

一类具有媒体报道和环境传播的 SEVIQBR 传染病模型的动力学分析*

罗颜涛, 陆腾腾, 杨谨鸿

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

摘要: 考虑媒体报道以及环境传播对疾病传播的影响, 建立了一类受媒体报道和环境传播影响的 SEVIQBR 传染病模型. 首先, 通过下一代矩阵的方法得到了模型的基本再生数 \mathcal{R}_0 , 基于基本再生数讨论模型无病平衡点以及地方病平衡点的存在性. 接着, 借助 Hurwitz 判据研究了无病平衡点的局部稳定性, 并构造适当的 Lyapunov 函数证明无病平衡点的全局渐近稳定性. 结果表明: 当基本再生数 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时, 模型的无病平衡点是全局渐近稳定的, 当 \mathcal{R}_0 满足一定条件时, 模型的地方病平衡点是存在的. 最后, 通过数值模拟验证了理论结果.

关键词: 基本再生数; 稳定性; Lyapunov 函数; 媒体报道; SEVIQBR 模型

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2023.05.31.0003

中图分类号: O175 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2024)02-0188-08

引文格式: 罗颜涛, 陆腾腾, 杨谨鸿. 一类具有媒体报道和环境传播的 SEVIQBR 传染病模型的动力学分析[J]. 新疆大学学报(自然科学版中英文), 2024, 41(2): 188-195.

英文引文格式: LUO Yantao, LU Tengting, YANG Jinhong. Dynamic analysis of a SEVIQBR infectious disease model with media coverage and environmental transmission[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2024, 41(2): 188-195.

Dynamic Analysis of a SEVIQBR Infectious Disease Model with Media Coverage and Environmental Transmission

LUO Yantao, LU Tengting, YANG Jinhong

(School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China)

Abstract: Considering the influence of media reports and environmental transmission on disease transmission, a SEVIQBR infectious disease model is established. Firstly, the basic reproduction number \mathcal{R}_0 of the model is obtained by the next generation matrix method. Based on the basic reproduction number, the existence of disease-free equilibrium and endemic equilibrium of the model is discussed. Then, the local stability of disease-free equilibrium is studied by means of Hurwitz criterion, and the global asymptotic stability of disease-free equilibrium is studied by constructing an appropriate Lyapunov function. The results show that when the basic reproduction number $\mathcal{R}_0 < 1$, the disease-free equilibrium of the model is globally asymptotically stable. When \mathcal{R}_0 satisfies certain conditions, the endemic equilibrium of the model exists. Finally, we give some numerical simulations to explain the theoretical results.

Key words: basic reproduction number; stability; Lyapunov function; media coverage; SEVIQBR model

0 引言

传染病严重威胁着人类的生存与发展, 例如十四世纪中期的鼠疫、1918年的西班牙大流感、二十一世纪以来的 SARS、甲型 H1N1、埃博拉病毒以及近年来的 COVID-19 等, 导致全球重大人员伤亡, 因此预测传染病的发展趋势是防控工作的重中之重.

* 收稿日期: 2023-05-31

基金项目: 新疆维吾尔自治区自然科学基金“多因素耦合的随机传染病及种群动力学模型研究”(2022D01C64); 国家自然科学基金“基于人口和空间异质的 HIV/AIDS 感染动力学模型研究及在新疆地区的应用”(12201540); 新疆维吾尔自治区大学生创新项目“具有环境传播和人口异质性的传染病模型动力学分析”(S202210755090).

作者简介: 罗颜涛(1992—), 男, 博士, 副教授, 从事传染病动力学的研究, E-mail: luoyantaoxj@163.com.

众所周知,数学模型是研究传染病的有效方法之一.近年来,许多数学家、生物学家利用数学方法研究了传染病模型并取得了诸多成果^[1-2].此外,接种疫苗也是防治传染病的有效方法之一,因此,一些学者将疫苗接种引入到数学模型中,如李学志等^[3]基于疫苗接种等因素建立了一类具有疫苗接种时滞的两菌株传染病模型,分析了平衡点的存在性与稳定性,得到了 Hopf 分支存在的条件.在新媒体时代,民众会依据媒体的报道采取措施以应对传染病,故在疾病传播过程中考虑媒体效应也同样重要,这也使一些学者将媒体效应引入到数学模型中,如桑瑞等^[4]基于媒体报道因素建立了一类具有媒体报道的双斑块迁移 SIRS 传染病模型,研究媒体报道作用下易感者与感染者迁移速率的改变对斑块内疾病状态的影响,得到了无病平衡点与地方病平衡点的全局渐近稳定性.此外,现今流行的许多传染病往往都具有环境传播的特点,例如患者在咳嗽、打喷嚏或者大声说话时,会喷出携带传染性病菌的飞沫,进而使他人感染.故一些学者对此进行了深入研究并将环境传播引入到数学模型中,如郭婷等^[5]基于环境传播建立了一类具有环境传播的 SIQR 模型,并推导出了模型的基本再生数 R_0 , 给出了模型无病平衡点和地方病平衡点的全局渐近稳定性.

然而,目前将环境传播、疫苗接种以及媒体效应等因素综合考虑的传染病模型较少,因此我们改进了张钰倩等^[6]建立的模型,在模型中加入了潜伏期,并考虑了易感者人群的疫苗接种及免疫失效过程,同时将环境传播纳入到模型中,建立了一类具有媒体报道和环境传播的 SEVIQBR 传染病模型.

1 模型的建立和分析

将人群分为易感者 S 、潜伏者 E 、感染者 I 、疫苗接种者 V 、康复者 R 、隔离者 Q , 通过分析传染病的传播机制给出如图 1 所示的疾病传播流程图.

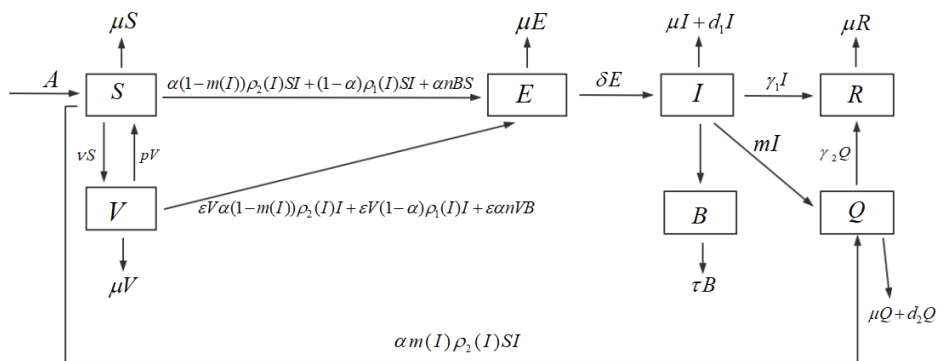


图 1 疾病传播流程图

根据图 1 我们可得模型 (1)

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - \alpha(1-m(I))\rho_2(I)SI - (1-\alpha)\rho_1(I)SI - \alpha nBS - \alpha m(I)\rho_2(I)SI - (\mu + \nu)S + pV \\ \frac{dE}{dt} = \alpha(1-m(I))\rho_2(I)SI + (1-\alpha)\rho_1(I)SI + \alpha nBS + \epsilon \alpha V(1-m(I))\rho_2(I)I \\ \quad + \epsilon V(1-\alpha)\rho_1(I)I + \epsilon \alpha nVB - (\mu + \delta)E \\ \frac{dV}{dt} = vS - pV - \mu V - \epsilon \alpha nVB - \epsilon V(1-\alpha)\rho_1(I)I - \epsilon \alpha V(1-m(I))\rho_2(I)I \\ \frac{dI}{dt} = \delta E - (\mu + d_1 + m + \gamma_1)I \\ \frac{dQ}{dt} = mI + \alpha m(I)\rho_2(I)SI - \gamma_2 Q - (\mu + d_2)Q \\ \frac{dB}{dt} = kI - \tau B \\ \frac{dR}{dt} = \gamma_1 I + \gamma_2 Q - \mu R \end{cases} \tag{1}$$

其中: 函数 $m(I) = I/(I + \sigma)$, 表示去过病毒污染场所的易感者的追踪隔离率, σ 为追踪报道的准确率, 准确率越高, σ 越小. $\rho_1(I) = \beta_1 - \beta_0 f(I)$, $\rho_2(I) = \beta_2 - \beta_{00} f(I)$, β_1 和 β_2 为易感者与感染者的最大有效接触率, β_0 和 β_{00} 为

媒体报道对疾病传播的最大削减作用. 函数 $f(I)$ 表示媒体报道影响传染率的饱和函数, 并且满足条件

$$\begin{cases} f(0) = 0, \\ f'(I) \geq 0, \\ \lim_{I \rightarrow \infty} f(I) = 1, \\ \frac{\partial \{\beta_1 - \beta_0 f(I) SI\}}{\partial I} > 0, \frac{\partial \{\beta_2 - \beta_{00} f(I) SI\}}{\partial I} > 0. \end{cases}$$

模型中的其它参数含义见表 1.

表 1 参数含义

参数	含义	参数	含义
$B(t)$	t 时刻环境中病毒的数量	k	感染者释放到环境中病毒的速率
A	人口常数	τ	病毒的失效率
α	去过病毒场所的易感者比例	d_1	感染者的因病死亡率
ν	接种疫苗率	γ_1	感染者的恢复率
n	接触病毒并成为潜伏者的概率	p	免疫失效率
μ	自然死亡率	ε	疫苗影响因子
m	感染者隔离率	δ	潜伏者进入染病者的转移率
γ_2	隔离者的恢复率	d_2	隔离者的因病死亡率

因为 Q 与 R 不出现在模型 (1) 的其它方程中, 故我们接下来讨论模型 (2)

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = A - \alpha(1 - m(I))\rho_2(I)SI - (1 - \alpha)\rho_1(I)SI - \alpha nBS \\ \quad - \alpha m(I)\rho_2(I)SI - (\mu + \nu)S + pV \\ \frac{dE}{dt} = \alpha(1 - m(I))\rho_2(I)SI + (1 - \alpha)\rho_1(I)SI + \alpha nBS + \varepsilon \alpha V(1 - m(I))\rho_2(I)I \\ \quad + \varepsilon V(1 - \alpha)\rho_1(I)I + \varepsilon \alpha nVB - (\mu + \delta)E \\ \frac{dV}{dt} = vS - pV - \mu V - \varepsilon \alpha nVB - \varepsilon V(1 - \alpha)\rho_1(I)I - \varepsilon \alpha V(1 - m(I))\rho_2(I)I \\ \frac{dI}{dt} = \delta E - (\mu + d_1 + m + \gamma_1)I \\ \frac{dB}{dt} = kI - \tau B \end{cases} \quad (2)$$

用比较原理^[7]可以得到模型的正不变集如下

$$\Omega = \left\{ (S, V, E, I, B) \in R_+^5 : S, E, V, I, B \geq 0, S + E + V + I \leq \frac{A}{\mu}, B \leq \frac{kA}{\pi\mu} \right\} \quad (3)$$

2 基本再生数和平衡点的存在性

首先给出模型 (2) 的基本再生数及无病平衡点和地方病平衡点的存在性. 显然模型存在无病平衡点 $P_0(S_0, V_0, 0, 0, 0)$, 其中 S_0 和 V_0 分别为

$$S_0 = \frac{(p + \mu)A}{(p + \mu)(\mu + \nu) - p\nu}, V_0 = \frac{\nu A}{(p + \mu)(\mu + \nu) - p\nu} \quad (4)$$

利用次代矩阵^[8]计算基本再生数, 定义矩阵 F 和 V 如下

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\beta_2 S_0 + \beta_1 S_0 - \alpha\beta_1 S_0 + \varepsilon V_0 \alpha \beta_2 + \varepsilon V_0 (1 - \alpha) \beta_1 & \alpha n S_0 + \varepsilon \alpha n V_0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} \mu + \delta & 0 & 0 \\ -\delta & \mu + d_1 + m + \gamma_1 & 0 \\ 0 & -k & \tau \end{pmatrix},$$

根据 $\mathcal{R}_0 = \rho(FV^{-1})$ 可得模型 (2) 的基本再生数

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\delta A(p + \mu + \varepsilon\nu)(\tau(\alpha\beta_2 + \beta_1 - \alpha\beta_1) + kn\alpha)}{\tau(\mu + \delta)(\mu + d_1 + m + \gamma_1)((p + \mu)(\mu + \nu) - p\nu)}.$$

定理 1 当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时, 模型 (2) 的无病平衡点 P_0 是局部渐近稳定的; 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 模型 (2) 的无病平衡点 P_0 是不稳定的.

证明 由模型 (2) 可得在无病平衡点 P_0 处的雅可比矩阵 J 为

$$J = \begin{bmatrix} -(\mu + \nu) & 0 & \nu & 0 & 0 \\ 0 & -(\mu + \delta) & 0 & \delta & 0 \\ p & 0 & -(p + \mu) & 0 & 0 \\ A & B & C & -(\mu + d_1 + m + \gamma_1) & k \\ -\alpha n S_0 & \alpha n S_0 + \varepsilon \alpha n V_0 & -\varepsilon \alpha n V_0 & 0 & -\tau \end{bmatrix},$$

计算矩阵 J 的特征多项式可得

$$|\lambda E - J| = \begin{vmatrix} \lambda + (\mu + \nu) & 0 & -\nu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + (\mu + \delta) & 0 & -\delta & 0 \\ -p & 0 & \lambda + (p + \mu) & 0 & 0 \\ -A & -B & -C & \lambda + (\mu + d_1 + m + \gamma_1) & -k \\ \alpha n S_0 & -\alpha n S_0 - \varepsilon \alpha n V_0 & \varepsilon \alpha n V_0 & 0 & \lambda + \tau \end{vmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned} A &= -\alpha\beta_2 S_0 - (1 - \alpha)\beta_1 S_0, \\ B &= \alpha\beta_2 S_0 + (1 - \alpha)\beta_1 S_0 + \varepsilon\alpha\beta_2 V_0 + \varepsilon(1 - \alpha)\beta_1 V_0, \\ C &= -\varepsilon\alpha\beta_2 V_0 - \varepsilon(1 - \alpha)\beta_1 V_0. \end{aligned}$$

进一步, 将 A 、 B 、 C 代入得到如下特征方程

$$\begin{aligned} |\lambda E - J| &= (\lambda + \mu)(\lambda + p + \nu + \mu)(a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

其中 a_0 、 a_1 、 a_2 、 a_3 分别为

$$\begin{cases} a_0 = (\mu + \delta)(\mu + d_1 + m + \gamma_1)\tau(1 - \mathcal{R}_0), \\ a_1 = (\mu + \delta)\tau + (\mu + d_1 + m + \gamma_1)\tau \\ \quad + (\mu + \delta)(\mu + d_1 + m + \gamma_1)\left(1 - \frac{\delta(\alpha\beta_2 + (1 - \alpha)\beta_1)(S_0 + \varepsilon V_0)}{(\mu + \delta)(\mu + d_1 + m + \gamma_1)}\right), \\ a_2 = 2\mu + d_1 + m + \gamma_1 + \tau, \\ a_3 = 1. \end{cases}$$

注意到

$$\frac{\delta(\alpha\beta_2 + (1 - \alpha)\beta_1)(S_0 + \varepsilon V_0)}{(\mu + \delta)(\mu + d_1 + m + \gamma_1)} < \frac{\delta(\alpha\beta_2 + (1 - \alpha)\beta_1 + \alpha n \frac{k}{\tau})(S_0 + \varepsilon V_0)}{(\mu + \delta)(\mu + d_1 + m + \gamma_1)} = \mathcal{R}_0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3.$$

因此, 当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时, $a_0 > 0, a_1 > 0, \Delta_2 > 0$, 又因为 $a_2 > 0, a_3 > 0$, 再根据 Hurwitz 判据^[9]可得无病平衡点 P_0 是局部渐近稳定的, 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 无病平衡点 P_0 是不稳定的.

假设存在地方病平衡点 $P^*(S^*, V^*, E^*, I^*, B^*)$, 则有

$$\begin{cases} A - \alpha(1 - m(I^*))\rho_2(I^*)S^*I^* - (1 - \alpha)\rho_1(I^*)S^*I^* - \alpha nBS^* \\ - \alpha m(I^*)\rho_2(I^*)S^*I^* - (\mu + v)S^* + pV^* = 0, \\ \alpha(1 - m(I^*))\rho_2(I^*)S^*I^* + (1 - \alpha)\rho_1(I^*)S^*I^* + \alpha nB^*S^* \\ + \varepsilon V^*(1 - m(I^*))\rho_2(I^*)I^* + \varepsilon V^*(1 - \alpha)\rho_1(I^*)I^* + \varepsilon \alpha nV^*B^* - (\mu + \delta)E^* = 0, \\ vS^* - pV^* - \mu V^* - \varepsilon \alpha nV^*B^* - \varepsilon V^*(1 - \alpha)\rho_1(I^*)I^* - \varepsilon V^*(1 - m(I^*))\rho_2(I^*)I^* = 0, \\ \delta E^* - (\mu + d_1 + m + \gamma_1)I^* = 0, \\ kI^* - \tau B^* = 0. \end{cases}$$

由上式方程组的第 4 个和第 5 个方程可得

$$B^* = \frac{k}{\tau}I^* \tag{5}$$

$$E^* = \frac{\mu + d_1 + m + \gamma_1}{\delta}I^* \tag{6}$$

将式 (5) 和 (6) 代入方程组中得

$$S^* + \varepsilon V^* = \frac{(S_0 + \varepsilon V_0)(\alpha\beta_2 + (1 - \alpha)\beta_1 + \alpha n\frac{k}{\tau})(\mu(p + \mu + v))}{\mathcal{R}_0(\alpha(1 - m(I))\rho_2 + (1 - \alpha)\rho_1 + \alpha n\frac{k}{\tau})} \tag{7}$$

再将式 (5) 和 (6) 代入方程组中第一式和第三式得到 S^* 和 V^* 关于 I 的表达式

$$S^*(I) = \frac{AM}{MN - pv}, V^*(I) = \frac{Av}{MN - pv} \tag{8}$$

其中 M 和 N 分别为

$$\begin{cases} M = p + \mu + \varepsilon \alpha n\frac{k}{\tau}I^* + \varepsilon(1 - \alpha)\rho_1 I^* + \varepsilon \alpha \left(1 - \frac{I^*}{I^* + \sigma}\right) \rho_2 I^*, \\ N = \alpha \rho_2 I^* + (1 - \alpha)\rho_1 I^* + \mu + v + \frac{\alpha n k I^*}{\tau}. \end{cases}$$

由式 (8) 得

$$S^{*'} = -\frac{A(M'pv + M^2N')}{(MN - pv)^2} < 0, V^{*'} = -\frac{vA(M'N - MN')}{(MN - pv)^2} < 0.$$

定义函数

$$H(I) = S(I) + \varepsilon V(I) - \frac{(S_0 + \varepsilon V_0)(\alpha\beta_2 + (1 - \alpha)\beta_1 + \alpha n\frac{k}{\tau})(\mu(p + \mu + v))}{\mathcal{R}_0(\alpha(1 - m(I))\rho_2(I) + (1 - \alpha)\rho_1(I) + \alpha n\frac{k}{\tau})},$$

则对于所有的 $I \geq 0$, 都有

$$\begin{aligned} H'(I) &= S'(I) + \varepsilon V'(I) - \left(\frac{(S_0 + \varepsilon V_0)(\alpha\beta_2 + (1 - \alpha)\beta_1 + \alpha n\frac{k}{\tau})(\mu(p + \mu + v))}{\mathcal{R}_0(\alpha(1 - m(I))\rho_2 + (1 - \alpha)\rho_1 + \alpha n\frac{k}{\tau})}\right)' \\ &= S'(I) + \varepsilon V'(I) - \Phi\Psi \\ &< 0, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases} \Phi = \frac{(S_0 + \varepsilon V_0)(\alpha\beta_2 + (1 - \alpha)\beta_1 + \alpha n\frac{k}{\tau})(\mu(p + \mu + v))}{\mathcal{R}_0}, \\ \Psi = \frac{\frac{\alpha\sigma}{(I + \sigma)^2} \rho_2(I) + (\alpha(1 - m(I))\beta_{00} + (1 - \alpha)\beta_0)f'(I)}{(\alpha(1 - m(I))\rho_2(I) + (1 - \alpha)\rho_1(I) + \alpha n\frac{k}{\tau})^2}. \end{cases}$$

故 $H(I)$ 关于 I 单调递减. 当 $I = 0$ 时, $H(0) = S_0 + \varepsilon V_0 - ((S_0 + \varepsilon V_0)(\mu(\mu + p + v)))/\mathcal{R}_0$, 可得 $H(0) > 0 \Leftrightarrow \mathcal{R}_0 > \mu(\mu + p + v)$, 令 $X(I)$ 、 $Y(I)$ 、 \bar{Y} 为

$$\begin{cases} X(I) = \alpha\rho_2(I) + (1 - \alpha)\rho_1(I), \\ Y(I) = \alpha(1 - m(I))\rho_2(I) + (1 - \alpha)\rho_1(I) + \alpha n \frac{k}{\tau}, \\ \bar{Y} = \alpha\beta_2 + (1 - \alpha)\beta_1 + \alpha n \frac{k}{\tau}. \end{cases}$$

将 $H(I)$ 通分化简后可得

$$H(I) < 0 \Leftrightarrow \mathcal{R}_0 < \frac{\bar{Y}}{Y(I)}(\mu + \nu + X(I)I)(p + \mu + \nu),$$

代入 $I = A/\mu$, 即

$$\mathcal{R}_0 < \frac{\bar{Y}}{Y(\frac{A}{\mu})}(\mu + \nu + X(\frac{A}{\mu})\frac{A}{\mu})(p + \mu + \varepsilon\nu).$$

综上所述,

- 1) 当 $\mathcal{R}_0 < \mu(p + \mu + \nu) = H$ 时, $H(0) < 0$, 地方病平衡点不存在.
- 2) 当 $\mathcal{R}_0 > (\bar{Y}/Y(A/\mu))(\mu + \nu + X(A/\mu)A/\mu)(p + \mu + \varepsilon\nu) = G$ 时, $H(A/\mu) > 0$, 地方病平衡点不存在.
- 3) 当 $H \leq \mathcal{R}_0 \leq G$ 时, 存在地方病平衡点 $P^*(S^*, E^*, V^*, I^*, B^*)$.

3 无病平衡点的全局渐近稳定性

定理 2 当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时, 模型 (2) 的无病平衡点 $P_0(S_0, V_0, 0, 0, 0)$ 在 Ω 上是全局渐近稳定的.

证明 由文献 [10], 并利用模型 (2) 的无病平衡点 $P_0(S_0, V_0, 0, 0, 0)$ 改写模型为

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = S(A(\frac{1}{S} - \frac{1}{S_0}) + p(\frac{V}{S} - \frac{V_0}{S_0}) - \alpha m(I)\rho_2(I)I - (1 - \alpha)\rho_1(I)I \\ \quad - \alpha nB - \alpha m(I)\rho_2(I)I), \\ \frac{dE}{dt} = (\alpha(1 - m(I))\rho_2(I)I + (1 - \alpha)\rho_1(I)I)(S + \varepsilon V) + \alpha nB((S - S_0) \\ \quad + \varepsilon(V - V_0)) - (\mu + \delta)E, \\ \frac{dV}{dt} = V(v(\frac{S}{V} - \frac{S_0}{V_0}) - \varepsilon\alpha nB - \varepsilon(1 - \alpha)\rho_1(I)I - \varepsilon\alpha(1 - m(I))\rho_2(I)I), \\ \frac{dI}{dt} = \delta E - (\mu + d_1 + m + \gamma_1)I, \\ \frac{dB}{dt} = kI - \tau B. \end{cases}$$

定义 Lyapunov 函数如下

$$L = S - S_0 - S_0 \ln \frac{S}{S_0} + V - V_0 - V_0 \ln \frac{V}{V_0} + E + \frac{\alpha n(S_0 + \varepsilon V_0)}{\tau} B + \frac{\mu + \delta}{\delta} I,$$

则函数 L 的全导数为

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= (S - S_0)[A(\frac{1}{S} - \frac{1}{S_0}) + p(\frac{V}{S} - \frac{V_0}{S_0}) - \alpha m(I)\rho_2(I)I - (1 - \alpha)\rho_1(I)I - \alpha nB \\ &\quad - \alpha m(I)\rho_2(I)I] + (\alpha(1 - m(I))\rho_2(I)I + (1 - \alpha)\rho_1(I)I + \alpha nB)(S + \varepsilon V) \\ &\quad - (\mu + \delta)E + (V - V_0)[v(\frac{S}{V} - \frac{S_0}{V_0}) - \varepsilon\alpha nB - \varepsilon(1 - \alpha)\rho_1(I)I \\ &\quad - \varepsilon\alpha(1 - m(I))\rho_2(I)I] + \frac{\mu + \delta}{\delta}(\delta E - (\mu + d_1 + m + \gamma_1)I) + \frac{\alpha n(S_0 + \varepsilon V_0)}{\tau}(kI - \tau B) \\ &= (S - S_0)[A(\frac{1}{S} - \frac{1}{S_0}) + p(\frac{V}{S} - \frac{V_0}{S_0})] + (V - V_0)v(\frac{S}{V} - \frac{S_0}{V_0}) - (S - S_0)\alpha m(I)\rho_2(I)I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [\alpha(1-m(I))\rho_2(I)I + (1-\alpha)\rho_1(I)I](S_0 + \varepsilon V_0) - \frac{\mu + \delta}{\delta}(\mu + d_1 + m + \gamma_1) + \frac{\alpha n(S_0 + \varepsilon V_0)}{\tau} kI \\
& < (S - S_0) \left[A \left(\frac{1}{S} - \frac{1}{S_0} \right) + p \left(\frac{V}{S} - \frac{V_0}{S_0} \right) \right] + \frac{\mu + \delta}{\delta}(\mu + d_1 + m + \gamma_1) I (\mathcal{R}_0 - 1) \\
& = \mu V_0 \left(3 - \frac{V}{V_0} - \frac{S_0}{S} - \frac{V_0 S}{V S_0} \right) + p V_0 \left(2 - \frac{V_0 S}{V S_0} - \frac{S_0 V}{S V_0} \right) + \mu S_0 \left(2 - \frac{S}{S_0} - \frac{S_0}{S} \right) \\
& \quad + \frac{\mu + \delta}{\delta}(\mu + d_1 + m + \gamma_1) I (\mathcal{R}_0 - 1).
\end{aligned}$$

因此, 当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时, $dL/dt \leq 0$, 其中 $dL/dt = 0$ 当且仅当 $S = S_0$ 、 $V = V_0$ 、 $I = I_0$. 故单点集 P_0 是集合 $\{(S, V, E, I, B) \in \Omega \mid dL/dt = 0\}$ 上的最大不变集^[11]. 由定理 1 和 LaSalle 不变集原理^[12]知, 当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时, 无病平衡点 P_0 是全局渐近稳定的.

4 数值模拟

本节对模型 (2) 进行数值模拟, 取函数 $f(I) = I/(I + \theta)$ ($\theta > 0$ 为媒体报道下易感者对疾病信息认识的偏差程度). 选取参数 $A = 0.01$ 、 $\alpha = 0.05$ 、 $\beta_1 = 0.5$ 、 $\beta_2 = 0.9$ 、 $\beta_0 = 0.45$ 、 $\beta_{00} = 0.85$ 、 $\sigma = 200$ 、 $n = 0.1$ 、 $m = 0.2$ 、 $\mu = 0.0131$ 、 $v = 0.9$ 、 $\varepsilon = 0.08$ 、 $\delta = 0.6$ 、 $p = 0.95$ 、 $d_1 = 0.01$ 、 $d_2 = 0.007$ 、 $\gamma_1 = 0.15$ 、 $\gamma_2 = 0.01$ 、 $\tau = 3.6$ 、 $k = 20$ 、 $\theta = 0.0076$. 容易计算出 $\mathcal{R}_0 = 0.6094 < 1$. 借助 Matlab 给出模型 (2) 的解随着时间 t 的变化轨线 (如图 2 所示), 由图 2 可知, 无病平衡点 P_0 是全局渐近稳定的, 即疾病会灭绝.

选取参数 $A = 0.1$ 、 $\alpha = 0.85$ 、 $\beta_1 = 0.5$ 、 $\beta_2 = 0.9$ 、 $\beta_0 = 0.48$ 、 $\beta_{00} = 0.88$ 、 $\sigma = 200$ 、 $n = 0.05$ 、 $m = 0.96$ 、 $\mu = 0.0131$ 、 $v = 0.96$ 、 $\varepsilon = 0.2$ 、 $\delta = 0.9$ 、 $p = 0.95$ 、 $d_1 = 0.02$ 、 $d_2 = 0.01$ 、 $\gamma_1 = 0.08$ 、 $\gamma_2 = 0.2$ 、 $\tau = 3.6$ 、 $k = 15$ 、 $\theta = 0.0076$, 简单计算可得 $\mathcal{R}_0 = 4.2843 > 1$, $H = 0.0252$ 和 $G = 6.7424$, 由定理 2 可知, 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 且满足 $H < \mathcal{R}_0 < G$ 时存在地方病平衡点 P^* , 借助 Matlab 给出模型 (2) 的解随着时间 t 的变化轨线 (如图 3 所示), 由图 3 可知, 地方病平衡点 P^* 存在且是全局渐近稳定的, 即疾病会持续存在.

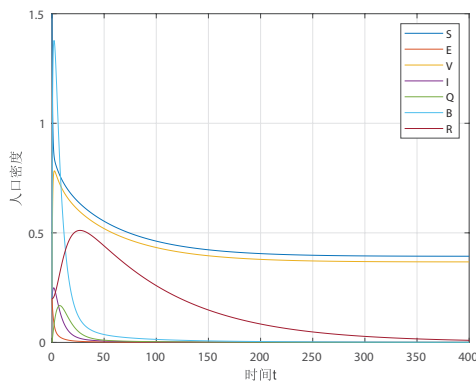


图 2 无病平衡点的全局渐近稳定性

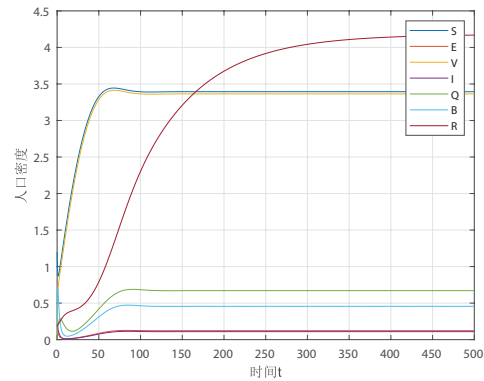


图 3 地方病平衡点的全局渐近稳定性

5 结论与展望

本文研究了一类具有环境传播、疫苗接种及媒体报道等因素影响的 SEVIQBR 模型. 通过比较原理得到模型的正不变集, 借助下一代算子方法推导出疾病的基本再生数 \mathcal{R}_0 . 同时, 借助 Hurwitz 判据分析得出: 当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时无病平衡点是局部渐近稳定的, 通过构造 Lyapunov 函数得到了无病平衡点的全局渐近稳定性. 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 且满足其它条件时, 模型存在地方病平衡点, 最后数值模拟验证了在地方病平衡点存在时, 它是全局渐近稳定的. 由于本文建立的模型维数较高且各仓室之间耦合性强, 关于地方病平衡点全局渐近稳定性的分析存在一定的困难, 这将是后续值得深入探讨的问题.

参考文献:

- [1] LUO Y T, ZHANG L, TENG Z D, et al. Analysis of a general multi-group reaction-diffusion epidemic model with nonlinear incidence and temporary acquired immunity[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2021, 182: 428-455.
- [2] KHARAZIAN N A, MAGPANTAY F M G. The honeymoon period after mass vaccination[J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2020, 18(1): 354-372.

- [3] 李学志,党艳霞. 一类具有接种疫苗时滞的两菌株传染病模型的 Hopf 分支[J]. 应用泛函分析学报, 2017, 19(1): 60-70.
LI X Z, DANG Y X. Hopf bifurcation of a two-strain epidemic models with vaccination delay[J]. Acta Analysis Functionalis Applicata, 2017, 19(1): 60-70. (in Chinese)
- [4] 桑瑞,张龙,吴浩. 媒体诱导迁移率变化的双斑块 SIRS 传染病模型研究[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2023, 40(1): 49-56+60.
SANG R, ZHANG L, WU H. Media-induced migration changes in a two-patch SIRS epidemic model[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2023, 40(1): 49-56+60. (in Chinese)
- [5] 郭婷,滕志东. 一类与环境有关的传染病模型的稳定性分析[J]. 新疆大学学报(自然科学版), 2013, 30(4): 401-407.
GUO T, TENG Z D. Stability analysis of an SIQR epidemic model with environmental component[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition), 2013, 30(4): 401-407. (in Chinese)
- [6] 张钰倩,张太雷,侯雯珊,等. 一类具有媒体效应和追踪隔离的 SIQR 时滞传染病模型[J]. 浙江大学学报(理学版), 2022, 49(2): 159-169.
ZHANG Y Q, ZHANG T L, HOU W S, et al. A delayed SIQR epidemic model with media effect and tracking quarantine[J]. Journal of Zhejiang University(Science Edition), 2022, 49(2): 159-169. (in Chinese)
- [7] 王荣年. 反应扩散系统的比较原理和动力学性态[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2006.
WANG R N. Comparative principles and dynamical properties of reaction-diffusion systems[D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2006. (in Chinese)
- [8] DIEKMANN O, HEESTERBEEK J A P, METZ J A J. On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations[J]. Journal of Mathematical Biology, 1990, 28(4): 365-382.
- [9] 李从清. 系统稳定性的劳斯判据与赫尔维茨判据的等价性论证[J]. 天津城市建设学院学报, 2009, 15(3): 207-210.
LI C Q. Equivalence demonstration of Routh criterion and Hurwitz criterion for system stability[J]. Journal of Tianjin Institute of Urban Construction, 2009, 15(3): 207-210. (in Chinese)
- [10] 赵爱民,任晓晓,刘桂荣. 考虑环境传播的肺结核模型的定性分析[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2021, 44(1): 20-26.
ZHAO A M, REN X X, LIU G R. Qualitative analysis of environmentally transmitted tuberculosis model[J]. Journal of Shanxi University(Natural Science Edition), 2021, 44(1): 20-26. (in Chinese)
- [11] DING C X, QIU Z P, ZHU H P. Multi-host transmission dynamics of schistosomiasis and its optimal control[J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2015, 12(5): 983-1006.
- [12] 徐润. 关于李雅普诺夫稳定性理论若干定理的推广[J]. 沈阳师范大学学报(自然科学版), 2003, 21(2): 87-90.
XU R. The generalization of certain theorems on Liapunov stability theory of difference equation group[J]. Journal of Shenyang Normal University(Natural Science Edition), 2003, 21(2): 87-90. (in Chinese)

责任编辑: 赵新科