第 40 卷第 1 期 新疆大学学报（自然科学版）（中英文） Vol.40, No.1
2023 年 1 月 Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English) Jan., 2023

极小强连通块的平均连通度*

冯丽华, 田应智†

(新疆大学 数学与系统科学学院，新疆 乌鲁木齐 830017)

摘　要：令 $D=(V(D),A(D))$ 是一个 n 阶有向图. 如果有向图 D 是强连通的并且它的底图没有割点, 那么称 D 是一个强连通块. 如果 D 是一个强连通块, 但对于任意的 $a\in A(D)$, 都有 $D-a$ 不是一个强连通块, 那么称 D 是一个极小强连通块. 对于任意两个点 $u,v\in V(D)$, $\kappa_D(u,v)$ 表示从 u 到 v 的局部连通度, 是 D 中内部不交的 (u,v)-有向路的最大条数. D 的平均连通度定义为 $\bar{\kappa}(D)=\frac{1}{n(n-1)}[\sum\limits_{(u,v)\in V(D)\times V(D)}\kappa_D(u,v)]$. 借助度序列和耳朵分解的方法, 给出了给定阶数的极小强连通块平均连通度的上界, 并且猜测其严格小于 3/2.

关键词：强连通块; 极小强连通块; 平均连通度

DOI：10.13568/j.cnki.651094.651316. 2022.03.07.0004

中图分类号：O157.5　**文献标识码**：A　**文章编号**：2096-7675(2023)01-0036-07

引文格式：冯丽华, 田应智. 极小强连通块的平均连通度[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2023, 40(1): 36-42.

英文引文格式：FENG Lihua, TIAN Yingzhi. The average connectivity of minimally strong blocks[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2023, 40(1): 36-42.

The Average Connectivity of Minimally Strong Blocks

FENG Lihua, TIAN Yingzhi

(*School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China*)

Abstract: Let $D=(V(D),A(D))$ be a digraph of order n. The digraph D is called a strong block if D is strongly connected and its underlying graph has no cut-vertex. D is called a minimally strong block, if D is a strong block, but $D-a$ is not a strong block for every arc a of $A(D)$. For $u,v\in V(D)$, the local connectivity $\kappa_D(u,v)$ from u to v is the maximum number of internally disjoint directed (u,v)-paths in D. The average connectivity of D is $\bar{\kappa}(D)=\frac{1}{n(n-1)}[\sum\limits_{(u,v)\in V(D)\times V(D)}\kappa_D(u,v)]$. By using the method of degree sequence and ear decomposition, this paper determine some upper bounds of average connectivity among minimally strong blocks in terms of their orders, and conjecture that it is strictly less than 3/2.

Key words: strong blocks; minimally strong blocks; average connectivity

1　引 言

设 $G=(V(G),E(G))$ 是一个点集为 $V(G)$, 边集为 $E(G)$ 的无向图. G 的阶数为 $|V(G)|=n$. 对于任意一个非空边子集 $F\subseteq E(G)$, $G-F=(V(G),E(G)\backslash F)$. 当 $F=\{e\}$ 时, 我们用 $G-e$ 表示 $G-\{e\}$. 图 G 的连通度, 记作 $\kappa(G)$, 是满足 $G-S$ 是不连通的或是平凡图 K_1 的最小点集 S 的基数. 若对于正整数 k, $\kappa(G)\geq k$, 则称图 G 是 k-连通的. 如果图 G 是 k-连通的, 但对于任意的 $e\in E(G)$, 都有 $G-e$ 不是 k-连通的, 那么称 G 是一个极小 k-连通图. 类似的, 图 G 的边连通度, 记作 $\kappa'(G)$, 是满足 $G-F$ 是不连通的最小边集 F 的基数. 若对于正整数 k, $\kappa'(G)\geq k$, 则称图 G 是 k-边连通的. 如果图 G 是 k-边连通的, 但对于任意的 $e\in E(G)$, 都有 $G-e$ 不是 k-边连通的, 那么称 G 是一个极小 k-边连通图. 对任意的 $u,v\in V(G)$, 局部连通度 $\kappa_G(u,v)$ 是指 G 中 u, v 间内部

* 收稿日期：2022-03-07
基金项目：国家自然科学基金“点(边)-k-极大r-一致超图的边数研究”（12261086）.
作者简介：冯丽华（1997-）, 女, 硕士生, 从事图的连通性理论研究, E-mail: fenglhxju@163.com.
† 通讯作者：田应智（1983-）, 男, 博士, 教授, 从事图论及其应用研究, E-mail: tianyzhxj@163.com.

不交的路的最大条数. 定义 G 的平均连通度 $\bar{\kappa}(G)=\frac{2}{n(n-1)}[\sum\limits_{u,v\in V(G)}\kappa_G(u,v)]$. 类似的, 可以定义 G 的平均边连通度 $\bar{\kappa}'(G)=\frac{2}{n(n-1)}[\sum\limits_{u,v\in V(G)}\kappa'_G(u,v)]$, 其中 $\kappa'_G(u,v)$ 表示 G 中 u, v 间的局部边连通度.

2021 年, Casablanca, Mol 和 Oellermann 给出了极小 2-(边)连通图的平均(边)连通度的上界, 并刻画了给定阶数的平均(边)连通度达到上界的极小 2-(边)连通图[1].

定理 1[1] 若 G 是一个阶数为 n 的极小 2-(边)连通图, 则

$$\bar{\kappa}(G)\le 2+\frac{(n-1)^2}{4n(n-1)}<\frac{9}{4}\quad (\bar{\kappa}'(G)\le 2+\frac{(n-1)^2}{4n(n-1)}<\frac{9}{4}).$$

相关连通度的研究可以参阅文献 [2-4]. 对于无向图的平均连通度的研究除了上述列出的极小 2-(边)连通图, 还包括平面图和外平面图[5]、笛卡儿积图[5]、强积图[6]、正则图[7]等.

本文主要研究有限的有向图. 设 $D=(V(D),A(D))$ 是一个点集为 $V(D)$, 弧集为 $A(D)$ 的有向图. $|V(D)|$ 表示 D 的阶数, $|A(D)|$ 表示 D 的弧数. (u,v) 表示从 u 到 v 的弧. D 的一条 (u,v)-有向路是一条从 u 到 v 的点弧不同的交替序列 $(u=)u_0a_0u_1a_1\cdots a_{n-1}u_n(=v)$, 其中 $a_i=(u_i,u_{i+1})$, $0\le i\le n-1$. 并且若 $u=v$, 则称之为 D 的一个有向圈. 收缩 D 的一个点集, 是把这个点集间的弧都删掉, 并且将这个点集合成一个新的点, 而其余点和弧不变. 定义 $N_D^+(u)=\{v\in V(D)\backslash\{u\}|(u,v)\in A(D)\}$ 和 $N_D^-(u)=\{v\in V(D)\backslash\{u\}|(v,u)\in A(D)\}$. 用 $d^+(u)=d_D^+(u)=|N_D^+(u)|$ 和 $d^-(u)=d_D^-(u)=|N_D^-(u)|$ 分别表示 u 的出度和入度. 对于任意的有向图 D, $\sum_{u\in V(D)}d^-(u)=\sum_{u\in V(D)}d^+(u)=|A(D)|$. 用 $d_D(u)=d_D^+(u)+d_D^-(u)$ 表示点 u 在有向图 D 中的度. 删掉有向图 D 中所有弧的方向得到的无向图称为 D 的底图, 记作 $G(D)$. $G(D)$ 中任一点 u 的度 $d_{G(D)}(u)=d_D(u)$. 如果 $G(D)$ 中没有长为 2 的圈, 那么称有向图 D 为定向图. 底图为完全图的定向图称为竞赛图. 取任意实数 x, $\lceil x\rceil$ 表示不小于 x 的最小整数, $\lfloor x\rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数. 对任意正整数 n 和 k, $k\le n$, 定义 $A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$. 此外, 本文未定义的术语和符号可参阅文献 [8-9].

令 $D=(V(D),A(D))$ 和 $D'=(V(D'),A(D'))$ 是两个有向图, 如果 $V(D')\subseteq V(D)$ 并且 $A(D')\subseteq A(D)$, 那么称 D' 是 D 的一个子有向图. 对于任意一个非空弧子集 $F\subseteq A(D)$, $D-F=(V(D),A(D)\backslash F)$. 当 $F=\{a\}$ 时, 我们用 $D-a$ 表示$D-\{a\}$. 如果对于有向图 D 的任一对有序点 u,v, 都有从 u 到 v 的有向路, 那么称 D 是强连通的. 如果有向图 D 是强连通的并且 $G(D)$ 没有割点, 那么称 D 是一个强连通块. 如果 D 是一个强连通块, 但对于任意的 $a\in A(D)$, 都有 $D-a$ 不是一个强连通块, 那么称 D 是一个极小强连通块. 对于任意两个点 $u,v\in V(D)$, 从 u 到 v 的局部连通度 $\kappa_D(u,v)$ 是 D 中内部不交的 (u,v)-有向路的最大条数. 定义 D 的全连通度 $K(D)=\sum\limits_{(u,v)\in V(D)\times V(D)}\kappa_D(u,v)=\sum\limits_{u,v\in V(D)}[\kappa_D(u,v)+\kappa_D(v,u)]$, D 的平均连通度为 $\bar{\kappa}(D)=\frac{K(D)}{n(n-1)}$. 称平均连通度达到上界的极小强连通块为最优极小强连通块.

令 D' 是有向图 D 的一个子有向图, D 中 D' 的一个有向耳朵是一条端点在 D' 中, 但中间点不在 D' 中的有向路. 称端点相同的有向耳朵为闭有向耳朵, 端点不同的有向耳朵为开有向耳朵. 每个强连通有向图都有如下的有向耳朵分解.

定义 1[8] 设 D 是一个强连通有向图, 则 D 有有向耳朵分解 $(D_0,D_1,\cdots,D_k)$, 其中

(i) D_0 是一个有向圈;

(ii) $D_{i+1}=D_i\cup P_i$, 其中对于 $0\le i<k$, P_i 是 D 中 D_i 的有向耳朵;

(iii) $D_k=D$.

如果 D 有一个有向耳朵分解满足所有的有向耳朵都是开有向耳朵, 那么称此有向耳朵分解为开有向耳朵分解.

定理 2[10] 有向图 D 是强连通块的充分必要条件是它存在开有向耳朵分解.

1970 年, Geller 在文献 [11] 中研究了极小强连通块, 并得到如下定理.

定理 3[11] 对于任意一个极小强连通块 $D=(V(D),A(D))$, 收缩 D 中任意一条度全为 2 的有向路的点集得到的有向图仍然是一个极小强连通块.

1979 年, Grotschel 在文献 [10] 中证明了下面两个关于极小强连通块的重要结论.

定理 4[10] 对于弧数为 m, 点数为 $n\ge 3$ 的有向图 $D=(V(D),A(D))$, 若 D 是一个极小强连通块, 则

$n \le m \le 2n-3$.

定理 5[10] 每个极小强连通块都包含至少两个出度与入度同时等于 1 的点.

2004 年, Henning 和 Oellermann 在文献 [12] 中给出了定向图和竞赛图的平均连通度的界.

定理 6[12] (i) 设 D 是一个点数为 n, 弧数为 m 的定向图, 则

$$\frac{m}{n(n-1)} \le \bar{\kappa}(D) \le \frac{m}{n};$$

(ii) 设 T 是一个阶数为 n 的竞赛图, 则

$$\frac{n+1}{6} \le \bar{\kappa}(T) \le \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & n \text{ 是奇数;} \\ \frac{2n^2-5n+4}{4(n-1)}, & n \text{ 是偶数.} \end{cases}$$

2 主要结果

定理 7 设有向图 $D=(V(D),A(D))$ 是一个阶数为 $n \ge 4$ 的最优极小强连通块, 则 D 中所有出度与入度同时等于 1 的点集是一个独立集.

证明 令 $C_0 = uvw$ 是一个有向三角形, 并令 $P_i = vx_iu$, $i = 1,2,\cdots,n-3$ 是从 v 到 u 的有向路. 记 $D_0 = C_0 \cup (\cup_{i=1}^{n-3} P_i)$, 由定理 2 可知 D_0 是一个强连通块. 显然 D_0 也是一个极小强连通块, 并且它的平均连通度大于 1. 因为有向圈的平均连通度等于 1, 所以当 $n \ge 4$ 时, D 不是一个有向圈.

假设 D 中出度与入度同时等于 1 的点集不是一个独立集, 则至少存在两个出度与入度同时等于 1 的点 u_i 和 u_{i+1}, 使得 $(u_i,u_{i+1}) \in A(D)$. 因为 D 是一个强连通块, 并且 D 不是一个有向圈, 所以 D 中一定存在一条经过 (u_i,u_{i+1}) 的 (u,v)-有向路, 记为 $P:(u=)u_0u_1\cdots u_tu_{t+1}(=v)$, 使得 $d_D(u) \ge 3$, $d_D(v) \ge 3$ 和 $d_D^+(u_i) = d_D^-(u_i) = 1$, 其中 $1 \le i \le t$, $t \ge 2$. 可以得到 $(u,v) \notin A$, 由强连通性可知 D 中一定还存在一条与 P 内部不交的 (v,u)-有向路 P', 使得 $P \cup P'$ 是一个有向圈, 从而 $D-(u,v)$ 仍然是一个强连通块, 这与 D 是一个极小强连通块矛盾. 令 D_1 是由 D 中收缩 P 上的点集 $\{u_1,u_2,\cdots,u_t\}$ 得到的有向图. 记收缩后的点为 u_1, 收缩后的有向路为 $P_1' = uu_1v$. 令 $D' = D_1 \cup (\cup_{i=2}^{t} P_i')$, 其中 $P_i' = uu_iv$, $i = 2,3,\cdots,t$, 如图 1 和图 2 所示.

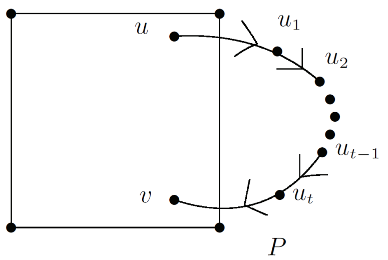

图 1 有向图 D

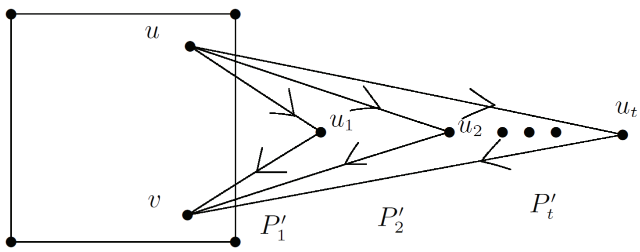

图 2 有向图 D'

首先证明 D' 也是一个极小强连通块. 由定理 3 可知 D_1 是一个极小强连通块. 因为 D' 相当于是在 D_1 的基础上添加 $t-1$ 个开有向耳朵得到的, 所以由定理 2 可知 D' 是一个强连通块. 因为 $(u,v) \notin A$, 所以在 D_1 上添加 (u,v)-有向路不影响 D_1 的极小强连通性. 因此 D' 是一个极小强连通块. 对于任一对有序点 $x,y \in V$, $\{x,y\} \ne \{u,v\}$, 有 $\kappa_{D'}(x,y) = \kappa_D(x,y)$ 和 $\kappa_{D'}(v,u) = \kappa_D(v,u)$, 但是 $\kappa_{D'}(u,v) = \kappa_D(u,v)+t-1$, 因此 $\bar{\kappa}(D') > \bar{\kappa}(D)$. 即 D' 是比 D 平均连通度更大的极小强连通块, 这与 D 是最优极小强连通块矛盾, 假设不成立. 因此结论成立.

定理 8 令 D 是一个 n 阶有向图. 设 $G(D)$ 的度序列为 $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$, 其中 $d_1 \ge d_2 \ge \cdots \ge d_n$, 则

$$\bar{\kappa}(D) \le \frac{\sum_{i=1}^{n}(i-1)d_i}{n(n-1)}.$$

证明 假设 $V := \{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$, 不妨设 $d_{G(D)}(u_i) = d_i$, $i = 1,2,\cdots,n$. 对于任意的 $i < j$, 因为 $d_i \ge d_j$, 所以

$\kappa_D(u_i,u_j)+\kappa_D(u_j,u_i)\le \min\{d_i,d_j\}=d_j$. 因此 D 的全连通度不大于 $d_2+2d_3+\cdots+(n-1)d_n$. 从而得到

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}(D)&=\sum_{u_i,u_j\in V(D)}[\kappa_D(u_i,u_j)+\kappa_D(u_j,u_i)]/n(n-1)\\&\le\sum_{i=1}^{n}(i-1)d_i/n(n-1).\end{aligned}$$

推论 1 令 D 是一个点数为 n, 弧数为 m 的有向图. 设 $G(D)$ 的度序列为 $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$, 其中 $d_1\ge d_2\ge\cdots\ge d_n$, 则

$$\bar{\kappa}(D)\le\frac{m}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)d_i}{2n(n-1)}.$$

证明 由定理 8 和 $\sum_{u\in V(D)}[d_D^+(u)+d_D^-(u)]=2m$, 可得

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}(D)&\le\frac{\sum_{i=1}^{n}(i-1)d_i}{n(n-1)}\\&=\frac{[(n-1)/2]2m-\{[(n-1)/2]d_1+[(n-3)/2]d_2+\cdots+1/2d_{n/2}-1/2d_{(n/2)+1}-\cdots-[(n-1)/2]d_n\}}{n(n-1)}\\&=\frac{m}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)d_i}{2n(n-1)}.\end{aligned}$$

推论 2 设 D 是一个点数为 n, 弧数为 m 的有向图, 则

$$\bar{\kappa}(D)\le\frac{m}{n}-\frac{r(n-r)}{2n(n-1)},$$

其中 $r=2m-n\lfloor\frac{2m}{n}\rfloor$.

证明 令 $G(D)$ 的度序列为 $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$, 其中 $d_1\ge d_2\ge\cdots\ge d_n$. 设 $r=2m-n\lfloor\frac{2m}{n}\rfloor$, $M=\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)d_i$, 则

$$\begin{aligned}M&=\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)d_i\\&=(n-1)d_1+(n-3)d_2+\cdots+d_{n/2}-d_{(n/2)+1}-\cdots-(n-1)d_n\\&=(n-1)(d_1-d_n)+(n-3)(d_2-d_{n-1})+\cdots+(d_{n/2}-d_{(n/2)+1}).\end{aligned}$$

由上述式子可知当 $d_1=\cdots=d_r=d+1$, 并且 $d_{r+1}=\cdots=d_n=d$ 时, 其中 $d=\lfloor\frac{2m}{n}\rfloor$, M 取得最小值. 因此

$$\begin{aligned}M&\ge\sum_{i=1}^{r}(n-2i+1)(d+1)+\sum_{i=r+1}^{n}(n-2i+1)d\\&=\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)d+\sum_{i=1}^{r}(n-2i+1)\\&=r(n-r).\end{aligned}$$

则由推论 1 可知

$$\bar{\kappa}(D)\le\frac{m}{n}-\frac{r(n-r)}{2n(n-1)}.$$

定理 9 令 D 是一个 n 阶有向图. 假设 D 的出度序列和入度序列分别为 $(d_1^+,d_2^+,\cdots,d_n^+)$ 和 $(d_1^-,d_2^-,\cdots,d_n^-)$, 且不妨设 $|d_1^+-d_1^-|\ge|d_2^+-d_2^-|\ge\cdots\ge|d_n^+-d_n^-|$, 则

$$\bar{\kappa}(D)\le\frac{\sum_{i=1}^{n}[(n-i)\underline{d}_i+(i-1)\hat{d}_i]}{n(n-1)},$$

其中: $\hat{d}_i=\max\{d_i^+,d_i^-\}$, $\underline{d}_i=\min\{d_i^+,d_i^-\}$.

证明 假设 $V:=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$, 不妨设 $d_D^+(v_i)=d_i^+$, $d_D^-(v_i)=d_i^-$, $i=1,2,\cdots,n$. 令 $\hat{d}_i=\max\{d_i^+,d_i^-\}$, $\underline{d}_i=\min\{d_i^+,d_i^-\}$. 对于任意的 $i<j$, 因为 $|d_i^+-d_i^-|\geq|d_j^+-d_j^-|$, 所以 $\kappa_D(v_i,v_j)+\kappa_D(v_j,v_i)\leq\min\{d_i^+,d_j^-\}+\min\{d_j^+,d_i^-\}\leq\underline{d}_i+\hat{d}_j$. 因此可以得到

$$\begin{aligned}K(D)&=\sum_{v_i,v_j\in V(D)}[\kappa_D(v_i,v_j)+\kappa_D(v_j,v_i)]\\&\leq[(n-1)\underline{d}_1+(\hat{d}_2+\cdots+\hat{d}_n)]+[(n-2)\underline{d}_2+(\hat{d}_3+\cdots+\hat{d}_n)]+\cdots+[\underline{d}_{n-1}+\hat{d}_n]\\&=(n-1)\underline{d}_1+[(n-2)\underline{d}_2+\hat{d}_2]+\cdots+[\underline{d}_{n-1}+(n-2)\hat{d}_{n-1}]+(n-1)\hat{d}_n\\&=\sum_{i=1}^{n}[(n-i)\underline{d}_i+(i-1)\hat{d}_i].\end{aligned}$$

从而得到

$$\bar{\kappa}(D)\leq\frac{\sum_{i=1}^{n}[(n-i)\underline{d}_i+(i-1)\hat{d}_i]}{n(n-1)}.$$

推论 3 令 D 是一个点数为 n, 弧数为 m 的有向图. 假设 D 的出度序列和入度序列分别为 $(d_1^+,d_2^+,\cdots,d_n^+)$ 和 $(d_1^-,d_2^-,\cdots,d_n^-)$, 且不妨设 $|d_1^+-d_1^-|\geq|d_2^+-d_2^-|\geq\cdots\geq|d_n^+-d_n^-|$, 则

$$\bar{\kappa}(D)\leq\frac{m}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)(\hat{d}_i-\underline{d}_i)}{2n(n-1)},$$

其中: $\hat{d}_i=\max\{d_i^+,d_i^-\}$, $\underline{d}_i=\min\{d_i^+,d_i^-\}$.

证明 由定理 9 和 $\sum\limits_{i=1}^{n}(\underline{d}_i+\hat{d}_i)=2m$, 可得

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}(D)&\leq\frac{\sum_{i=1}^{n}[(n-i)\underline{d}_i+(i-1)\hat{d}_i]}{n(n-1)}\\&=\{\frac{n-1}{2}2m-[\frac{n-1}{2}(\hat{d}_1-\underline{d}_1)+\frac{n-3}{2}(\hat{d}_2-\underline{d}_2)+\cdots+\frac{1}{2}(\hat{d}_{n/2}-\underline{d}_{n/2})-\frac{1}{2}(\hat{d}_{(n/2)+1}-\underline{d}_{(n/2)+1})\\&\quad-\cdots-\frac{n-1}{2}(\hat{d}_n-\underline{d}_n)]\}/n(n-1)\\&=\frac{m}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)(\hat{d}_i-\underline{d}_i)}{2n(n-1)}.\end{aligned}$$

下面我们给出 n 阶极小强连通块的平均连通度的上界.

定理 10 设 D 是一个 n $(n\geq4)$ 阶极小强连通块, 则

$$\bar{\kappa}(D)\leq2-\frac{6n-13}{n(n-1)}.$$

证明 令 $G(D)$ 的度序列为 $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$, 其中 $d_1\geq d_2\geq\cdots\geq d_n$. 由定理 5 可知每个极小强连通块都至少包含两个出度与入度同时为 1 的点, 所以 $d_{n-1}=d_n=2$. 令 $s=2m-4-(n-2)\lfloor\frac{2m-4}{n-2}\rfloor$. 由推论 2 的证明可知, 当 $d_1=\cdots=d_s=d'+1$, $d_{s+1}=\cdots=d_{n-2}=d'$ 和 $d_{n-1}=d_n=2$ 时, 其中 $d'=\lfloor\frac{2m-4}{n-2}\rfloor$, M 取得最小值. 因此

$$\begin{aligned}M&\geq\sum_{i=1}^{s}(n-2i+1)(d'+1)+\sum_{i=s+1}^{n-2}(n-2i+1)d'+2(-n+3)+2(-n+1)\\&=\sum_{i=1}^{n-2}(n-2i+1)d'+\sum_{i=1}^{s}(n-2i+1)-4n+8\\&=2(n-2)d'+s(n-s)-4n+8.\end{aligned}$$

从而由推论 1 可得

$$\begin{aligned}\bar{\kappa}(D) &\le \frac{m}{n}-\frac{2(n-2)d'+s(n-s)-4n+8}{2n(n-1)}\\ &=\frac{(n-3)(n-2)d'+s(s-1)+8n-12}{2n(n-1)}.\end{aligned}$$

又由定理 4 可知 $n\le m\le 2n-3$, 则 $2\le d'\le\lfloor\frac{4n-10}{n-2}\rfloor=3$ $(n\ge 4)$. 因为 $s(d'+1)+(n-2-s)d'+4=2m\le 4n-6$, 所以化简可得 $s\le 4n-10-(n-2)d'$, 从而当 $d'=2$ 时, $s\le n-2$; 当 $d'=3$ 时, $s\le n-4$. 因此

$$\bar{\kappa}(D)\le\frac{3(n-3)(n-2)+(n-4)(n-5)+8n-12}{2n(n-1)}=2-\frac{6n-13}{n(n-1)}.$$

定理 11　设 D 是一个 n $(n\ge 4)$ 阶极小强连通块, 则

$$\bar{\kappa}(D)\le\begin{cases}\frac{2n-3}{n}, & t=0;\\ 2-\frac{4n-5}{n(n-1)}, & t\ne 0,\end{cases}$$

其中 t 表示 $G(D)$ 中奇度点的个数.

证明　设 D 的出度序列和入度序列分别为 $(d_1^+,d_2^+,\cdots,d_n^+)$ 和 $(d_1^-,d_2^-,\cdots,d_n^-)$, 且不妨设 $|d_1^+-d_1^-|\ge|d_2^+-d_2^-|\ge\cdots\ge|d_n^+-d_n^-|$. 令 $G(D)$ 中奇度点的个数为 t, 偶度点的个数为 $n-t$. 设 $N=\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)(\hat{d}_i-\underline{d}_i)$, 则

$$\begin{aligned}N&=\sum_{i=1}^{n}(n-2i+1)(\hat{d}_i-\underline{d}_i)\\ &=(n-1)(\hat{d}_1-\underline{d}_1)+(n-3)(\hat{d}_2-\underline{d}_2)+\cdots+(\hat{d}_{n/2}-\underline{d}_{n/2})-(\hat{d}_{(n/2)+1}-\underline{d}_{(n/2)+1})-\cdots-(n-1)(\hat{d}_n-\underline{d}_n)\\ &=(n-1)[(\hat{d}_1-\underline{d}_1)-(\hat{d}_n-\underline{d}_n)]+(n-3)[(\hat{d}_2-\underline{d}_2)-(\hat{d}_{n-1}-\underline{d}_{n-1})]+\cdots+[(\hat{d}_{n/2}-\underline{d}_{n/2})-(\hat{d}_{(n/2)+1}-\underline{d}_{(n/2)+1})].\end{aligned}$$

由上述式子可知当 $\hat{d}_1=\underline{d}_1+1,\cdots,\hat{d}_t=\underline{d}_t+1$ 和 $\hat{d}_{t+1}=\underline{d}_{t+1},\cdots,\hat{d}_n=\underline{d}_n$ 时, N 取得最小值. 因此

$$N\ge\sum_{i=1}^{t}(n-2i+1)=t(n-t).$$

由定理 4 可知 $n\le m\le 2n-3$. 由定理 5 可得 $d_{n-1}^+=d_{n-1}^-=d_n^+=d_n^-=1$, 从而 $0\le t\le n-2$.

若 $t=0$, 则由推论 3 可得

$$\bar{\kappa}(D)\le\frac{2n-3}{n}.$$

若 $t\ne 0$. 因为奇度点的个数是偶数个, 所以 $2\le t\le n-2$. 当 $t=2$ 或者 $t=n-2$ 时, $t(n-t)$ 取得最小值 $2(n-2)$. 因此由推论 3 可得

$$\bar{\kappa}(D)\le\frac{2n-3}{n}-\frac{2(n-2)}{2n(n-1)}=2-\frac{4n-5}{n(n-1)}.$$

例 1　令有向图 $D=(V(D),A(D))$ 的点集为 $V(D):=\{a_1,a_2,\cdots,a_k,b_1,b_2,\cdots,b_k\}$, 其中 $k\ge 2$, 弧集为

$$\begin{aligned}A(D):=&\{(a_i,a_{i+1})|i=1,2,\cdots,k-1\}\\ &\cup\{(b_i,b_{i+1})|i=1,2,\cdots,k-1\}\\ &\cup\{(a_i,b_{i-1})|i=2,3,\cdots,k\}\\ &\cup\{(b_i,a_i)|i=1,2,\cdots,k\}.\end{aligned}$$

极小强连通块如图 3 所示.

因为任意去掉弧 (a_i,a_{i+1}) 或者 (b_i,b_{i+1}), 底图都有一个割点, 而任意去掉弧 (a_i,b_{i-1}) 或者 (b_i,a_i), 有向图都不是强连通的, 所以 D 是一个极小强连通块. D 的全连通度

$$\begin{aligned}K(D)&=(A_n^2-A_{n-2}^2)+3(n-3)+3(n-4)+\frac{3}{2}A_{n-4}^2\\ &=n(n-1)-(n-2)(n-3)+3(2n-7)+\frac{3}{2}(n-4)(n-5)\\ &=n(n-1)+\frac{1}{2}(n-2)(n-3).\end{aligned}$$

D 的平均连通度

$$\bar{\kappa}(D)=\frac{n(n-1)+\frac{1}{2}(n-2)(n-3)}{n(n-1)}=1+\frac{(n-2)(n-3)}{2n(n-1)}<\frac{3}{2}.$$

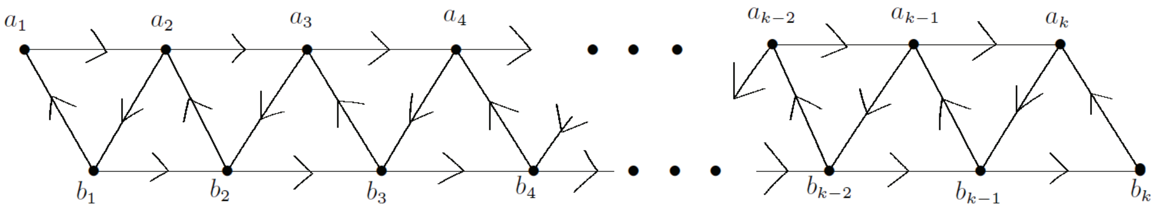

图 3　一类极小强连通块

我们在定理 10 和定理 11 中得到的极小强连通块的平均连通度的上界可能不是最好的上界, 这主要是因为我们在证明的过程中对极小强连通块的平均连通度放缩较大. 对于极小强连通块的平均连通度的上界, 我们猜测例 1 中的有向图达到最大平均连通度, 并给出如下猜想.

猜想 1　设 D 是一个 n 阶极小强连通块, 则

$$1\le\bar{\kappa}(D)<\frac{3}{2}.$$

参考文献:

[1] CASABLANCA R M, MOL L, OELLERMANN O R. Average connectivity of minimally 2-connected graphs and average edge-connectivity of minimally 2-edge-connected graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2021, 289: 233-247.

[2] TIAN Y Z, MENG J X. Superconnected and hyperconnected 6-regular transitive graphs[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition), 2008, 25(3): 253-262.

[3] TIAN Y Z, MENG J X, CHEN X. On restricted edge-connectivity of half-transitive multigraphs[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition), 2018, 35(1): 34-41.

[4] ZHANG S, TIAN Y Z, MENG J X. Arc connectivity of balanced half-transitive digraphs[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition), 2014, 31(1): 22-25.

[5] DANKELMANN P, OELLERMANN O R. Bounds on the average connectivity of a graph[J]. Discrete Applied Mathematics, 2003, 129(2/3): 305-318.

[6] ABAJO E, CASABLANCA R M, DIÁNEZ A, et al. On average connectivity of the strong product of graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2013, 161(18): 2795-2801.

[7] KIM J, SUIL O. Average connectivity and average edge-connectivity in graphs[J]. Discrete Mathematics, 2013, 313(20): 2232-2238.

[8] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory[M]. Berlin: Springer, 2008.

[9] JENSEN J B, GUTIN G. Digraphs theory, algorithms and applications[M]. Berlin: Springer, 2007.

[10] GROTSCHEL M. On minimally strong blocks[J]. Journal of Graph Theory, 1979, 3(3): 213-219.

[11] GELLER D P. Minimally strong digraphs[J]. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 1970, 17(1): 15-22.

[12] HENNING M A, OELLERMANN O R. The average connectivity of a digraph[J]. Discrete Applied Mathematics, 2004, 140(1/2/3): 143-153.

责任编辑：赵新科