全 Fock 空间中生成子的谱研究*

耿德文, 闫 成†

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

摘 要：借助 hyponormal 算子的谱的性质, 对全 Fock 空间中生成子的谱的相关性质进行研究, 得出生成子的近似点谱包含在复平面中以原点为心半径 1 的方体内.

关键词：全 Fock 空间; 生成子; 湮灭子; hyponormal 算子; 谱

DOI：10.13568/j.cnki.651094.651316. 2022.05.14.0002

中图分类号：O177.7 **文献标识码**：A **文章编号**：2096-7675(2023)02-0169-06

引文格式: 耿德文, 闫成. 全 Fock 空间中生成子的谱研究[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2023, 40(2): 169-174.

英文引文格式：GENG Dewen, YAN Cheng. Study on the spectrum of creation operator in the full Fock space[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2023, 40(2): 169-174.

Study on the Spectrum of Creation Operator in the Full Fock Space

GENG Dewen, YAN Cheng

(*School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China*)

Abstract： With the help of the properties of the spectrum of the hyponormal operator, this paper studies the relevant properties of the spectrum of the creation operator in the full Fock space, and obtains that the approximate point spectrum of the creation operator is contained in the square whose original point is the center radius 1 in the complex plane.

Key words： full Fock space; creation operator; annihilation operation; hyponormal operator; spectrum

0 引 言

1932 年, 物理学家 Fock 给出了 Fock 空间, 用来解决全同粒子系统中玻色子的表示问题[1]. 随着算子代数理论的发展, Fock 空间被推广为全 Fock 空间 (参阅文献 [2] , 当时不称为全 Fock 空间). 二十世纪九十年代 Voiculescu 等[3]提出了自由概率理论, 半圆元 (见文献 [4], 29页) 是自由概率理论中用于计算的核心工具, 恰好 Fock 空间中生成子与湮灭子的和是半圆元. 这使得全 Fock 空间成为自由概率理论中的一个重要例子. 近年来, $q-$Fock 空间是全 Fock 空间的最新进展[5]. 此外, Zhu[6] 指出 Fock 空间在量子物理学、海森堡群调和分析以及偏微分方程中有广泛的应用.

半圆元生成的 von Neumann 代数被称为自由 von Neumann 代数, 自由 von Neumann 代数给出了一个非交换概率空间. 自由概率理论给出了非交换概率空间中的中心极限定理等一系列重要定理[3]. Cuntz 代数[7]是 C^*- 代数的一个基本例子, 由全 Fock 空间中的生成子生成的 C^*- 代数是 Cuntz 代数[3]. 这意味着单独研究生成子的性质也是有必要的.

Voiculescu 等[3]利用半圆元的谱及概率分布给出了由全 Fock 空间中的半圆元生成的非交换概率空间高阶矩的表示. 但对于生成子的谱研究还没有相应的结果. 因此, 本文主要对全 Fock 空间中的生成子的近似点谱进行研究.

* **收稿日期**: 2022-05-14
基金项目: 国家自然科学基金“非交换对称空间中的导数和算子的研究”(12261084).
作者简介: 耿德文(1996-), 女, 硕士生, 从事泛函分析的研究, E-mail: gengdewen@qq.com.
† **通讯作者**: 闫成(1984-), 男, 博士, 副教授, 从事泛函分析的研究, E-mail: yanchengggg@163.com.

1 预备知识

设 $\mathcal{H}$ 是一个实 Hilbert 空间的复化, 即 $\mathcal{H}=\mathcal{H}_{\mathbb{R}}+i\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$[8], $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是 $\mathcal{H}$ 上的有界线性算子. 对任意的 $X\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $X:=\mathrm{Re}X+\mathrm{iIm}X$, 其中 $\mathrm{Re}X:=(X+X^*)/2$ 称为 X 的实部, $\mathrm{Im}X:=(X-X^*)/2\mathrm{i}$ 称为 X 的虚部. 对算子 X 的谱集分类如下: $\sigma_p(X)$ 表示算子 X 的点谱的全体, $\sigma_c(X)$ 表示算子 X 的连续谱的全体, $\sigma_r(X)$ 表示算子 X 的剩余谱的全体. 特别的, $\sigma_p(X),\sigma_c(X),\sigma_r(X)$ 是互不相交的集合, 并且 $\sigma(X)=\sigma_p(X)\cup\sigma_c(X)\cup\sigma_r(X)$. 进一步, 在文献 [9] 中, 算子 X 的联合点谱是满足如下条件的 λ 的全体, 记为 $\sigma_{jp}(X)$: 若存在一个 $\mathrm{Re}X$ 和 $\mathrm{Im}X$ 的非零公共特征向量 $f\in\mathcal{H}$, 使得

$$\mathrm{Re}Xf=\mathrm{Re}\lambda f,\ \mathrm{Im}Xf=\mathrm{Im}\lambda f.$$

算子 X 的近似点谱是满足如下条件的 λ 的全体, 记为 $\sigma_a(X)$: 若存在一个单位向量序列 $\{f_n\}\subset\mathcal{H}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|(l-\lambda I)f_n\|=0.$$

算子 X 的联合近似点谱是满足如下条件的 λ 的全体, 记为 $\sigma_{ja}(X)$: 若存在一个单位向量序列 $\{f_n\}\subset\mathcal{H}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\|(\mathrm{Re}X-\mathrm{Re}\lambda I)f_n\|=\lim_{n\to\infty}\|(\mathrm{Im}X-\mathrm{Im}\lambda I)f_n\|=0.$$

在文献 [3] 中, $\mathcal{H}$ 上的全 Fock 空间定义如下:

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}):=\bigoplus_{n\geq 0}\mathcal{H}^{\otimes n}.$$

$\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 是 Hilbert 空间, 其中 $\mathcal{H}^{\otimes 0}:=\mathbb{C}\mathbb{1}$ 是一个一维的 Hilbert 空间, 这里 $\mathbb{1}:=1\oplus 0\oplus 0\oplus\cdots$ 是一个单位向量, 称为真空向量. 任意的 $\eta\in\mathcal{F}(\mathcal{H})$, 在全 Fock 空间中对应的向量形式如下: $\eta=(c,\xi_{11},\xi_{21}\otimes\xi_{22},\cdots)$, 其中 $c\in\mathbb{C},\{\xi_{ij}\}_{i,j\in I}\subset\mathcal{H}$, I 是指标集. 对任意的 $\xi\in\mathcal{H}$, 有关系式 $\xi\hookrightarrow(0,\xi,\bar{0}\otimes\bar{0},\cdots)$, 因此 $\mathcal{H}$ 可以嵌入到 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 中. $\mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ 上的迹态 $\tau_{\mathcal{H}}(X)$ 由 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 上的真空向量和内积定义, 即 $\tau_{\mathcal{H}}(X):=\langle X\mathbb{1},\mathbb{1}\rangle$, $X\in\mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$, 我们称之为真空期望态.

对于 $\xi\in\mathcal{H}$, 其对应的左生成算子 (后面简称为生成子) $l(\xi):\mathcal{F}(\mathcal{H})\to\mathcal{F}(\mathcal{H})$ 定义为

$$l(\xi)(c,\xi_{11},\xi_{21}\otimes\xi_{22},\xi_{31}\otimes\xi_{32}\otimes\xi_{33},\cdots):=(0,c\xi,\xi\otimes\xi_{11},\xi\otimes\xi_{21}\otimes\xi_{22},\xi\otimes\xi_{31}\otimes\xi_{32}\otimes\xi_{33},\cdots).$$

其中: $\{\xi_{ij}\}_{i,j\in I}\subset\mathcal{H}$. $l(\xi)$ 的共轭算子 $l(\xi)^*$ 满足以下条件

$$l(\xi)^*(c,\xi_{11},\xi_{21}\otimes\xi_{22},\xi_{31}\otimes\xi_{32}\otimes\xi_{33},\cdots)=(\langle\xi,\xi_{11}\rangle,\langle\xi,\xi_{21}\rangle\xi_{22},\langle\xi,\xi_{31}\rangle\xi_{32}\otimes\xi_{33},\cdots),$$

我们称 $l(\xi)^*$ 为左湮灭算子 (以下简称湮灭子)[3].

$X\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, X^* 为算子 X 的共轭算子. 若 $X^*X-XX^*\geq 0$, 我们称算子 X 为 hyponormal 算子; 若 $(X^*X)^{\frac{1}{2}}-(XX^*)^{\frac{1}{2}}\geq 0$, 我们称算子 X 为 semi-hyponormal 算子.

性质 1[9] hyponormal 算子一定是 semi-hyponormal 算子.

2 生成子谱的性质

首先给定 $\xi\in\mathcal{H}$, 已知 $l(\xi)\in\mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$. 为了方便, 我们简记 $l(\xi)$ 为 l.

定理 1 生成子是 hyponormal 算子.

证明　对任意的 $\xi_1,\cdots,\xi_n\in\mathcal{H}$ 有

$$
\begin{aligned}
&\langle(l^*l-ll^*)\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_n,\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_n\rangle\\
=&\langle l^*l\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_n,\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_n\rangle-\langle ll^*\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_n,\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_n\rangle\\
=&\langle l\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_n,l\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_n\rangle-\langle l^*\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_n,l^*\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_n\rangle\\
=&\langle\xi\otimes\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_n,\xi\otimes\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_n\rangle-|\langle\xi,\xi_1\rangle|^2\langle\xi_2\otimes\cdots\otimes\xi_n,\xi_2\otimes\cdots\otimes\xi_n\rangle\\
=&\langle\xi\otimes\xi_1,\xi\otimes\xi_1\rangle\langle\xi_2\otimes\cdots\otimes\xi_n,\xi_2\otimes\cdots\otimes\xi_n\rangle-|\langle\xi,\xi_1\rangle|^2\langle\xi_2\otimes\cdots\otimes\xi_n,\xi_2\otimes\cdots\otimes\xi_n\rangle\\
=&(\langle\xi\otimes\xi_1,\xi\otimes\xi_1\rangle-|\langle\xi,\xi_1\rangle|^2)\langle\xi_2\otimes\cdots\otimes\xi_n,\xi_2\otimes\cdots\otimes\xi_n\rangle\\
=&(\langle\xi,\xi\rangle\langle\xi_1,\xi_1\rangle-|\langle\xi,\xi_1\rangle|^2)\langle\xi_2\otimes\cdots\otimes\xi_n,\xi_2\otimes\cdots\otimes\xi_n\rangle\\
\geq&0.
\end{aligned}
$$

由此可得, $l^*l-ll^*\geq 0$, 结论得证.

对生成子的研究我们需要借助文献 [9] 中的以下性质.

性质 2[9]　令 T 是 semi-hyponormal 算子, 则

$$\sigma_{jp}(T)=\sigma_p(T).$$

性质 3[9]　设 $T\in\mathcal{H}$, 则 $z\in\sigma_{jp}(T)$ 当且仅当存在一个非零向量 f, 使得

$$Tf=zf,\quad T^*f=\bar{z}f.$$

定理 2　当 ξ 是 $\mathcal{H}$ 中的单位向量时, $\sigma_{jp}(l(\xi))=\sigma_p(l(\xi))\subset\{z\,|\,|z|^2=1\}$.

证明　由定理 1 知, 生成子 l 是 hyponormal 算子, 则由性质 1 和 2 得 $\sigma_{jp}(l)=\sigma_p(l)$. 设 $z\in\sigma_{jp}(l)$, 则由性质 3 知, 存在 $f\in\mathcal{F}(\mathcal{H})$, 有 $lf=zf,\quad l^*f=\bar{z}f$. 又 $l(\xi)^*l(\xi)=\langle\xi,\xi\rangle I=I$, 这里 I 是恒等映射. 由 $l(\xi)^*l(\xi)f=z\bar{z}f=f$ 知, $|z|^2=1$. 所以 $\sigma_{jp}(l)\subset\{z\,|\,|z|^2=1\}$, 结论得证.

记 π_x,π_y 分别表示从复平面到 x 轴与 y 轴的投影，即对任意的复数 $z=x+\mathrm{i}y$, 有

$$\pi_x z=x \text{ 和 } \pi_y z=y.$$

性质 4[9]　令 $X+\mathrm{i}Y$ 是 hyponormal 算子, 其中 X, Y 是自共轭的, 则有

$$\pi_x(\sigma_a(X+\mathrm{i}Y))=\sigma(X) \text{ 和 } \pi_y(\sigma_a(X+\mathrm{i}Y))=\sigma(Y).$$

令 $l(\xi)=X+\mathrm{i}Y$ 是生成子, 其中 $X:=\mathrm{Re}l=(l+l^*)/2$, $Y:=\mathrm{Im}l=(l-l^*)/2\mathrm{i}$, ξ 是 $\mathcal{H}$ 中的单位向量. 由文献 [4,168页] 知 $\sigma(X)=[-1,1]$. 下面是我们的主要定理.

定理 3　令 $l=X+\mathrm{i}Y$ 是生成子, 其中 $X=(l+l^*)/2$, $Y=(l-l^*)/2\mathrm{i}$, 则有

$$\pi_x(\sigma_a(l))=\sigma(X)=[-1,1],\ \pi_y(\sigma_a(l))=\sigma(Y)=[-1,1],\ \sigma_a(l)\subset\pi_x(\sigma_a(l))\times i\pi_y(\sigma_a(l))=[-1,1]\times[-i,i].$$

证明　根据性质 4 我们直接得到 $\pi_x(\sigma_a(l))=\sigma(X)$, $\pi_y(\sigma_a(l))=\sigma(Y)$. 下面我们借助文献 [10,定理6.6.3] 中的方法来计算 Y 的谱. 因为 $\mathcal{H}$ 中的基向量可以看成 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ 中的基向量, 所以我们可以在 $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ 中考虑这一问题. 对任意的 $\xi_1,\cdots,\xi_n\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$, 我们给出类似 Wick 积的定义,

$$W'(\xi_1\otimes\xi_2\otimes\cdots\otimes\xi_n):=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{l(\xi_1)}{i}\cdots\frac{l(\xi_k)}{i}\frac{l(\xi_{k+1})^*}{i}\cdots\frac{l(\xi_n)^*}{i}.$$

取 ξ 为 $\mathcal{H}$ 中的任意一个标准正交基, $W'(\xi^{\otimes n})$ 是关于 $2Y$ 的 n 阶多项式:

$$W'(\xi^{\otimes n})=Q_n(2Y).$$

由 W' 的定义及 $l^*l=I$ 可以得到

$$
\begin{aligned}
(\frac{l}{i}-\frac{l^*}{i})\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}(\frac{l}{i})^k(\frac{l^*}{i})^{n-k}=&\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}(\frac{l}{i})^{k+1}(\frac{l^*}{i})^{n-k}-\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{l^*}{i}(\frac{l}{i})^k(\frac{l^*}{i})^{n-k}\\
=&(-1)^n(\frac{l}{i})^1(\frac{l^*}{i})^n+(-1)^{n-1}(\frac{l}{i})^2(\frac{l^*}{i})^{n-1}\\
&+\cdots+(-1)^1(\frac{l}{i})^n(\frac{l^*}{i})^1+(-1)^0(\frac{l}{i})^{n+1}(\frac{l^*}{i})^0\\
&-[(-1)^n\frac{l^*}{i}(\frac{l}{i})^0(\frac{l^*}{i})^n+(-1)^{n-1}\frac{l^*}{i}(\frac{l}{i})^1(\frac{l^*}{i})^{n-1}\\
&+\cdots+(-1)^1\frac{l^*}{i}(\frac{l}{i})^{n-1}(\frac{l^*}{i})^1+(-1)^0\frac{l^*}{i}(\frac{l}{i})^n(\frac{l^*}{i})^0]\\
=&(-1)^n(\frac{l}{i})^1(\frac{l^*}{i})^n+(-1)^{n-1}(\frac{l}{i})^2(\frac{l^*}{i})^{n-1}\\
&+\cdots+(-1)^1(\frac{l}{i})^n(\frac{l^*}{i})^1+(-1)^0(\frac{l}{i})^{n+1}(\frac{l^*}{i})^0\\
&-[(-1)^n(\frac{l^*}{i})^{n+1}+(-1)^{n-1}(-1)(\frac{l^*}{i})^{n-1}\\
&+\cdots+(-1)^1(-1)(\frac{l}{i})^{n-2}(\frac{l^*}{i})^1+(-1)^0(-1)(\frac{l}{i})^{n-1}(\frac{l^*}{i})^0]\\
=&(-1)^n(\frac{l}{i})^1(\frac{l^*}{i})^n+(-1)^{n-1}(\frac{l}{i})^2(\frac{l^*}{i})^{n-1}\\
&+\cdots+(-1)^1(\frac{l}{i})^n(\frac{l^*}{i})^1+(-1)^0(\frac{l}{i})^{n+1}(\frac{l^*}{i})^0\\
&+(-1)^{n+1}(\frac{l^*}{i})^{n+1}+(-1)^{n-1}(\frac{l^*}{i})^{n-1}\\
&+\cdots+(-1)^1(\frac{l}{i})^{n-2}(\frac{l^*}{i})^1+(-1)^0(\frac{l}{i})^{n-1}(\frac{l^*}{i})^0\\
=&\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}(\frac{l}{i})^k(\frac{l^*}{i})^{n+1-k}+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-1-k}(\frac{l}{i})^k(\frac{l^*}{i})^{n-1-k}.
\end{aligned}
$$

因此 Q_n 满足以下递推关系:

$$2YQ_n(2Y)=Q_{n+1}(2Y)+Q_{n-1}(2Y),\ n\geq 1.$$

令 $Q'_n(Y):=Q_n(2Y)$, 则有

$$2YQ'_n(Y)=2YQ_n(2Y)=Q_{n+1}(2Y)+Q_{n-1}(2Y)=Q'_{n+1}(Y)+Q'_{n-1}(Y).$$

即

$$2sQ'_n(s)=Q'_{n+1}(s)+Q'_{n-1}(s) \tag{1}$$

$Q'_0(s)=1,Q'_1(s)=(l-l^*)/i=2s$. 由以上递推关系可以确定所有的 Q'_n.

接下来证明 $\{W'(\xi^{\otimes n})\}_{n\geq 0}$ 是 $L_2(\Gamma(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}))$ 的正交系, 其中 $\Gamma(\mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ 表示由 $2Y$ 生成的 $\mathcal{B}(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ 的自由 von Neumann 代数, $L_2(\Gamma(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}))$ 表示关于 $\Gamma(\mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ 的非交换 L_2 空间. 由 $W'(\xi^{\otimes n})$ 定义可得:

$$
\begin{aligned}
W'(\xi^{\otimes n})^*=&(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}(\frac{l}{i})^k(\frac{l^*}{i})^{n-k})^*\\
=&\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}(\frac{l}{-i})^{n-k}(\frac{l^*}{-i})^k\\
=&\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}(\frac{l}{i})^{n-k}(\frac{l^*}{i})^k(-1)^n\\
=&\sum_{k=0}^{n}(-1)^{-k}(\frac{l}{i})^{n-k}(\frac{l^*}{i})^k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\frac{l}{i})^{n-k}(\frac{l^*}{i})^k\\
&=W'(\xi^{\otimes n}).
\end{aligned}
$$

$W'(\xi^{\otimes n})$ 是自共轭的. 由 $l^*\mathbb{1}=\mathbf{0}$

$$
\begin{aligned}
\tau_{\mathcal{H}}(W'(\xi^{\otimes n})W'(\xi^{\otimes m}))&=\langle W'(\xi^{\otimes n})W'(\xi^{\otimes m})\mathbb{1},\mathbb{1}\rangle\\
&=\langle W'(\xi^{\otimes m})\mathbb{1},W'(\xi^{\otimes n})^*\mathbb{1}\rangle\\
&=\langle\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}(\frac{l}{i})^k(\frac{l^*}{i})^{m-k}\mathbb{1},\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}(\frac{l}{i})^k(\frac{l^*}{i})^{n-k}\mathbb{1}\rangle\\
&=\langle(\frac{l}{i})^m\mathbb{1},(\frac{l}{i})^n\mathbb{1}\rangle\\
&=\langle(\frac{1}{i})^m\xi^{\otimes m},(\frac{1}{i})^n\xi^{\otimes n}\rangle\\
&=\delta_{mn}.
\end{aligned}
$$

这就说明 $\{W'(\xi^{\otimes n})\}_{n\geq 0}$ 是 $L_2(\Gamma(\mathcal{H}_{\mathbb{R}}))$ 的正交系.

由 Y 是自伴的, 可知对任意的 $\lambda\in\sigma(Y)$ 有 $|\lambda|\leq\|Y\|$. 又 $\|Y\|\leq 1$, 所以 $\sigma(Y)\subset[-1,1]$. 又由 Riesz 表示定理, 存在唯一的 $\sigma(Y)$ 上的测度 μ 使以下等式成立,

$$
\delta_{mn}=\int_{\sigma(Y)}Q'_m(s)Q'_n(s)\mathrm{d}\mu(s)=\int_{-1}^{1}\chi_{\sigma(Y)}(s)Q'_m(s)Q'_n(s)\mathrm{d}\mu(s),\ m,n\geq 0 \tag{2}
$$

即 μ 是序列 $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ 的正交化复测度. 令 $s=\cos\theta$, (1) 式变为

$$
2\cos\theta Q'_n(\cos\theta)=Q'_{n+1}(\cos\theta)+Q'_{n-1}(\cos\theta),\ n\geq 1.
$$

$Q'_0(\cos\theta)=1,\ Q'_1(\cos\theta)=2\cos\theta.$

下面用数学归纳法证明

$$
Q'_n(\cos\theta)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta},\ n\geq 0.
$$

当 $n=2$ 时, $Q'_2(\cos\theta)=2\cos\theta Q'_1(\cos\theta)-Q'_0(\cos\theta)=4\cos\theta-1=\sin(3\theta)/\sin\theta$ 成立. 假设 $n=k,\ k-1$ 时成立, 则

$$
\begin{aligned}
Q'_{k+1}(\cos\theta)=&2\cos\theta Q'_k(\cos\theta)-Q'_{k-1}(\cos\theta)\\
=&(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\frac{e^{i(k+1)\theta}-e^{-i(k+1)\theta}}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}-\frac{e^{i(k)\theta}-e^{-i(k)\theta}}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}\\
=&\frac{e^{i(k+2)\theta}-e^{-i(k+2)\theta}}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}=\frac{\sin(k+2)\theta}{\sin\theta}.
\end{aligned}
$$

综上所述, 对任意的 $n\geq 0$, $Q'_n(\cos\theta)=\sin(n+1)\theta/\sin\theta$.

(2) 式可写为

$$
\int_{-1}^{1}\chi_{\sigma(Y)}(s)\frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta}\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\mathrm{d}\mu(\cos\theta)=\delta_{mn},\ m,n\geq 0.
$$

又因为

$$
\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(m+1)\theta\sin(n+1)\theta\mathrm{d}\theta=\delta_{mn}
$$

上式可写为

$$
\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta}\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\delta_{mn},\ m,n\geq 0.
$$

进一步, 令 $s=\cos\theta$,

$$
\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}Q'_m(s)Q'_n(s)\sqrt{1-s^2}\mathrm{d}s=\delta_{mn},\ m,n\geq 0 \tag{3}
$$

由 (2) 式和 (3) 式得 $\chi_{\sigma(Y)}(s)\mathrm{d}\mu(s)=2/\pi\sqrt{1-s^2}\mathrm{d}s$, 又因为 $2/\pi\sqrt{1-s^2}\mathrm{d}s$ 的支撑是整个 $[-1,1]$，则 $\chi_{\sigma(Y)}$ 在整个 $[-1,1]$ 上取值为 1. 因此 $\sigma(Y)=[-1,1]$. 所以 $\pi_x(\sigma_a(l))=\sigma(X)=[-1,1]$, $\pi_y(\sigma_a(l))=\sigma(Y)=[-1,1]$, 且进一步有 $\sigma_a(l)\subset\pi_x(\sigma_a(l))\times i\pi_y(\sigma_a(l))=[-1,1]\times[-i,i]$, 结论得证.

参考文献：

[1] FOCK V. Konfigurationsraum und zweite quantelung[J]. Zeitschrift Für Physik, 1932, 75(9): 622-647.

[2] SEGAL I E. Tensor algebras over hilbert spaces. I[J]. Annals of Mathematics, 1956, 81(1): 106.

[3] VOICULESCU D V, DYKEMA K J, NICA A. Free random variables[M]. Providence Rhode Island: American Mathematical Society, 1992.

[4] NICA A, SPEICHER R. Lectures on the combinatorics of free probability[M]. New York: Cambridge University Press, 2006.

[5] BIKRAM P, MUKHERJEE K, RICARD É, et al. On the factoriality of q-deformed Araki-Woods von Neumann algebras[J]. Communications in Mathematical Physics, 2022, 398(2): 797-821.

[6] ZHU K H. Analysis on Fock spaces[M]. New York: Springer, 2012.

[7] CUNTZ J. Simple C^*-algebra generated by isometries[J]. Communications in Mathematical Physics, 1977, 57(2): 173-185.

[8] ARAKI H. Operator algebras and their connections with topology and ergodic theory[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1985.

[9] XIA D X. Spectral theory of hyponormal operators[M]. Basel: Birkhäuser Verlag, 1983.

[10] 许全华, 吐尔德别克, 陈泽乾. 算子代数与非交换 Lp 空间引论[M]. 北京: 科学出版社, 2010.

责任编辑：赵新科

(上接第 168 页)

[6] LIU L L, WANG J L, LIU X N. Global stability of an SEIR epidemic model with age-dependent latency and relapse[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2015, 24: 18-35.

[7] WANG J L, ZHANG R, KUNIYA T. The stability analysis of an SVEIR model with continuous age-structure in the exposed and infectious classes[J]. Journal of Biological Dynamics, 2015, 9(1): 73-101.

[8] 梁霜霜, 聂麟飞, 胡琳. 具有年龄结构和水平传播的媒介传染病模型研究[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2021, 3: 47-55.

[9] YAN D X, CAO H, XU X X, et al. Hopf bifurcation for a predator-prey model with age structure[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2019, 526: 120953.

[10] HIRSCH W M, HANISCH H, GABRIEL J P. Differential equation models of some parasitic infections: methods for the study of asymptotic behavior[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1985, 38(6): 733-753.

[11] IANNELLI M. Mathematical theory of age-structured population dynamics[M]. Pisa: Giardini Editori E Stampatori, 1995.

[12] MAGAL P. Compact attractors for time-periodic age-structured population models[J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2001, 2001(65): 1-35.

[13] BROWNE C J, PILYUGIN S S. Global analysis of age-structured within-host virus model[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems B, 2013, 18(8): 1999-2017.

[14] MARTCHEVA M. An introduction to mathematical epidemiology[M]. New York: Springer, 2015.

责任编辑：赵新科