

太阳图的谱及其能量*

吴洋洋, 马小玲[†]

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

摘要: 设太阳图 $C(q_1, q_2, \dots, q_r)$ 是顶点数为 $n = r + \sum_{i=1}^r q_i$ ($r \geq 3$) 的单圈图, 其满足删除所有的悬挂点后得到的图是圈 C_r . 应用广义 Fiedler 引理, 分别研究了太阳图 $C(q_1, q_2, \dots, q_r)$ 的邻接谱、拉普拉斯谱和 Randić 谱. 最后, 作为这些结果的应用, 分别考虑了偶太阳图的上界和 Randić 能量的上界.

关键词: 太阳图; 邻接谱; 拉普拉斯谱; Randić 谱; Randić 能量

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2023.01.17.0001

中图分类号: O157.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2023)05-0550-010

引文格式: 吴洋洋, 马小玲. 太阳图的谱及其能量[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2023, 40(5): 550-559.

英文引文格式: WU Yangyang, MA Xiaoling. The spectra of sun graph and their energy[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2023, 40(5): 550-559.

The Spectra of Sun Graph and Their Energy

WU Yangyang, MA Xiaoling

(School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China)

Abstract: Sun graph $C(q_1, q_2, \dots, q_r)$ is a unicyclic graph of order $n = r + \sum_{i=1}^r q_i$ ($r \geq 3$) such that removing all its pendent vertices give rise to a cycle C_r . Applying generalized Fiedler lemma, we obtain the adjacency spectra, Laplacian spectra and Randić spectra of sun graph $C(q_1, q_2, \dots, q_r)$, respectively. Finally, as applications of these results, we derive upper bounds of the energy and the Randić energy of even sun graph, respectively.

Key words: sun graph; adjacency spectra; Laplacian spectra; Randić spectra; Randić energy

0 引言

本文考虑的图均为有限简单无向图. 设图 $G = (V(G), E(G))$, 其中 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是图 G 的顶点集, $E(G)$ 是图 G 的边集, 并且设图 G 的点数 $n = |V(G)|$. 若 $u \in V(G)$, 则 $N_G(u) = \{v \in V(G) : uv \in E(G)\}$. 在图 G 中顶点 u 的度用 $d_G(u)$ 表示, 其为在图 G 中与点 u 所关联的边的数目, 即: $d_G(u) = |N_G(u)|$.

图 G 的邻接矩阵 $A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$ 是对称矩阵, 如果 $v_i v_j \in E(G)$, 那么 $a_{ij} = 1$, 否则 $a_{ij} = 0$. 邻接矩阵 $A(G)$ 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 也是图 G 的特征值^[1-2]. 如果图 G 有 m 个不同的特征值, 则 $\sigma(G)$ 表示邻接矩阵 $A(G)$ 的谱, 记为 $\sigma_A(G) = \{\lambda_1^{(s_1)}, \dots, \lambda_j^{(s_j)}, \dots, \lambda_m^{(s_m)}\}$, 其中 s_j 是特征值 λ_j 的重数, $1 \leq j \leq m$.

若邻接矩阵 $A(G)$ 的特征值为 λ , 其对应的特征向量为 u , 用 (λ, μ) 表示邻接矩阵 $A(G)$ 的一个特征对. 图 G 邻接矩阵的特征对也叫做图 G 的特征对. 图 G 的拉普拉斯矩阵 $L(G) = D(G) - A(G)$, 其中 $D(G)$ 是图 G 的度对角矩阵, 即: $D(G) = \text{diag}(d_G(v_1), d_G(v_2), \dots, d_G(v_n))$. 图 G 的拉普拉斯谱用 $\sigma_L(G)$ 表示. 图 G 的 Randić 矩阵 $R(G) = (r_{ij})_{n \times n}$, 如果 $v_i v_j \in E(G)$, 那么 $r_{ij} = 1/\sqrt{d_i d_j}$, 否则 $r_{ij} = 0$. 图 G 的 Randić 谱用 $\sigma_R(G)$ 表示^[3]. 任意 n 阶对称矩阵 C , 有特征值 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 其谱用 $\sigma(C)$ 表示.

图 G 的能量定义为 $E(G) = \sum_{j=1}^n |\lambda_j|$. 类似的, 若图 G 的 Randić 矩阵的特征值为 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, 则图 G 的 Randić 能量定义为 $E_R(G) = \sum_{j=1}^n |\beta_j|$.

设图 G_1 和图 G_2 是两个不相交的简单图, 两个图的连接图, 记为 $G_1 \vee G_2$, 是由图 G_1 的每个顶点与图 G_2 的每个顶点相连得到的图 G , 即: 图 G 的顶点集为 $V(G_1) \cup V(G_2)$, 边集为 $E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{ij : i \in V(G_1), j \in V(G_2)\}$.

* 收稿日期: 2023-01-17

基金项目: 国家自然科学基金“图运算的谱性质及其相关问题研究”(12161085); 新疆维吾尔自治区自然科学基金“基于图矩阵谱的拓扑参数的图论问题研究”(2021D01C069).

作者简介: 吴洋洋(1998-), 女, 硕士生, 从事图论及其应用的研究, E-mail: 1315935605@qq.com.

[†] 通讯作者: 马小玲(1981-), 女, 博士, 教授, 从事图论及其应用的研究, E-mail: mxling2018@163.com.

设 F 为 k 个图 G_1, G_2, \dots, G_k 构成的集合, 其中每个图 G_i 有 n_i 个顶点, 其中 $i=1, 2, \dots, k$. 设 H 是点集为 $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ 的图. 若 $v_i v_j \in E(H)$, 则图 G_i 的每个顶点与图 G_j 的每个顶点相连. k 个图 G_1, G_2, \dots, G_k 的 H -联图^[4], 记为 $G = \bigvee_H \{G_i, v_i \in V(H)\}$, 点集为 $V(G) = \bigcup_{i=1}^k V(G_i)$, 边集为

$$E(G) = \left(\bigcup_{i=1}^k E(G_i) \right) \cup \left(\bigcup_{uw \in E(H)} \{ij : i \in V(G_u), j \in V(G_w)\} \right).$$

特别的, 当 $H = K_2$ 时, H -联图是通常的两个图的连接图. H -联图的定义与广义图的定义一致, 广义图记为 $H[G_1, G_2, \dots, G_k]$ ^[5], 其中 H 是 k 个顶点的任意图. 为了更好地理解 H -联图的定义, 这里举一个例子, 如图 1 所示. 其中 $H = P_3, F = \{K_4, K_2, C_3\}$.

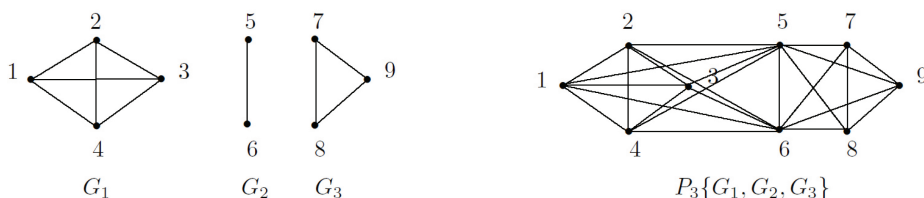


图 1 $F = K_4, K_2, C_3$ 的 P_3 -联图 $\bigvee_{P_3} \{K_4, K_2, C_3\}$

设太阳图 $C(q_1, q_2, \dots, q_r)$ 是顶点数 $n = r + \sum_{i=1}^r q_i$ 的单圈图, 其满足删除所有的悬挂点后得到的图是圈 C_r , 其中 $r \geq 3, q_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, r$. 特别的, 对于任意的 i , 当 $q_i = 1$ 时, 记太阳图 $C(1, 1, \dots, 1) = H_0$. 我们对图 H_0 中的顶点如下标号 (如图 2 所示):

- 1) 我们从 1 到 r 开始标记圈 C_r 中的顶点;
- 2) 标记圈 C_r 上点 i 处的悬挂顶点为 $r+i, 1 \leq i \leq r$.

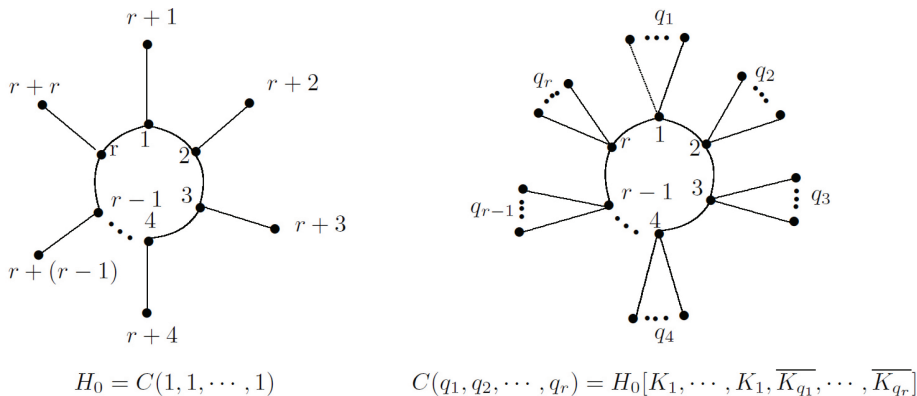


图 2 图 H_0 及图 $C(q_1, q_2, \dots, q_r) = H_0[K_1, \dots, K_1, \overline{K_{q_1}}, \dots, \overline{K_{q_r}}]$

根据上述的标号, 可知图 H_0 的邻接矩阵为

$$A(H_0) = \begin{pmatrix} A(C_r) & I_r \\ I_r & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

其中: $A(C_r)$ 为圈 C_r 的邻接矩阵.

为了方便表示, 太阳图 $C(q_1, q_2, \dots, q_r)$ 可表示为广义图 $H[G_1, G_2, \dots, G_{2r}]$, 其中 $H = H_0$, 而 $\{G_1, G_2, \dots, G_{2r}\} = \{K_1, \dots, K_1, \overline{K_{q_1}}, \dots, \overline{K_{q_r}}\}$, 即

$$C(q_1, q_2, \dots, q_r) = H_0[K_1, \dots, K_1, \overline{K_{q_1}}, \dots, \overline{K_{q_r}}] \tag{2}$$

并且集合 $\{G_1, G_2, \dots, G_{2r}\}$ 中这 $2r$ 个图的顶点个数 n_i 为

$$n_i = \begin{cases} 1, & i = 1, 2, \dots, r; \\ q_{i-r}, & i = r+1, r+2, \dots, 2r. \end{cases}$$

众所周知,图矩阵的谱信息可以反映对应图的一些结构性性质.因此,图的谱的计算成为图论领域中广泛关注的问题.此外,图谱理论的方法已被应用于量子物理、化学、计算机科学等多个领域^[6-8].近年来,通过图运算构造的图的谱性质得到了学者们广泛的研究.常见的图运算有:笛卡儿积运算、冠运算、字典序积运算等.如,Cheng等^[9]研究了冠运算图 $G_1 \circ K_{m_1, m_2}$ 的邻接谱问题.卢志琴等^[10]研究了两种分裂点连接运算图的Randić(规范化拉普拉斯、规范化无符号拉普拉斯)谱,并计算了新构造图的度基尔霍夫指数和生成树的数目.

1974年,Fiedler^[11]给出了由两个对称矩阵确定的新矩阵的特征值与原矩阵的特征值之间关系的Fiedler引理(引理1).2010年,在Fiedler引理的基础上,Robbiano等^[12]得到了图的特征空间,并将其结果应用到图的能量上.2011年,Cardoso等^[13]将Fiedler引理应用到两个正则图的连接运算上,并且将Fiedler引理推广到 k 个对称矩阵上.接着,利用推广的结论,研究了 k 个正则图的 H -联运算图的特征值问题,此时 $H = P_k$,即:点数为 k 的一条路.2013年,Cardoso等^[4]进一步推广了Fiedler引理,考虑了 k 个任意图的 H -联运算图的拉普拉斯特征值问题,同时给出了 k 个正则图的 H -联运算图的邻接特征值,其中 H 是任意图.2017年,Andrade等^[14]根据Fiedler引理的推广结论,研究了 H -联图的Randić矩阵的特征值及其相关问题.

根据前人研究,我们应用广义Fiedler引理,分别研究了太阳图的邻接谱、拉普拉斯谱和Randić谱.最后,作为这些谱的应用,分别给出了偶太阳图能量的上界和Randić能量的上界.

1 广义Fiedler引理及其应用

在这部分,我们首先列出Fiedler引理及广义Fiedler引理,并且给出运用广义Fiedler引理得到 H -联图的邻接谱、拉普拉斯谱和Randić谱,这些内容将在我们后续的研究中起到十分重要的作用.

引理1^[11](Fiedler引理) 设 A 是 m 阶对称矩阵,特征对为 $(\alpha_i, u_i), i = 1, 2, \dots, m$. 设 B 是 n 阶对称矩阵,其特征对为 $(\beta_i, v_i), i = 1, 2, \dots, n$. 假设 $\|u_1\| = 1 = \|v_1\|$, 则对任意实数 ρ , 矩阵

$$C = \begin{pmatrix} A & \rho u_1 v_1^T \\ \rho v_1 u_1^T & B \end{pmatrix}$$

的特征值为 $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n, \gamma_1, \gamma_2$, 其中 γ_1, γ_2 是矩阵 $\hat{C} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \rho \\ \rho & \beta_1 \end{pmatrix}$ 的特征值.

引理2^[4](广义Fiedler引理) 设有 k 个 m_j 阶对称矩阵 A_j , 每个矩阵的特征对为 $(\alpha_{r,j}, u_{r,j})$, 其中 $r = 1, 2, \dots, m_j, j = 1, 2, \dots, k$. 假设每个矩阵的特征向量 $u_{r,j}$ 是正交的, 则对任意 $k(k-1)/2$ 个实数 $\rho_{1,2}, \rho_{1,3}, \dots, \rho_{1,k}, \rho_{2,3}, \dots, \rho_{2,k}, \dots, \rho_{k-1,k}$, 矩阵

$$C = \begin{pmatrix} A_1 & \rho_{1,2} u_{i_1,1} u_{i_2,2}^T & \cdots & \rho_{1,k-1} u_{i_1,1} u_{i_{k-1},k-1}^T & \rho_{1,k} u_{i_1,1} u_{i_k,k}^T \\ \rho_{1,2} u_{i_2,2} u_{i_1,1}^T & A_2 & \cdots & \rho_{2,k-1} u_{i_2,2} u_{i_{k-1},k-1}^T & \rho_{2,k} u_{i_2,2} u_{i_k,k}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{1,k-1} u_{i_{k-1},k-1} u_{i_1,1}^T & \rho_{2,k-1} u_{i_{k-1},k-1} u_{i_2,2}^T & \cdots & A_{k-1} & \rho_{k-1,k} u_{i_{k-1},k-1} u_{i_k,k}^T \\ \rho_{1,k} u_{i_k,k} u_{i_1,1}^T & \rho_{2,k} u_{i_k,k} u_{i_2,2}^T & \cdots & \rho_{k-1,k} u_{i_k,k} u_{i_{k-1},k-1}^T & A_k \end{pmatrix}$$

的特征值为 $(\bigcup_{j=1}^k \{\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \dots, \alpha_{m_j,j} \setminus \{\alpha_{i_j,j}\}\}) \cup \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\}$, 其中 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ 是矩阵

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \alpha_{i_1,1} & \rho_{1,2} & \cdots & \rho_{1,k-1} & \rho_{1,k} \\ \rho_{1,2} & \alpha_{i_2,2} & \cdots & \rho_{2,k-1} & \rho_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{1,k-1} & \rho_{2,k-1} & \cdots & \alpha_{i_{k-1},k-1} & \rho_{k-1,k} \\ \rho_{1,k} & \rho_{2,k} & \cdots & \rho_{k-1,k} & \alpha_{i_k,k} \end{pmatrix} \text{的特征值.}$$

值得注意的是 $\alpha_{i_j,j}$ 是 $(\alpha_{1,j}, \dots, \alpha_{m_j,j})$ 中的元素, $j = 1, 2, \dots, k$.

定理1^[4] 设 H 是 k 个顶点的图, G_j 是 n_j 个顶点的 p_j -正则图, 其邻接谱为 $\sigma_A(G_j)$, 其中 $p_j \geq 0, n_j \geq 1$,

$j = 1, 2, \dots, k$. 如果图 $G = H[G_1, G_2, \dots, G_k]$, 则

$$\sigma_A(G) = \left(\bigcup_{j=1}^k (\sigma_A(G_j) \setminus \{p_j\}) \right) \cup \sigma(\widehat{C}),$$

其中

$$\widehat{C} = \begin{pmatrix} p_1 & \rho_{1,2} & \cdots & \rho_{1,k-1} & \rho_{1,k} \\ \rho_{1,2} & p_2 & \cdots & \rho_{2,k-1} & \rho_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{1,k-1} & \rho_{2,k-1} & \cdots & p_{k-1} & \rho_{k-1,k} \\ \rho_{1,k} & \rho_{2,k} & \cdots & \rho_{k-1,k} & p_k \end{pmatrix} \quad (3)$$

且 $\rho_{i,j} = \delta_{ij} \sqrt{n_i n_j}$, 如果 $ij \in E(H)$, $\delta_{ij} = 1$, 否则 $\delta_{ij} = 0$, $i = 1, 2, \dots, k-1$, $j = i+1, i+2, \dots, k$.

特别的, 对于 $j = 1, 2, \dots, k$, 如果 $p_j = 0$, 则 $\widehat{C} = \Lambda \mathbf{A}(H) \Lambda$, 其中 $\Lambda = \text{diag}(\sqrt{n_1}, \sqrt{n_2}, \dots, \sqrt{n_k})$.

定理 2^[4] 设 H 是 k 个顶点的图, G_j 是 n_j 个顶点的图, 其拉普拉斯谱为 $\sigma_L(G_j)$, 其中 $j = 1, 2, \dots, k$. 如果图 $G = H[G_1, G_2, \dots, G_k]$, 则

$$\sigma_L(G) = \left(\bigcup_{j=1}^k (N_j + (\sigma_L(G_j) \setminus \{0\})) \right) \cup \sigma(\widetilde{C}),$$

其中

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} N_1 & -\rho_{1,2} & \cdots & -\rho_{1,k-1} & -\rho_{1,k} \\ -\rho_{1,2} & N_2 & \cdots & -\rho_{2,k-1} & -\rho_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\rho_{1,k-1} & -\rho_{2,k-1} & \cdots & N_{k-1} & -\rho_{k-1,k} \\ -\rho_{1,k} & -\rho_{2,k} & \cdots & -\rho_{k-1,k} & N_k \end{pmatrix} \quad (4)$$

此时, $\rho_{i,j} = \delta_{ij} \sqrt{n_i n_j}$, 如果 $ij \in E(H)$, $\delta_{ij} = 1$, 否则 $\delta_{ij} = 0$, 且 $N_j + (\sigma_L(G_j) \setminus \{0\})$ 表示在 $(\sigma_L(G_j) \setminus \{0\})$ 中每个元素加 N_j , $N_j = \sum_{i \in N_H(j)} n_i$, $i = 1, 2, \dots, k-1$, $j = i+1, i+2, \dots, k$.

定理 3^[14] 设 H 是 k 个顶点的图, G_j 是 n_j 个顶点的 p_j -正则图, 其邻接谱为 $\sigma_A(G_j)$, 其中 $p_j \geq 0$, $n_j \geq 1$, $j = 1, 2, \dots, k$. 如果图 $G = H[G_1, G_2, \dots, G_k]$, 那么图 G 的 Randić 谱

$$\sigma_R(G) = \bigcup_{j=1}^k \left\{ \frac{\lambda}{N_j + p_j} : \lambda \in \sigma_A(G_j) \setminus \{p_j\} \right\} \cup \sigma(\widehat{\Gamma}),$$

其中 $N_j = \sum_{i \in N_H(j)} n_i$, $j = 1, 2, \dots, k$,

$$\widehat{\Gamma} = \begin{pmatrix} \frac{p_1}{N_1 + p_1} & \rho_{1,2} & \cdots & \rho_{1,k-1} & \rho_{1,k} \\ \rho_{1,2} & \frac{p_2}{N_2 + p_2} & \cdots & \rho_{2,k-1} & \rho_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \rho_{1,k-1} & \rho_{2,k-1} & \cdots & \frac{p_{k-1}}{N_{k-1} + p_{k-1}} & \rho_{k-1,k} \\ \rho_{1,k} & \rho_{2,k} & \cdots & \rho_{k-1,k} & \frac{p_k}{N_k + p_k} \end{pmatrix} \quad (5)$$

并且

$$\rho_{i,j} = \delta_{ij} \frac{\sqrt{n_i n_j}}{\sqrt{(N_i + p_i)(N_j + p_j)}},$$

如果 $ij \in E(H)$, $\delta_{ij} = 1$, 否则 $\delta_{ij} = 0$, $i = 1, 2, \dots, k-1$, $j = i+1, i+2, \dots, k$.

值得注意的是, 当 $p_j > 0$ 时, p_j -正则图 G_j 的 Randić 矩阵为 $\mathbf{R}(G_j) = \mathbf{A}(G_j)/p_j$. 如果 $p_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, k$, 则 $\widehat{\Gamma} = \Omega \mathbf{A}(H) \Omega$, 其中 $\Omega = \text{diag}\{\sqrt{n_1/N_1}, \sqrt{n_2/N_2}, \dots, \sqrt{n_k/N_k}\}$.

2 太阳图的邻接谱、拉普拉斯谱和 Randić 谱

对于太阳图 $C(q_1, q_2, \dots, q_r) = H_0[K_1, \dots, K_1, \overline{K_{q_1}}, \dots, \overline{K_{q_r}}]$, 利用定理 1~3, 我们分别得到太阳图的邻接谱、拉普拉斯谱及 Randić 谱.

定理 4 设 $H_0 = C(1, 1, \dots, 1)$ 是 $2r$ 个点的太阳图(见图 2), 如果 $G = C(q_1, q_2, \dots, q_r) = H_0[K_1, \dots, K_1, \overline{K_{q_1}}, \dots, \overline{K_{q_r}}]$ 是 $n = r + \sum_{i=1}^r q_i$ 个点的太阳图, 则

$$\sigma_A(G) = \{0^{(\sum_{i=1}^r (q_i - 1))}\} \cup \sigma(\widehat{C}),$$

其中

$$\widehat{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(C_r) & \Sigma_r \\ \Sigma_r & 0 \end{pmatrix}_{2r \times 2r} \tag{6}$$

且 $\Sigma_r = \text{diag}(\sqrt{q_1}, \sqrt{q_2}, \dots, \sqrt{q_r})$.

注 1 根据定理 1, 对于图 $G = C(q_1, q_2, \dots, q_r) = H_0[K_1, \dots, K_1, \overline{K_{q_1}}, \dots, \overline{K_{q_r}}]$ 可知, 图 G 的邻接谱与 r 个 K_1 的邻接谱 ($\sigma_A(K_1) = \{0\}$) 和 r 个有 q_i 个顶点的 $\overline{K_{q_i}}$ 的邻接谱 ($\sigma_A(\overline{K_{q_i}}) = \{0^{(q_i)}\}$) 有关, 其中 $i = 1, 2, \dots, r$. 因为对于 $j = 1, 2, \dots, 2r$, 总是有 $p_j = 0$, 所以 $\widehat{C} = \Lambda_{2r} \mathbf{A}(H_0) \Lambda_{2r}$, 其中 $\Lambda_{2r} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, \sqrt{q_1}, \sqrt{q_2}, \dots, \sqrt{q_r})$. 因为 $H_0 = C(1, 1, \dots, 1)$, 所以很容易验证 \widehat{C} 如式 (6) 所示.

例 1 设 $C(4, 2, 3, 2) = H_0[K_1, K_1, K_1, K_1, \overline{K_4}, \overline{K_2}, \overline{K_3}, \overline{K_2}]$ 是 15 个顶点的太阳图. 由此可知 $q_1 = 4, q_2 = 2, q_3 = 3, q_4 = 2$, 因此根据定理 4, 可知 $\sigma_A(C(4, 2, 3, 2)) = \{0^{(7)}\} \cup \sigma(\widehat{C})$, 其中

$$\widehat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \sqrt{4} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

经过简单计算, 我们有 $\sigma(\widehat{C}) = \{\pm 2.955\ 6, \pm 1.863\ 7, \pm 1.414\ 2, \pm 0.889\ 4\}$.

定理 5 设 $H_0 = C(1, 1, \dots, 1)$ 是 $2r$ 个点的太阳图(见图 2), 则 $r + \sum_{i=1}^r q_i$ 个点的太阳图 $G = C(q_1, q_2, \dots, q_r) = H_0[K_1, \dots, K_1, \overline{K_{q_1}}, \dots, \overline{K_{q_r}}]$ 的拉普拉斯谱为

$$\sigma_L(G) = \left\{ \bigcup_{j=r+1}^{2r} N_j + 0^{(\sum_{i=1}^r (q_i - 1))} \right\} \cup \sigma(\widetilde{C}),$$

其中

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}(C_r) - \mathbf{A}(C_r) & -\Sigma_r \\ -\Sigma_r & I_r \end{pmatrix}_{2r \times 2r} \tag{7}$$

且

$$N_i = \begin{cases} q_i + 2, & i = 1, 2, \dots, r; \\ 1, & i = r + 1, r + 2, \dots, 2r. \end{cases}$$

而 $\Sigma_r = \text{diag}(\sqrt{q_1}, \sqrt{q_2}, \dots, \sqrt{q_r})$ 并且 $\mathbf{D}(C_r)$ 是图 C_r 的度对角矩阵.

注 2 根据定理 2, 对于图 $G = C(q_1, q_2, \dots, q_r) = H_0[K_1, \dots, K_1, \overline{K_{q_1}}, \dots, \overline{K_{q_r}}]$ 可知, 图 G 的拉普拉斯谱与 r 个 K_1 的拉普拉斯谱 ($\sigma_L(K_1) = \{0\}$) 和 r 个有 q_i 个顶点的 $\overline{K_{q_i}}$ 的拉普拉斯谱 ($\sigma_L(\overline{K_{q_i}}) = \{0^{(q_i)}\}$) 有关, 其中 $i = 1, 2, \dots, r$. 当 $i = 1, 2, \dots, r$ 时, 邻点 $N_i = q_i + 2$; 当 $i = r + 1, r + 2, \dots, 2r$ 时, 邻点 $N_i = 1$. 根据 H_0 的结构, 顶点 1 与顶点 2, $r, r + 1$ 相邻, 所以 $\rho_{1,2} = 1, \rho_{1,r} = 1, \rho_{1,r+1} = \sqrt{q_1}$, 以此类推, 很容易验证 \widetilde{C} 如式 (7) 所示.

例 2 设 $C(4, 2, 3, 2) = H_0[K_1, K_1, K_1, K_1, \overline{K}_4, \overline{K}_2, \overline{K}_3, \overline{K}_2]$ 是 15 个顶点的太阳图. 由此可知 $q_1 = 4, q_2 = 2, q_3 = 3, q_4 = 2, N_1 = 6, N_2 = 4, N_3 = 5, N_4 = 4, N_5 = 1, N_6 = 1, N_7 = 1, N_8 = 1$. 因此根据式 (7), 可知

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & -1 & -\sqrt{4} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{4} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

经过简单计算, 由定理 5, 我们得到 $\sigma_L(C(4, 2, 3, 2)) = \{1^{(7)}\} \cup \{0, 0.325\ 0, 0.438\ 4, 0.574\ 0, 3.537\ 1, 4.561\ 6, 6.052\ 3, 7.511\ 5\}$.

定理 6 设 $H_0 = C(1, 1, \dots, 1)$ 是 $2r$ 个点的太阳图 (见图 2). 如果 $G = C(q_1, q_2, \dots, q_r) = H_0[K_1, \dots, K_1, \overline{K}_{q_1}, \dots, \overline{K}_{q_r}]$ 是 $n = r + \sum_{i=1}^r q_i$ 个点的太阳图, 则图 G 的 Randić 谱为

$$\sigma_R(G) = \{0^{(\sum_{i=1}^r (q_i - 1))}\} \cup \sigma(\hat{\Gamma}),$$

其中

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} 1 & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{(q_1+2)(q_2+2)}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{(q_1+2)(q_r+2)}} & \sqrt{\frac{q_1}{q_1+2}} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{(q_1+2)(q_2+2)}} & 0 & \dots & 0 & 0 & \sqrt{\frac{q_2}{q_2+2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r & \frac{1}{\sqrt{(q_1+2)(q_r+2)}} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \sqrt{\frac{q_r}{q_r+2}} \\ \hline \sqrt{\frac{q_1}{q_1+2}} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ r+1 & 0 & \sqrt{\frac{q_2}{q_2+2}} & \dots & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ r+2 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r+r & 0 & 0 & \dots & \sqrt{\frac{q_r}{q_r+2}} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \end{pmatrix} \quad (8)$$

注 3 根据定理 3, 对于图 $G = C(q_1, q_2, \dots, q_r) = H_0[K_1, \dots, K_1, \overline{K}_{q_1}, \dots, \overline{K}_{q_r}]$, 我们可知图 G 的 Randić 谱与 r 个 K_1 的邻接谱 ($\sigma_R(K_1) = \{0\}$) 和 r 个有 q_i 个顶点的 \overline{K}_{q_i} 的邻接谱 ($\sigma_R(\overline{K}_{q_i}) = \{0^{(q_i)}\}$) 有关, 其中 $i = 1, 2, \dots, r$. 因为对于 $j = 1, 2, \dots, 2r$, 总是有 $p_j = 0$, 所以 $\hat{\Gamma} = \Omega A(H_0) \Omega$, 其中 $\Omega = \text{diag}(\sqrt{1/(q_1+2)}, \sqrt{1/(q_2+2)}, \dots, \sqrt{1/(q_r+2)}, \sqrt{q_1}, \sqrt{q_2}, \dots, \sqrt{q_r})$. 因为 $H_0 = C(1, 1, \dots, 1)$ (见图 2), 所以很容易验证 $\hat{\Gamma}$ 如式 (8) 所示.

例 3 设 $C(4, 2, 3, 2) = H_0[K_1, K_1, K_1, K_1, \overline{K}_4, \overline{K}_2, \overline{K}_3, \overline{K}_2]$ 是 15 个顶点的太阳图, 由此可知 $q_1 = 4, q_2 = 2, q_3 = 3, q_4 = 2$, 因此利用定理 6, 可知 $\sigma_R(C(4, 2, 3, 2)) = \{0^{(7)}\} \cup \sigma(\hat{\Gamma})$, 其中

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{24}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{24}} & \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{24}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{20}} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{20}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{20}} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{24}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{20}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} \\ \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

经过简单计算, 我们有 $\sigma(\widehat{\Gamma}) = \{\pm 1, \pm 0.796\ 9, \pm 0.707\ 1, \pm 0.561\ 2\}$.

3 太阳图的能量和 Randić 能量的上界

根据太阳图的邻接谱(定理 4)及 Randić 谱(定理 6)的结论, 我们将考虑太阳图的能量上界和其 Randić 能量的上界. 在给出主要结论之前, 我们先来回忆一些有用的已知概念及重要定理.

定义 1 置换矩阵是只有 0 和 1 组成的方阵, 每一行和每一列都恰好有一个 1, 其余位置为 0.

定义 2 对于方阵 A , 若存在置换矩阵 P , 使得 $P^T A P$ 为分块对角矩阵, 则称 A 为可约矩阵, 否则为不可约矩阵.

定义 3 设 A 是不可约的非负方阵, A 的模等于谱半径的特征值的个数称为 A 的非本原指数. 如果 A 的非本原指数等于 1, 则矩阵 A 是本原的; 若 A 非本原指数大于 1, 则称 A 是非本原的矩阵.

设 M 是对称的非本原矩阵, 其非本原指数为 2, 则根据不可约矩阵的 Frobenius 形式^[15], 在这种情况下, 存在置换矩阵 P , 使得

$$M = P^t \begin{pmatrix} 0 & M_{12} \\ M_{21} & 0 \end{pmatrix} P \quad (9)$$

其中: $M_{12}^t = M_{21}$, P^t 是矩阵 P 的转置矩阵.

定义 4 矩阵空间 $M_{m,n}$ 上的欧氏范数称为矩阵的 Frobenius 范数:

$$\|M\|_F = \sqrt{\text{tr}(MM^t)}, \quad M \in M_{m,n},$$

其中 $\text{tr}(MM^t)$ 是矩阵 MM^t 的迹, 即: 矩阵 MM^t 的主对角线元素的和.

引理 3^[16] 若 A 是 $n \times n$ 阶对称矩阵, 其特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则对于任意 $x \in R^n (x \neq 0)$, 有

$$\lambda_1 \geq \frac{x^t A x}{x^t x},$$

等式成立当且仅当 x 是 A 的最大特征值 λ_1 对应的特征向量.

接下来, 根据 Cauchy-Schwarz 不等式, Aguiéiras 等给出了关于矩阵 M 的能量的一个更好的上界^[17], 这个结论对于给出太阳图的能量上界及其 Randić 能量的上界是十分有用的.

定理 7^[17] 设 M 是非本原对称矩阵, 其 Frobenius 形式在式 (9) 中给出. 如果 M_{12} 是 $m_1 \times m_2$ 阶矩阵, M_{21} 是 $m_2 \times m_1$ 阶矩阵, 且 $\tilde{m} = \min\{m_1, m_2\}$, 则

$$E(M) \leq 2\lambda_1(M) + 2\sqrt{(\tilde{m}-1)\left(\frac{\|M\|_F^2}{2} - \lambda_1^2(M)\right)},$$

等号成立当且仅当 $\tilde{m} = 1$ 或 M 有 $2(\tilde{m}-1)$ 个与 $\pm\lambda_1(M)$ 不同但绝对值等于 α 的特征值以及 $|m_2 - m_1|$ 个 0 特征值, 其中 $\alpha = \sqrt{(\|M\|_F^2/2 - \lambda_1^2(M))/(\tilde{m}-1)}$.

因此, 根据矩阵 M 的结构, 我们考虑一类二部图的能量上界问题, 即: 研究偶太阳图的能量及其 Randić 能量的上界. 设 $H_0 = C(1, 1, \dots, 1)$ (见图 2), 其中 r 是偶数. 我们给出图 H_0 中的顶点集 $V(H_0)$ 的一个划分, 使得 $V(H_0) = X \cup Y$, 令

$$X = \{1, 3, \dots, r-1, r+2, r+4, \dots, r+r\}, \quad Y = \{2, 4, \dots, r, r+1, r+3, \dots, r+(r-1)\}.$$

因此, $|X| = |Y| = r$.

定理 8 设 $C(q_1, q_2, \dots, q_r)$ 是顶点数 $n = r + \sum_{i=1}^r q_i$ 的太阳图, 其满足删除所有的悬挂点后得到的图是圈 C_r , 其中 r 是偶数并且 $r \geq 4$, $q_i \geq 1$, $i = 1, 2, \dots, r$, 则

$$E(C(q_1, q_2, \dots, q_r)) \leq 2\lambda_1(\widehat{C}) + 2\sqrt{(r-1)\left(\frac{\|\widehat{C}\|_F^2}{2} - \lambda_1^2(\widehat{C})\right)} \quad (10)$$

等式成立当且仅当 \widehat{C} 有 $2(r-1)$ 个与 $\pm\lambda_1(\widehat{C})$ 不同但绝对值等于 $\sqrt{(\|\widehat{C}\|_F^2/2 - \lambda_1^2(\widehat{C}))/r}$ 的特征值.

证明 根据图能量的定义及定理 4, 我们有

$$E(C(q_1, q_2, \dots, q_r)) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i(\mathbf{A}(C(q_1, q_2, \dots, q_r)))| = \sum_{i=1}^{2r} |\lambda_i(\widehat{C})| = E(\widehat{C}) \tag{11}$$

根据矩阵 \widehat{C} 的定义及结构可知, \widehat{C} 是非本原指数为 2 的非本原对称矩阵. 另外, 将矩阵 \widehat{C} 的行和列以 $X = \{1, 3, \dots, r-1, r+2, r+4, \dots, r+r\}, Y = \{2, 4, \dots, r, r+1, r+3, \dots, r+(r-1)\}$ 进行标号, 由 \widehat{C} 的 Frobenius 形式可知, 存在置换矩阵 P , 使得

$$\widehat{C} = P^t \begin{pmatrix} 0 & V_{12} \\ V_{21} & 0 \end{pmatrix} P \tag{12}$$

其中 $V_{12}^t = V_{21}$, 并且阶数均为 r .

因此, 应用定理 7, 我们得到

$$E(\widehat{C}) \leq 2\lambda_1(\widehat{C}) + 2\sqrt{(\tilde{m}-1)\left(\frac{\|\widehat{C}\|_F^2}{2} - \lambda_1^2(\widehat{C})\right)} \tag{13}$$

其中 $\tilde{m} = r$. 最后将式 (11) 和式 (13) 相结合, 定理 8 得证.

虽然利用定理 8 能够得到太阳图的能量, 但是根据矩阵 \widehat{C} 的结构可以发现, 其最大特征值 $\lambda_1(\widehat{C})$ 并不容易计算. 因此, 我们给出下面的定理, 这是得到偶太阳图的有效方法.

定理 9 设 $C(q_1, q_2, \dots, q_r)$ 是顶点数 $n = r + \sum_{i=1}^r q_i$ 的太阳图, 其满足删除所有的悬挂点后得到的图是圈 C_r , 其中 r 是偶数并且 $r \geq 4, q_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, r$. 若 e 表示 $2r$ 维全 1 向量, $|\cdot|$ 表示向量的模, 则

$$E(C(q_1, q_2, \dots, q_r)) \leq \sqrt{\frac{2}{r}}|\widehat{C}e| + \sqrt{\frac{2}{r}}\sqrt{(r-1)(2rn - |\widehat{C}e|^2)} \tag{14}$$

证明 由定理 8 知

$$E(C(q_1, q_2, \dots, q_r)) \leq 2\lambda_1(\widehat{C}) + 2\sqrt{(r-1)\left(\frac{\|\widehat{C}\|_F^2}{2} - \lambda_1^2(\widehat{C})\right)}.$$

设函数 $f(x) = x + \sqrt{(r-1)(\|\widehat{C}\|_F^2/2 - x^2)}$, 其定义域为 $0 < x \leq \|\widehat{C}\|_F/\sqrt{2}$. 函数的一阶导函数 $f'(x) = 1 - (r-1)x/\sqrt{(r-1)(\|\widehat{C}\|_F^2/2 - x^2)} < 0$, 当且仅当 $\|\widehat{C}\|_F/\sqrt{2r} < x$. 因此, $f(x)$ 在区间 $I = (\|\widehat{C}\|_F/\sqrt{2r}, \|\widehat{C}\|_F/\sqrt{2})$ 上是减函数.

一方面, 由引理 1 得

$$\lambda_1^2(\widehat{C}) \geq \frac{e^t \widehat{C}^2 e}{e^t e} \geq \frac{\text{tr}(\widehat{C}^2)}{2r} = \frac{\|\widehat{C}\|_F^2}{2r}. \tag{15}$$

由此可知

$$\lambda_1(\widehat{C}) \geq \frac{\|\widehat{C}\|_F}{\sqrt{2r}}.$$

又因为定理 8 中 $(\|\widehat{C}\|_F^2/2 - \lambda_1^2(\widehat{C})) \geq 0$, 故 $\|\widehat{C}\|_F^2 \geq 2\lambda_1^2(\widehat{C})$ 意味着 $\|\widehat{C}\|_F/\sqrt{2} \geq \lambda_1(\widehat{C})$. 因此, $\lambda_1(\widehat{C}) \in I$.

另一方面, 由式 (15) 可知 $\|\widehat{C}\|_F^2 = \text{tr}(\widehat{C}\widehat{C}^t) = \text{tr}(\widehat{C}^2) \leq e^t \widehat{C}^2 e = |\widehat{C}e|^2 \leq 2r\lambda_1^2(\widehat{C})$, 这意味着 $\|\widehat{C}\|_F/\sqrt{2r} \leq |\widehat{C}e|/\sqrt{2r} \leq \lambda_1(\widehat{C})$. 因此, $|\widehat{C}e|/\sqrt{2r} \in I$.

综上所述及函数 $f(x)$ 在区间 $I = (\|\widehat{C}\|_F/\sqrt{2r}, \|\widehat{C}\|_F/\sqrt{2})$ 上是减函数, 可知

$$f(\lambda_1(\widehat{C})) \leq f\left(\frac{|\widehat{C}e|}{\sqrt{2r}}\right).$$

故而

$$\begin{aligned} E(C(q_1, q_2, \dots, q_r)) &\leq 2f(\lambda_1(\widehat{C})) = 2(\lambda_1(\widehat{C}) + \sqrt{(r-1)\left(\frac{\|\widehat{C}\|_F^2}{2} - \lambda_1^2(\widehat{C})\right)}) \\ &\leq 2f\left(\frac{|\widehat{C}e|}{\sqrt{2r}}\right) = 2\left(\frac{|\widehat{C}e|}{\sqrt{2r}} + \sqrt{(r-1)\left(\frac{\|\widehat{C}\|_F^2}{2} - \frac{|\widehat{C}e|^2}{2r}\right)}\right). \end{aligned}$$

最后, 根据式 (6) 中矩阵 \widehat{C} 的结构, 很容易计算 $\|\widehat{C}\|_F^2/2 = r + \sum_{i=1}^r q_i = n$, 因此定理 9 得证.

由表 1 可以看出, 对于偶太阳图的能量, 定理 8 比定理 9 更接近于真实值, 但是我们从上述定理的证明过程可以发现, 定理 9 比定理 8 更便于计算.

表 1 偶太阳图能量的真实值和近似值

r	(q_1, q_2, \dots, q_r)	$E(C(q_1, q_2, \dots, q_r))$	定理 8	定理 9
4	(3,3,3,3)	14.928 4	15.165 2	15.328 1
6	(7,7,6,7,8,7)	32.829 0	33.470 6	33.526 2
8	(11,12,9,11,10,12,13,12)	54.763 4	55.626 8	55.681 5

接下来, 我们将考虑偶太阳图的 Randić 能量的上界问题.

定理 10 设 $C(q_1, q_2, \dots, q_r)$ 是顶点数 $n = r + \sum_{i=1}^r q_i$ 的太阳图, 其满足删除所有的悬挂点后得到的图是圈 C_r , 其中 r 是偶数并且 $r \geq 4$, $q_i \geq 1$, $i = 1, 2, \dots, r$, 则

$$E_R(C(q_1, q_2, \dots, q_r)) \leq 2 + 2\sqrt{(r-1)\left(\frac{\|\widehat{\Gamma}\|_F^2}{2} - 1\right)} \quad (16)$$

等式成立当且仅当 $\widehat{\Gamma}$ 有 $2(r-1)$ 个与 ± 1 不同但绝对值等于 $\sqrt{(\|\widehat{\Gamma}\|_F^2/2 - 1)/(r-1)}$ 的特征值.

证明 根据图 Randić 能量的定义及定理 6, 我们有

$$E_R(C(q_1, q_2, \dots, q_r)) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i(R(C(q_1, q_2, \dots, q_r)))| = \sum_{i=1}^{2r} |\lambda_i(\widehat{\Gamma})| = E(\widehat{\Gamma}) \quad (17)$$

类似于定理 8 的方法及结论, 即可得到定理 10.

推论 1 设 $C(q_1, q_2, \dots, q_r)$ 是顶点数 $n = r + \sum_{i=1}^r q_i$ 的太阳图, 其满足删除所有的悬挂点后得到的图是圈 C_r , 其中 r 是偶数并且 $r \geq 4$, $q_i \geq 1$, $i = 1, 2, \dots, r$, 则

$$E_R(C(q_1, q_2, \dots, q_r)) \leq \Upsilon,$$

其中

$$\Upsilon = 2 + 2\sqrt{(r-1)\left(\frac{1+q_1q_r+2q_r}{(q_1+2)(q_r+2)} + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1+q_iq_{i+1}+2q_i}{(q_i+2)(q_{i+1}+2)} - 1\right)} \quad (18)$$

等式成立当且仅当 $\widehat{\Gamma}$ 有 $2(r-1)$ 个与 ± 1 不同, 但绝对值等于 $\sqrt{[(\frac{1+q_1q_r+2q_r}{(q_1+2)(q_r+2)} + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1+q_iq_{i+1}+2q_i}{(q_i+2)(q_{i+1}+2)} - 1)/(r-1)}$ 的特征值.

证明 由定理 10, 可知

$$E_R(C(q_1, q_2, \dots, q_r)) \leq 2 + 2\sqrt{(r-1)\left(\frac{\|\widehat{\Gamma}\|_F^2}{2} - 1\right)}.$$

矩阵 $\widehat{\Gamma}$ 如式 (8) 中所列, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\|\widehat{\Gamma}\|_F^2}{2} &= \frac{\text{tr}(\widehat{\Gamma}\widehat{\Gamma}^t)}{2} = \frac{1}{(q_1+2)(q_r+2)} + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{(q_i+2)(q_{i+1}+2)} + \sum_{i=1}^r \frac{q_i}{q_i+2} \\ &= \frac{1}{(q_1+2)(q_r+2)} + \sum_{i=1}^{r-1} \left(\frac{1}{(q_i+2)(q_{i+1}+2)} + \frac{q_i}{q_i+2}\right) + \frac{q_r}{q_r+2} \\ &= \frac{1+q_r(q_1+2)}{(q_1+2)(q_r+2)} + \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1+q_i(q_{i+1}+2)}{(q_i+2)(q_{i+1}+2)}. \end{aligned}$$

将其代入式 (16), 可得推论.

表 2 中列出了一些偶太阳图及其 Randić 能量的真实值, 且列出了利用定理 10 计算出的这些图的 Randić 能量的近似值, 发现定理 10 的上界很接近真实值, 因此说明定理 10 是偶太阳图的 Randić 能量的一个很好的上界.

表 2 偶太阳图 Randić 能量的真实值和近似值

r	(q_1, q_2, \dots, q_r)	$E_R(C(q_1, q_2, \dots, q_r))$	定理 10
4	(3,3,3,3)	6.298 4	6.326 7
6	(7,7,6,7,8,7)	10.618 6	10.643 8
8	(11,12,9,11,10,12,13,12)	14.756 4	14.774 7

参考文献:

- [1] CVETKOVIĆ D, DOOB M, SACHS H. Spectra of graphs: theory and application[M]. New York: Academic Press, 1980.
- [2] CVETKOVIĆ D, ROWLINSON P, SIMIĆ S. An introduction to the theory of graph spectra[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [3] BOZKURT B, GÜNGÖR A D, GUTMAN I, et al. Randić matrix and Randić energy[J]. MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 2010, 64(1): 239-250.
- [4] CARDOSO D M, DE FREITAS M A, MARTINS E A, et al. Spectra of graphs obtained by a generalization of the join graph operation[J]. Discrete Mathematics, 2013, 313: 733-741.
- [5] SCHWENK A J. Computing the characteristic polynomial of a graph[J]. Graphs and Combinatorics, 1974, 406: 153-172.
- [6] BROUWER A E, HAEMERS W H. Spectra of graphs[M]. New York: Springer, 2012.
- [7] CVETKOVIĆ D, DOOB M, SACHS H. Spectra of graphs: theory and applications[M]. 3rd ed. Heidelberg: Johann Ambrosius Barth, 1995.
- [8] CVETKOVIĆ D, SIMIĆ S. Graph spectra in computer science[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2011, 434: 1545-1562.
- [9] CHENG L L, HUANG Q X. The adjacency spectrum of the corona graph $G_1 \circ K_{m_1, m_2}$ [J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition), 2011, 28(2): 156-162.
- [10] 卢志琴, 马小玲. 两种分裂点连接运算图的 Randić 谱[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2022, 39(5): 550-559.
- [11] FIEDLER M. Eigenvalues of nonnegative symmetric matrices[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1974, 9: 119-142.
- [12] ROBBIANO M, MARTINS E A, GUTMAN I. Extending a theorem by Fiedler and applications to graph energy[J]. MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 2010, 64: 145-156.
- [13] CARDOSO D M, GUTMAN I, MARTINS E A, et al. A generalization of Fiedler's lemma and some applications[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2011, 59(8): 929-942.
- [14] ANDRADE E, GOMES H, ROBBIANO M. Spectra and Randić spectra of caterpillar graphs and applications to the energy[J]. MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 2017, 77: 61-75.
- [15] MINC H. Nonnegative matrices[M]. New York: Wiley, 1988.
- [16] ZHANG F Z. Matrix theory: basic results and techniques[M]. New York: Springer, 1999.
- [17] AGUIEIRAS M, ROBBIANO M, BONIFÁCIO A. An improved upper bound of the energy of some graphs and matrices[J]. MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 2015, 74: 307-320.

责任编辑: 赵新科