

同质网络中具有时滞的谣言传播模型的动力学分析*

童新如¹, 蒋海军^{1,2†}, 陈向勇³

(1. 新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017; 2. 伊犁师范大学 数学与统计学院, 新疆 伊宁 835000;
3. 临沂大学 自动化与电气工程学院, 山东 临沂 276005)

摘要: 综合考虑谣言复发、复发时滞以及个体行为因素, 建立了同质网络中具有时滞的 SHILR (易感者-犹豫者-传播者-潜伏者-恢复者) 谣言传播模型. 首先, 基于平均场方程和下一代矩阵法, 给出了模型的基本再生数. 其次, 利用 Lyapunov 方法和 LaSalle 不变原理分析了模型平衡点的全局渐近稳定性. 此外, 还讨论了时滞对谣言传播的影响. 最后, 给出数值模拟的实例来验证理论结果.

关键词: 谣言复发; 个体行为; 同质网络; 时滞; 稳定性; 谣言传播

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2022.02.26.0001

中图分类号: O175 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2022)06-0663-08

引文格式: 童新如, 蒋海军, 陈向勇. 同质网络中具有时滞的谣言传播模型的动力学分析[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2022, 39(6): 663-670.

英文引文格式: TONG Xinru, JIANG Haijun, CHEN Xiangyong. Dynamic analysis of rumor propagation model with time delay in homogeneous networks[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2022, 39(6): 663-670.

Dynamic Analysis of Rumor Propagation Model with Time Delay in Homogeneous Networks

TONG Xinru¹, JIANG Haijun^{1,2}, CHEN Xiangyong³

(1. School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Yili Normal University, Yining Xinjiang 835000, China;
3. School of Automation and Electrical Engineering, Linyi University, Linyi Shandong 276005, China)

Abstract: Considering the rumor recurrence, time delay and individual behaviors comprehensively, a novel SHILR (Susceptible-Hesitating-Infected-Latent-Recovered) rumor propagation model with time delay is established in homogeneous networks. Firstly, the basic reproduction number of the model is obtained based on the mean field equation and the next generation matrix method. Secondly, the global asymptotic stabilities of the equilibria are analyzed through applying Lyapunov method and LaSalle's invariance principle. Additionally, the influence of time delay on rumor propagation is also discussed. Finally, some numerical simulation examples are given to verify the correctness of the theoretical results.

Key words: rumor recurrence; individual behaviors; homogeneous networks; time delay; stability; rumor propagation

* 收稿日期: 2022-02-26

基金项目: 国家自然科学基金(62163035; 62173175); 新疆应用数学自治区重点实验室项目(XJDX1401); 中央指导的地方科技发展专项(ZYYD2022A05).

作者简介: 童新如(1997-), 女, 硕士生, 从事复杂网络谣言传播动力学研究, E-mail: tongxinru11@163.com.

† 通讯作者: 蒋海军(1968-), 男, 博士, 教授, E-mail: jianghaijunxju@163.com.

0 引言

谣言是指没有相应的事实依据而被捏造出来的一种言论. 而网络又是自由交流的平台, 于是越来越多的网络谣言出现在人们的生活里. 在信息全球化时代, 谣言不再受制于时间与空间, 任意一条网络谣言都可能在全世界范围内实时大量的传播, 从而扰乱正常的生活秩序, 以至于带来一系列的负面影响^[1-2]. 例如一些人在网上散布谣言称生活必需品的价格将大幅上涨, 以至于一些市民抢购生活用品而造成市场混乱. 类似的事件层出不穷, 这些事实都告诫我们: 由于网络谣言越来越多且影响恶劣, 因此研究网络谣言的传播机制进而控制谣言具有重要意义.

谣言传播与传染病传播有很多相似的地方. 一直以来, 谣言传播模型大多借鉴了传染病模型的成果. 最为经典的谣言传播动力学可以追溯到 1965 年 Daley 和 Kendall 所提出的 DK 模型^[3], 以及 Maki 和 Thompson 所提出的 MT 模型^[4]. 尽管 DK 模型和 MT 模型只适用于描述传统口口相传的小范围谣言传播过程, 不能完全反映谣言传播的现实特征, 也没有考虑到网络的拓扑结构对谣言传播的影响, 但它们却为后来研究复杂网络上的谣言传播提供了研究框架和一定的理论基础.

近年来, 国内外众多学者利用数学模型对谣言传播进行了定性描述, 并且给出了谣言消除或盛行的阈值条件. 此外, 关于谣言传播的分析, 学者们主要做了以下两方面研究: 一方面, 随着复杂网络理论的快速发展, 越来越多的学者开始研究网络拓扑结构对谣言传播的影响^[5-7]. 值得注意的是, Zanette 首次将复杂网络理论引入到谣言传播模型中, 并建立了小世界网络中的谣言传播模型^[8-9]. 研究表明, 网络结构对谣言的传播有显著的影响. 此后, 越来越多的学者将谣言传播的动态行为与网络的拓扑特征联系起来, 进一步提出了基于不同网络结构的谣言传播模型来阐明谣言在不同环境下的传播过程^[10-12]. 另一方面, 为了进一步地了解谣言在现实世界中的传播动态, 许多学者考虑了各种各样的谣言传播机制, 如信任机制^[13]、遗忘机制^[14]、潜伏机制^[15]、怀疑机制^[16]等. 不可否认, 网络的拓扑结构和各种各样的传播机制在谣言的传播过程中发挥着重要作用.

值得指出的是, 犹豫机制在谣言传播过程中也起着重要作用. 最近, 为了研究犹豫机制对谣言传播的影响, Liu 等建立了具有犹豫机制的谣言传播模型^[17], 并指出个体在面对谣言时一般具有犹豫的心理. 然而, 在真实的谣言传播过程中, 人们面对谣言时往往不仅会犹豫, 而且还会表现出不同的个体行为, 即当谣言易感个体听到谣言后, 往往有三种不同的行为选择: 第一种选择是相信并传播谣言从而成为谣言传播个体; 第二种选择是犹豫是否传播谣言从而成为谣言犹豫个体; 第三种选择是对谣言不感兴趣从而成为谣言恢复个体. 因此, 本文将在同质网络中考虑这三种不同的个体行为对谣言传播的影响.

此外, 由于谣言在传播的过程中会有复发的可能性, Yao 等建立了具有复发机制的谣言传播模型^[18]. 谣言的复发是指一些谣言传播个体可能在当下阶段由于某些原因而停止传播谣言, 但在下一阶段可能会因为一些不可预见事情的发生又重新燃起了传播谣言的兴趣, 从而选择再次传播谣言. 显然, 将复发机制考虑到谣言传播的过程中会更加接近谣言传播的真实情况. 另一方面, 注意到上述研究并没有考虑到网络拓扑结构以及复发时滞对谣言传播的影响, 也没有对谣言传播平衡点的全局稳定性进行严格的理论分析. 事实上, 这些因素对谣言传播的建模分析来说是至关重要的. 于是, 本文将建立同质网络中具有谣言复发和复发时滞的谣言传播模型来更好地刻画谣言, 并且对谣言传播平衡点的全局稳定性进行严格证明. 除此之外, Allport 和 Postman 认为, 被讨论的信息如果内容越重要并且表达越模糊, 那么谣言传播的速度越快, 进而影响的范围和程度就越大^[19-20]. 因此, 本文将内容的重要性和模糊性统一看作谣言对个体的吸引力从而刻画个体对谣言的感兴趣程度, 并且在建模过程中引入谣言吸引力参数 m , 从而建立了同质网络中具有时滞的 SHILR 谣言传播模型.

1 模型建立

本节将利用复杂网络理论对谣言传播过程进行建模. 其中, 节点表示所有使用社交网络平台的个体, 而两个节点之间的连边则表示通过网络连接的两个体之间的联系. 因此, 谣言可以通过这些节点之间的边进行传播. 假设网络的平均度是 $\langle k \rangle$, 并且将网络中的用户分为五类, 分别表示 t 时刻的谣言易感个体 $S(t)$, 谣言犹豫个体 $H(t)$, 谣言传播个体 $I(t)$, 谣言潜伏个体 $L(t)$ 以及谣言恢复个体 $R(t)$. 谣言的传播过程如图 1 所示.

基于图 1 中的谣言传播规律, 作如下解释: 假设系统的移入率是 B , 每个仓室的移出率是 μ . 当易感个体 S 通过与谣言传播个体 I 进行接触, 以 α 的概率听到谣言, 易感个体就会有三种可能的选择: 第一种选择是相信

并传播谣言, 从而以 θ_1 的概率成为谣言传播个体; 第二种选择是犹豫是否要传播谣言, 从而以 θ_2 的概率成为谣言犹豫个体 H ; 第三种选择是不相信也不传播谣言, 从而以 $(1-\theta_1-\theta_2)$ 的概率成为谣言恢复个体 R . 在经过一段时间的考虑之后, 犹豫个体 H 会有两种选择: 犹豫个体可能由于被谣言吸引从而以 $m\beta$ 的概率变成谣言传播个体 (m 代表谣言的吸引力); 也可能不被谣言吸引从而以 $(1-m)\beta$ 的概率成为谣言恢复个体. 而对于谣言传播个体而言, 当谣言被验证是假消息时, 他们就会变成谣言潜伏状态. 潜伏状态的个体 L 可能完全失去了传播谣言的兴趣, 从而以 η 的概率成为谣言恢复个体; 也有可能以 φ 的概率再次变成谣言传播个体.

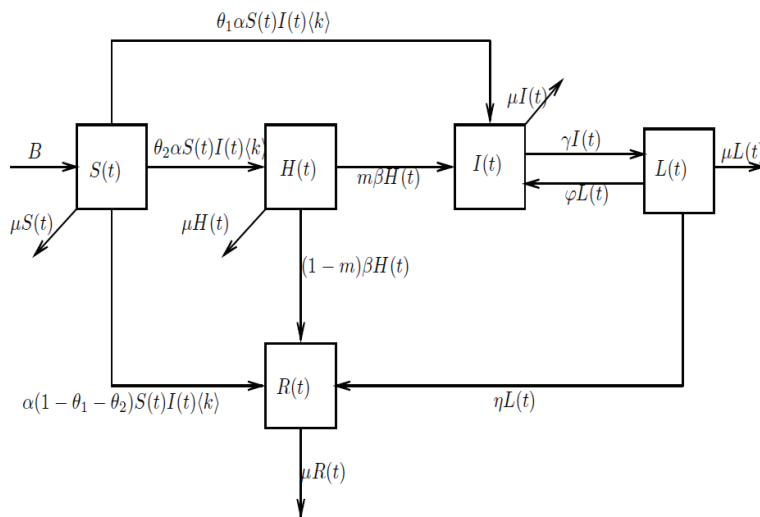


图 1 SHILR 谣言传播过程

综上所述, 基于平均场理论, 建立如下同质网络中具有谣言复发、复发时滞以及个体行为的 SHILR 谣言传播模型:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = B - \alpha \langle k \rangle S(t)I(t) - \mu S(t) \\ \frac{dH(t)}{dt} = \theta_2 \alpha \langle k \rangle S(t)I(t) - (\beta + \mu)H(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \theta_1 \alpha \langle k \rangle S(t)I(t) + m\beta H(t) - (\gamma + \mu)I(t) + \varphi L(t - \tau) \\ \frac{dL(t)}{dt} = \gamma I(t) - (\eta + \mu)L(t) - \varphi L(t - \tau) \\ \frac{dR(t)}{dt} = (1 - m)\beta H(t) + \alpha(1 - \theta_1 - \theta_2) \langle k \rangle S(t)I(t) + \eta L(t) - \mu R(t) \end{cases} \quad (1)$$

由于系统 (1) 的前四个方程独立于恢复个体 R , 为了方便起见, 考虑如下等价系统:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = B - \alpha \langle k \rangle S(t)I(t) - \mu S(t) \\ \frac{dH(t)}{dt} = \theta_2 \alpha \langle k \rangle S(t)I(t) - (\beta + \mu)H(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \theta_1 \alpha \langle k \rangle S(t)I(t) + m\beta H(t) - (\gamma + \mu)I(t) + \varphi L(t - \tau) \\ \frac{dL(t)}{dt} = \gamma I(t) - (\eta + \mu)L(t) - \varphi L(t - \tau) \end{cases} \quad (2)$$

其中: $B > 0, \mu > 0, \alpha > 0, \theta_1 \in (0, 1), \theta_2 \in (0, 1), 1 - \theta_1 - \theta_2 \in (0, 1), m > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \varphi > 0, \eta > 0$. 记 $N(t)$ 是 t 时刻用户的总数, 则 $N(t) = S(t) + H(t) + I(t) + L(t) + R(t)$. 此外, 系统还满足初始条件: $S(t) = \phi_1(t) \geq 0, H(t) = \phi_2(t) \geq 0, I(t) = \phi_3(t) \geq 0, L(t) = \phi_4(t) \geq 0, t \in (-\tau, 0]$, 其中 $\phi_i(t) (i = 1, 2, 3, 4)$ 是非负连续函数.

利用常数变易法, 可得 $\frac{dN(t)}{dt} = B - \mu N, N(t) = (N_0 - \frac{B}{\mu})e^{-\mu t} + \frac{B}{\mu}$, 其中 $N_0 = N(0)$, 并且 $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{B}{\mu}$. 于是, 系统 (1) 解的正不变集可以写成

$$\Gamma = \{(S, H, I, L, R) \in R_5^+ | S(t) + H(t) + I(t) + L(t) + R(t) \leq \frac{B}{\mu}\}.$$

2 平衡点的动力学分析

众所周知,在传染病学领域,基本再生数 R_0 表示在发病初期,当所有人均为易感者时,一个病人在其平均患病期内所传染的人数,它是判断疾病是否传播的重要阈值.类似的,在谣言传播的研究中,定义 R_0 来判断谣言是否传播,并分析平衡点的存在性与稳定性.

定理 1 定义基本再生数

$$R_0 = \frac{(\varphi + \mu + \eta)\alpha B \langle k \rangle [m\beta\theta_2 + (\mu + \beta)\theta_1]}{\mu(\mu + \beta)[(\mu + \gamma)(\varphi + \mu + \eta) - \varphi\gamma]}.$$

(i) 若 $R_0 < 1$, 则系统 (2) 存在唯一的无谣言平衡点 $E_0 = (\frac{B}{\mu}, 0, 0, 0)$.

(ii) 若 $R_0 > 1$, 则系统 (2) 存在唯一的谣言传播平衡点

$$E^* = (S^*, H^*, I^*, L^*) = \left(\frac{B}{\mu R_0}, \frac{B\theta_2(R_0 - 1)}{R_0 \langle k \rangle (\beta + \mu)}, \frac{\mu(R_0 - 1)}{\alpha \langle k \rangle}, \frac{\mu\gamma(R_0 - 1)}{\alpha \langle k \rangle (\varphi + \mu + \eta)} \right).$$

证明 当系统 (2) 达到平衡时,各个仓室用户数量不再随时间的改变而改变.于是,令系统 (2) 等号右边为零,解如下方程:

$$\begin{cases} B - \alpha \langle k \rangle S(t)I(t) - \mu S(t) = 0 \\ \theta_2 \alpha \langle k \rangle S(t)I(t) - (\beta + \mu)H(t) = 0 \\ \theta_1 \alpha \langle k \rangle S(t)I(t) + m\beta H(t) - (\gamma + \mu)I(t) + \varphi L(t - \tau) = 0 \\ \gamma I(t) - (\eta + \mu)L(t) - \varphi L(t - \tau) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

由于当谣言消失时,有 $I(t) = 0$. 于是,将 $I(t) = 0$ 代入系统 (2), 可得 $S(t) = \frac{B}{\mu}, H(t) = 0, L(t) = 0$. 因此,无谣言平衡点为 $E_0 = (\frac{B}{\mu}, 0, 0, 0)$.

此外,下面利用下一代矩阵法^[21]求系统 (2) 的基本再生数.注意到,表示感染的仓室有 $H(t), I(t), L(t)$, 对其进行重新排序为 $(H(t), I(t), L(t))$. 具有新感染的非线性项和剩余项分别为 \mathcal{F} 和 \mathcal{V} , 则

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \theta_2 \alpha \langle k \rangle S(t)I(t) \\ \theta_1 \alpha \langle k \rangle S(t)I(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \mathcal{V} = \begin{pmatrix} (\beta + \mu)H(t) \\ -m\beta H(t) + (\gamma + \mu)I(t) - \varphi L(t - \tau) \\ (\eta + \mu)L(t) + \varphi L(t - \tau) - \gamma I(t) \end{pmatrix}.$$

\mathcal{F} 和 \mathcal{V} 在 $E_0 = (\frac{B}{\mu}, 0, 0, 0)$ 处的 Jacobian 矩阵分别为:

$$F = D\mathcal{F}(E_0) = \begin{pmatrix} 0 & \theta_2 \alpha \langle k \rangle \frac{B}{\mu} & 0 \\ 0 & \theta_1 \alpha \langle k \rangle \frac{B}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V = D\mathcal{V}(E_0) = \begin{pmatrix} \mu + \beta & 0 & 0 \\ -m\beta & \gamma + \mu & -\varphi \\ 0 & -\gamma & \varphi + \mu + \eta \end{pmatrix}.$$

系统 (2) 的基本再生数即为矩阵 FV^{-1} 的谱半径, 则计算得到基本再生数 R_0 的表达式如下:

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{(\varphi + \mu + \eta)\alpha B \langle k \rangle [m\beta\theta_2 + (\mu + \beta)\theta_1]}{\mu(\mu + \beta)[(\mu + \gamma)(\varphi + \mu + \eta) - \varphi\gamma]} \quad (4)$$

为了方便计算,令 $a_1 = \beta + \mu, a_2 = \gamma + \mu, a_3 = \varphi + \eta + \mu$. 此外,经计算可知 $a_2 a_3 - \varphi\gamma = (\mu + \gamma)(\varphi + \eta + \mu) - \varphi\gamma > 0$. 于是

$$R_0 = \frac{a_3 \alpha \langle k \rangle B (m\beta\theta_2 + a_1\theta_1)}{\mu a_1 (a_2 a_3 - \varphi\gamma)}.$$

另一方面,类似于无谣言平衡点的计算,令 E^* 是系统 (2) 的谣言盛行平衡点,则 E^* 满足以下方程:

$$\begin{cases} B - \alpha \langle k \rangle S^* I^* - \mu S^* = 0 \\ \theta_2 \alpha \langle k \rangle S^* I^* - (\beta + \mu)H^* = 0 \\ \theta_1 \alpha \langle k \rangle S^* I^* + m\beta H^* - (\gamma + \mu)I^* + \varphi L^* = 0 \\ \gamma I^* - (\varphi + \eta + \mu)L^* = 0 \end{cases} \quad (5)$$

通过求解 (5), 得到唯一的谣言盛行平衡点 $E^* = (S^*, H^*, I^*, L^*)$ 如下:

$$S^* = \frac{B}{\mu R_0}, H^* = \frac{B\theta_2(R_0 - 1)}{R_0\langle k\rangle(\beta + \mu)}, I^* = \frac{\mu(R_0 - 1)}{\alpha\langle k\rangle}, L^* = \frac{\mu\gamma(R_0 - 1)}{\alpha\langle k\rangle(\varphi + \mu + \eta)}.$$

因此, 若 $R_0 > 1$ 时, 则系统 (2) 存在唯一的谣言传播平衡点 $E^* = (S^*, H^*, I^*, L^*)$.

定理 2 若 $R_0 < 1$, 则系统 (2) 中的无谣言平衡点 $E_0 = (\frac{B}{\mu}, 0, 0, 0)$ 是全局渐近稳定的.

证明 构造如下 Lyapunov 泛函 $V_1(t)$:

$$V_1(t) = m\beta H(t) + a_1 I(t) + \frac{a_1\varphi}{a_3} L(t) + a_1\varphi\left(1 - \frac{\varphi}{a_3}\right) \int_{t-\tau}^t L(x) dx \tag{6}$$

其中 $a_1 = \beta + \mu, a_2 = \gamma + \mu, a_3 = \varphi + \eta + \mu$. 因此, 将 (6) 沿着系统 (2) 对 t 求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= m\beta\dot{H}(t) + a_1\dot{I}(t) + \frac{a_1\varphi}{a_3}\dot{L}(t) + a_1\varphi\left(1 - \frac{\varphi}{a_3}\right)[L(t) - L(t-\tau)] \\ &= m\beta\theta_2\alpha\langle k\rangle S(t)I(t) + a_1\theta_1\alpha\langle k\rangle S(t)I(t) - a_1a_2I(t) + a_1\varphi L(t-\tau) + \frac{a_1}{a_3}\varphi\gamma I(t) \\ &\quad - \frac{a_1\varphi(a_3 - \varphi)}{a_3}L(t) - \frac{a_1\varphi^2}{a_3}L(t-\tau) + a_1\varphi\left(1 - \frac{\varphi}{a_3}\right)[L(t) - L(t-\tau)] \\ &= m\beta\theta_2\alpha\langle k\rangle S(t)I(t) + a_1\theta_1\alpha\langle k\rangle S(t)I(t) - a_1a_2I(t) + \frac{a_1}{a_3}\varphi\gamma I(t) \\ &\quad + a_1\varphi L(t-\tau)\left(1 - \frac{\varphi}{a_3}\right) - a_1\varphi\left(1 - \frac{\varphi}{a_3}\right)L(t) + a_1\varphi\left(1 - \frac{\varphi}{a_3}\right)[L(t) - L(t-\tau)] \\ &= m\beta\theta_2\alpha\langle k\rangle S(t)I(t) + a_1\theta_1\alpha\langle k\rangle S(t)I(t) - a_1a_2I(t) + \frac{a_1}{a_3}\varphi\gamma I(t) \\ &\leq m\beta\theta_2\alpha\langle k\rangle \frac{B}{\mu}I(t) + a_1\theta_1\alpha\langle k\rangle \frac{B}{\mu}I(t) - a_1a_2I(t) + \frac{a_1}{a_3}\varphi\gamma I(t) \\ &= \left[\frac{a_3(m\beta\theta_2 + \theta_1a_1)\alpha\langle k\rangle B}{\mu a_3} - \frac{a_1(a_2a_3 - \varphi\gamma)}{a_3}\right]I(t) \\ &= (R_0 - 1)\frac{a_1(a_2a_3 - \varphi\gamma)}{a_3}I(t) \end{aligned} \tag{7}$$

由此可见, 在 (7) 中, 当 $R_0 < 1$ 时, 有 $\dot{V}_1(t) \leq 0$. 此外, 当且仅当 $S(t) = \frac{B}{\mu}, H(t) = 0, I(t) = 0, L(t) = 0$ 时, 有 $\dot{V}_1(t) = 0$. 因此, 根据 LaSalle 不变原理^[22]可知: 当 $R_0 < 1$ 时, 系统 (2) 的无谣言平衡点 E_0 是全局渐近稳定的.

定理 3 若 $R_0 > 1$, 则谣言传播平衡点 $E^* = (S^*, H^*, I^*, L^*)$ 是全局渐近稳定的.

证明 构造如下 Lyapunov 函数 $V_2(t)$:

$$V_2(t) = (m\beta\theta_2 + a_1\theta_1)S^*g\left(\frac{S(t)}{S^*}\right) + m\beta H^*g\left(\frac{H(t)}{H^*}\right) + a_1I^*g\left(\frac{I(t)}{I^*}\right),$$

其中, 对于所有的 $n > 0$, 有 $g(n) = n - 1 - \ln n \geq g(1) = 0$ 成立. 令

$$x = \frac{S(t)}{S^*}, y = \frac{H(t)}{H^*}, z = \frac{I(t)}{I^*}, u = \frac{L(t)}{L^*}.$$

将 $V_2(t)$ 沿着系统 (2) 对 t 求导可得

$$\begin{aligned} \frac{dV_2(t)}{dt} &= (m\beta\theta_2 + a_1\theta_1)\left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right)\frac{dS(t)}{dt} + m\beta\left(1 - \frac{H^*}{H(t)}\right)\frac{dH(t)}{dt} + a_1\left(1 - \frac{I^*}{I(t)}\right)\frac{dI(t)}{dt} \\ &= (m\beta\theta_2 + a_1\theta_1)\left(1 - \frac{S^*}{S(t)}\right)\left(B - \alpha\langle k\rangle S(t)I(t) - \mu S(t)\right) \\ &\quad + m\beta\left(1 - \frac{H^*}{H(t)}\right)\left(\theta_2\alpha\langle k\rangle S(t)I(t) - a_1H(t)\right) \\ &\quad + a_1\left(1 - \frac{I^*}{I(t)}\right)\left(\theta_1\alpha\langle k\rangle S(t)I(t) + m\beta H(t) - a_2I(t) + \varphi L(t-\tau)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2(m\beta\theta_2 + a_1\theta_1)\alpha\langle k \rangle S^* I^* + 2(m\beta\theta_2 + a_1\theta_1)\mu S^* + a_1 m \beta H^* + a_1 \varphi L(t - \tau) + a_1 \varphi L^* \\
 &\quad - [\mu S^*(m\beta\theta_2 + a_1\theta_1) + a_1\theta_1\alpha\langle k \rangle S^* I^*] x \\
 &\quad - [\mu S^*(m\beta\theta_2 + a_1\theta_1) + (a_1\theta_1 + m\beta\theta_2)\alpha\langle k \rangle S^* I^*] \frac{1}{x} \\
 &\quad + [a_1 m \beta H^* - m\beta\theta_2\alpha\langle k \rangle S^* I^*] y + [m\beta\theta_2\alpha\langle k \rangle S^* I^* - a_1 m \beta H^* - a_1 \varphi L^*] z \\
 &\quad - m\beta\theta_2\alpha\langle k \rangle S^* I^* \frac{xz}{y} - a_1 m \beta H^* \frac{y}{z} - a_1 \varphi L(t - \tau) \frac{1}{z} \\
 &= m\beta\theta_2\alpha\langle k \rangle S^* I^* (2 - \frac{1}{x} - y + z - \frac{xz}{y}) + a_1\theta_1\alpha\langle k \rangle S^* I^* (2 - x - \frac{1}{x}) \\
 &\quad + \mu S^*(m\beta\theta_2 + a_1\theta_1) (2 - x - \frac{1}{x}) + a_1 m \beta H^* (1 + y - z - \frac{y}{z}) \\
 &\quad + a_1 \varphi L(t - \tau) + a_1 \varphi L^* - a_1 \varphi L^* z - a_1 \varphi L(t - \tau) \frac{1}{z}.
 \end{aligned}$$

根据谣言传播平衡点满足的条件 (5) 可进一步得到

$$\begin{aligned}
 \frac{dV_2(t)}{dt} &= m\beta\theta_2\alpha\langle k \rangle S^* I^* (3 - \frac{1}{x} - \frac{xz}{y} - \frac{y}{z}) + a_1\theta_1\alpha\langle k \rangle S^* I^* (2 - x - \frac{1}{x}) \\
 &\quad + \mu S^*(m\beta\theta_2 + a_1\theta_1) (2 - x - \frac{1}{x}) - a_1 \varphi L(t - \tau) (\frac{1}{z} - 1 - \ln \frac{1}{z}) \\
 &\quad - a_1 \varphi L(t - \tau) \ln \frac{1}{z} - a_1 \varphi L^* (-1 + z - \ln z) - a_1 \varphi L^* \ln z.
 \end{aligned}$$

由于 $3 - \frac{1}{x} - \frac{xz}{y} - \frac{y}{z} \leq 0$, $2 - x - \frac{1}{x} \leq 0$, $\frac{1}{z} - 1 - \ln \frac{1}{z} \geq 0$ 以及 $-1 + z - \ln z \geq 0$, 于是 $\frac{dV_2(t)}{dt} \leq 0$. 此外, 当且仅当 $S(t) = S^*, H(t) = H^*, I(t) = I^*, L(t) = L^*$ 时, 有 $\frac{dV_2(t)}{dt} = 0$. 因此, 根据 LaSalle 不变原理^[22]可知: 当 $R_0 > 1$ 时, 系统 (2) 的谣言盛行平衡点 E^* 是全局渐近稳定的.

3 数值模拟

本节通过数值实例验证理论结果的正确性, 并分析时滞对谣言传播的影响.

3.1 无谣言平衡点的全局稳定性

为了证明定理 2 的有效性, 选取系统 (2) 中的一组参数: $n = 200, B = 0.02, \alpha = 0.2, \beta = 0.1, \gamma = 0.16, \mu = 0.02, \theta_1 = 0.15, \theta_2 = 0.2, \eta = 0.2, \varphi = 0.1, m = 0.02, \tau = 2$. 在这组参数的取值下, 有 $R_0 = 0.7714 < 1$. 从图 2(a) 中可以看到, 如果 $R_0 < 1$, 此时的谣言传播个体的数量会随着时间的流逝而最终消失. 从图 2(b) 中可以看到, 当 $R_0 < 1$ 时, 从不同初始值出发的解都会收敛到无谣言平衡点 E_0 , 从而无谣言平衡点 E_0 是全局渐近稳定的.

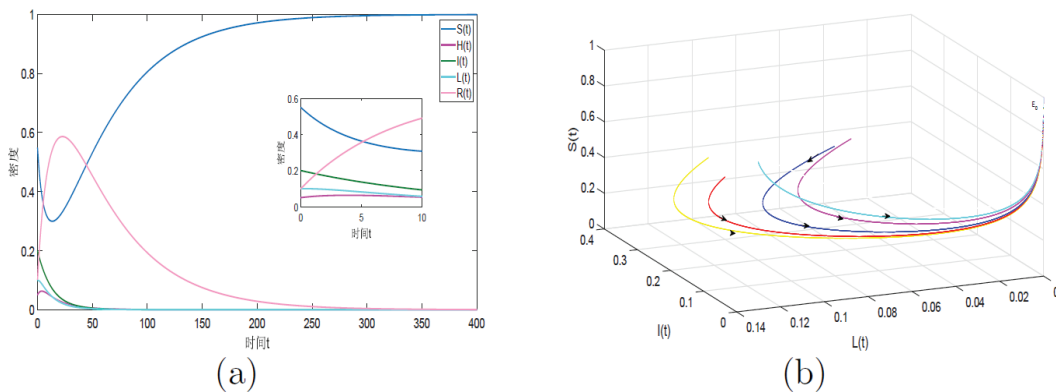


图 2 无谣言平衡点 E_0 的稳定性

3.2 谣言传播平衡点的全局稳定性

为了证明定理 3 的有效性, 选取另一组参数: $n = 200, B = 0.02, \alpha = 0.35, \beta = 0.1, \gamma = 0.2, \mu = 0.02, \theta_1 = 0.3, \theta_2 = 0.2, \eta = 0.2, \varphi = 0.1, m = 0.4, \tau = 2$. 此时, 有 $R_0 = 2.6644 > 1$. 谣言传播平衡点 E^* 的稳定性如图 3 所示. 图 3(a) 表明, 当 $R_0 > 1$ 时, 谣言传播者的密度变化比较复杂, 先下降后上升再下降, 但是谣言的最终传播规模却是收敛

到一个固定的常数. 这就意味着谣言将继续盛行, 谣言传播者的密度不为零. 图 3(b) 表明, 当 $R_0 > 1$ 时, 从不同初始值出发的解都会收敛到谣言传播平衡点 E^* , 从而谣言传播平衡点 E^* 是全局渐近稳定的.

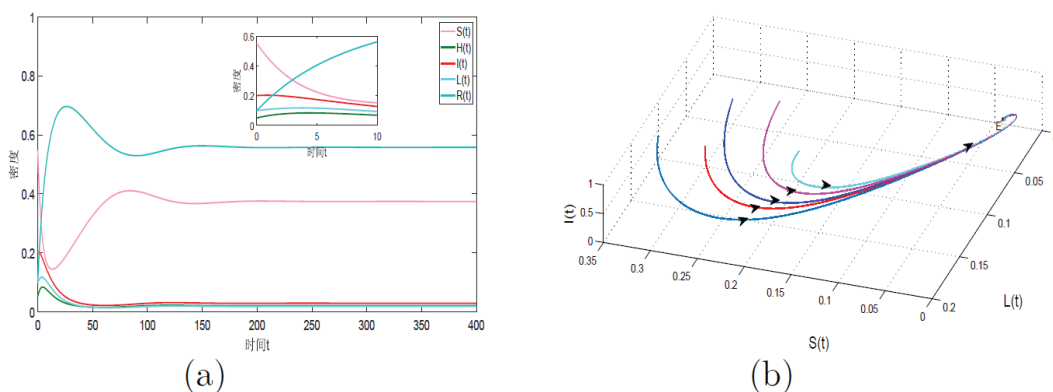


图 3 谣言传播平衡点 E^* 的稳定性

3.3 时滞对谣言传播的影响

为了讨论复发时滞对谣言传播的影响, 分别取 τ 为 0, 5, 10, 15, 20, 而其它参数与 $R_0 > 1$ 时所选取的参数一致. 如图 4 所示, 时滞的存在使得谣言的传播过程更为复杂, 但是并不影响谣言传播的最终规模.

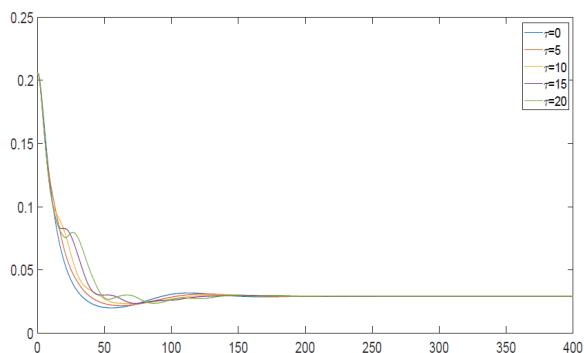


图 4 时滞 τ 对谣言传播的影响

4 结论

本文综合考虑了谣言复发、复发时滞以及个体行为因素, 建立了同质网络中具有时滞的 SHILR 谣言传播模型. 首先, 利用下一代矩阵法得到了基本再生数 R_0 . 其次, 利用 Lyapunov 方法和 LaSalle 不变原理^[22]分析了模型平衡点的稳定性. 同时, 数值模拟结果有效地验证了理论的有效性, 最后分析了时滞对谣言传播的影响. 结果表明, 时滞的存在使得谣言传播的过程更为复杂, 但不影响谣言传播的最终规模. 此外, 受到具有随机噪声^[23]和分支现象^[24]传染病动力学的启发, 在同质和异质网络上研究随机扰动下的谣言传播以及研究具有分支现象的谣言传播动力学是今后有待研究和探讨的问题.

参考文献:

- [1] VOSOUGHI S, ROY D, ARAL S. The spread of true and false news online[J]. Science, 2018, 359: 1146-1151.
- [2] THOMAS S A. Lies, damn lies and rumors: an analysis of collective efficacy, rumors and fear in the wake of Katrina[J]. Sociological Spectrum, 2007, 27: 679-703.
- [3] DALEY D J, KENDALL D G. Stochastic rumors[J]. IMA Journal of Applied Mathematics, 1965, 1(1): 42-55.
- [4] MAKI D P, THOMPSON M. Mathematical models and applications: with emphasis on the social, life and management sciences[M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1973.
- [5] YU S Z, YU Z Y, JIANG H J, et al. Dynamical study and event-triggered impulsive control of rumor propagation model on heterogeneous social network incorporating delay[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2021, 145: 110806.
- [6] CHEN S S, JIANG H J, LI L, et al. Dynamical behaviors and optimal control of rumor propagation model with saturation incidence on heterogeneous networks[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2020, 140: 110206.

- [7] ZHU L H, LIU W S, ZHANG Z D. Delay differential equations modeling of rumor propagation in both homogeneous and heterogeneous networks with a forced silence function[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2020, 370: 124925.
- [8] ZANETTE D H. Critical behavior of propagation on small-world networks[J]. *Physical Review E*, 2001, 64(5): 050901.
- [9] ZANETTE D H. Dynamics of rumor propagation on small-world networks[J]. *Physical Review E*, 2002, 65(4): 041908.
- [10] LI J R, JIANG H J, YU Z Y, et al. Dynamical analysis of rumor spreading model in homogeneous complex networks[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2019, 359: 374-385.
- [11] WANG J L, JIANG H J, HU C, et al. Stability and Hopf bifurcation analysis of multi-lingual rumor spreading model with nonlinear inhibition mechanism[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2021, 153: 111464.
- [12] JAIN A, DHAR J, GUPTA V. Rumor model on homogeneous social network incorporating delay in expert intervention and government action[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2020, 84: 105189.
- [13] WANG Y Q, YANG X Y, HAN Y L, et al. Rumor spreading model with trust mechanism in complex social networks[J]. *Communications in Theoretical Physics*, 2013, 59(4): 510-516.
- [14] ZHAO L J, QIU X Y, WANG X L, et al. Rumor spreading model considering forgetting and remembering mechanisms in homogeneous networks[J]. *Physica A*, 2013, 392(4): 987-994.
- [15] AL-TUWAIRQI S, AL-SHEIKH S, AL-AMOUDI R. Qualitative analysis of a rumor transmission model with incubation mechanism[J]. *Open Access Library Journal*, 2015, 2(11): 1-12.
- [16] WANG C J, DAI Z D. Various breathers and rogue waves for the coupled long-wave-short-wave system[J]. *Advances in Difference Equations*, 2014, 2014(1): 1-10.
- [17] LIU X D, LI T, TIAN M. Rumor spreading of a SEIR model in complex social networks with hesitating mechanism[J]. *Advances in Difference Equations*, 2018, 2018(1): 1-24.
- [18] YAO Y, XIAO X, ZHANG C P, et al. Stability analysis of an SDILR model based on rumor recurrence on social media[J]. *Physica A*, 2019, 535: 122236.
- [19] ALLPORT G W, POSTMAN L. *The psychology of rumor*[M]. New York: Henry Holt, 1947.
- [20] ALLPORT G W, POSTMAN L. An analysis of rumor[J]. *Public Opinion Quarterly*, 1946, 10(4): 501-517.
- [21] DRIESSCHE P, WATMOUGH J. Reproduction numbers and subthreshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission[J]. *Mathematical Biosciences*, 2002, 180: 29-48.
- [22] LASALLE J. *The stability of dynamical systems*[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1976.
- [23] RAMZIYA R, ZHANG X L, TENG Z D. The ergodicity and extinction of stochastically perturbed SEIRS epidemic models with saturated Incidence[J]. *Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition)*, 2017, 34(2): 146-151.
- [24] 吴琼, 滕志东. 一类具有饱和发生率和治疗的 SIS 传染病模型的后向分支及动力学行为[J]. *新疆大学学报(自然科学版)*, 2014, 31(2): 174-180.

责任编辑: 赵新科