$, 顶点v_{mj}, $v_{m-1,j}$, $v_{m,j+1}$构成图F'中一个三角形, 从而v_{mj}满足(ii)条件. 因为v_{mn}, $v_{m-1,n}$, v_{m1}是图F'中的一个三角形, 从而$c(v_{m-1,n})\ne c(v_{m1})$, 由此可知$v_{mn}$满足(ii)条件.

综上, 图F中所有点在染色c下满足(ii)条件, 即c是图F的一个2-hued列表染色. 因此, $\chi_{L,2}(F)\le 5$.

图C_n^p是以$\{v_1,\cdots,v_n\}$为顶点集的图, 两个顶点v_i和v_j相邻当且仅当$j\in\{i-p,\cdots,i-2,i-1,i+1,i+2,\cdots,i+p\}\ (mod\ n)$.

引理 2[10] 若$G=C_n^p$, 则$\chi_L(G)=\chi(G)$.

设H为图G的导出子图, 记$col(G)=\max\{\delta(H)\}+1$.

引理 3[11] 对于任意图G和H, $\chi_L(G\Box H)\le\min\{\chi_L(G)+col(H),col(G)+\chi_L(H)\}-1$.

定理 5 设$m\ge 2$, $n\equiv 0(mod\,3)$, 则$\chi_{L,2}(P_m\Box C_n)\le 4$.

证明 下面我们通过两个断言证明定理5.

断言 1: $\chi_{L,2}(P_m\Box C_n)\le\chi_L(P_m\Box C_n^2)$.

设c是$(P_m\Box C_n^2)$的一个列表染色, 要证明断言. 需要证明c是$P_m\Box C_n$的一个2-hued列表染色. 因为$P_m\Box C_n^2$可以由$P_m\Box C_n$加边得到, 因此只需证明c是$P_m\Box C_n$的一个满足(ii)条件的染色.

记$V(P_m\Box C_n)=\{v_{ij}|1\le i\le m,\ 1\le j\le n\}$. 在$P_m\Box C_n^2$中, 对每个$1\le i\le m$, $1\le j\le n$, $v_{i,j-1}v_{ij}v_{i,j+1}$是一个K_3, 由此知$c(v_{i,j-1})\ne c(v_{i,j+1})$, 从而$v_{ij}$在染色$c$下满足(ii)条件. 因此, $\chi_{L,2}(P_m\Box C_n)\le\chi_L(P_m\Box C_n^2)$.

断言 2: $\chi_L(P_m\Box C_n^2)\le 4$.

由公式(4)知, 当$n\equiv 0(mod\,3)$时, $\chi(C_n^2)=3$.

由引理2知, $\chi_L(C_n^2)=\chi(C_n^2)$, 从而$\chi_L(C_n^2)=3$.

由定义知$\chi_L(P_m)=2$, $col(P_m)=2$. 当$n=3$时, $col(C_3^2)=3$, 当$n\ge 6$且$n\equiv 0(mod\,3)$时, $\chi(C_n^2)=5$.

由引理3知, 当$n=3$, $\chi_L(P_m\Box C_3^2)\le\min\{\chi_L(P_m)+col(C_3^2),\chi_L(C_3^2)+col(P_m)\}-1=\min\{2+3,3+2\}-1=4$. 当$n\ge 6$且$n\equiv 0(mod\,3)$时, $\chi_L(P_m\Box C_n^2)\le\min\{\chi_L(P_m)+col(C_n^2),\chi_L(C_n^2)+col(P_m)\}-1=\min\{2+5,3+2\}-1=4$.

综上, $\chi_L(P_m\Box C_n^2)\le 4$, 综合断言1, 2知$\chi_{L,2}(P_m\Box C_n)\le 4$, 定理5得证.

参考文献：

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory[M]. London: Springer, 2008.

[2] MONTGOMERY B. Dynamic coloring of graphs[D]. Morgantwon: West Virginia University, 2001.

[3] LAI H J, MONTGOMERY B, POON H. Upper bounds of dynamic chromatic number[J]. Ars Combinatoria, 2003, 68: 193-201.

[4] CHEN Y, FAN S H, LAI H J, et al. On dynamic coloring for planar graphs and graphs of higher genus[J]. Discrete Applied Mathematics, 2012, 160(7/8): 1064-1071.

[5] LAI H J, LIN J L, MONTGOMERY B, et al. Conditional colorings of graphs[J]. Discrete Mathematics, 2006, 306(16): 1997-2004.

[6] AKBARI S, GHANBARI M, JAHANBEKAM S. On the list dynamic coloring of graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2009, 157(14): 3005-3007.

[7] YANG C X, DENG X C, SHAO R F. On r-hued coloring of some perfect and circulant graphs[J]. IAENG International Journal of Applied Mathematics, 2019, 49(4): 421-426.

[8] GRAVIER S, MAFFRAY F. On the choice number of calw-free perfect graphs[J]. Discrete Mathmatics, 2004, 276(1): 211-218.

[9] AKBARI S, GHANBARI M, JAHANBEKAM S. On the dynamic coloring of cartesian product graphs[J]. Ars Combinatoria, 2014, 114: 161-168.

[10] PROWSE A, WOODALL D R. Choosability of powers of circuits[J]. Graphs and Combinatorics, 2003, 19(1): 137-144.

[11] KAUL H, MUDROCK J A. List coloring a cartesian product with a complete bipartite factor[J]. Graphs and Combinatorics, 2019, 35(6): 1571-1583.

责任编辑：赵新科