

# 多语言环境下具有惩罚机制和时滞的 谣言传播动力学研究\*

任静静, 梅雪晖<sup>†</sup>, 罗续鹏, 常忠雪

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

**摘要:** 提出了一种多语言环境下带有惩罚机制和时滞的谣言传播优化控制模型. 首先, 通过分析平均场方程推导出模型的基本再生数  $\mathcal{R}_0$ . 其次, 基于 Routh-Hurwitz 判据、Lyapunov 方法和 LaSalle 不变原理, 研究了无谣言/谣言盛行平衡点的存在性和稳定性. 同时, 为了有效地控制谣言传播和控制成本, 提出了带有惩罚机制的最优控制. 最后, 通过数值模拟验证了理论结果的有效性.

**关键词:** 谣言传播; 惩罚机制; 时滞; 多语言环境; 最优控制

**DOI:** 10.13568/j.cnki.651094.651316.2022.10.13.0002

**中图分类号:** O175 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2023)03-0292-013

**引文格式:** 任静静, 梅雪晖, 罗续鹏, 常忠雪. 多语言环境下具有惩罚机制和时滞的谣言传播动力学研究[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2023, 40(3): 292-304+312.

**英文引文格式:** REN Jingjing, MEI Xuehui, LUO Xupeng, CHANG Zhongxue. Dynamics of rumor propagation model with punishment mechanism and time delay in multi-lingual environment[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2023, 40(3): 292-304+312.

## Dynamics of Rumor Propagation Model with Punishment Mechanism and Time Delay in Multi-Lingual Environment

REN Jingjing, MEI Xuehui, LUO Xupeng, CHANG Zhongxue

(School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China)

**Abstract:** This paper proposes an optimal control model for rumor propagation with punishment mechanism and time delay in a multi-lingual environment. Firstly, the basic reproduction number  $\mathcal{R}_0$  of the model is derived by analyzing the mean field equation. Secondly, based on Routh-Hurwitz judgment, Lyapunov method and LaSalle invariant principle, the existence and stability of rumor-free/rumor-prevailing equilibrium are studied. At the same time, in order to control costs and effectively control the spread of rumors, optimal control with the punishment mechanism is proposed. Finally, the validity of the theoretical results are verified by numerical simulations.

**Key words:** rumor propagation; punishment mechanism; time delay; multi-lingual environment; optimal control

## 0 引言

随着互联网的快速发展, 谣言在社交网络上的传播变得越来越广. 谣言是一种没有任何事实依据且被任意捏造的虚假信息, 会造成不良的社会影响. 因此, 对谣言传播机制的研究意义重大. 二十世纪, 谣言传播模型就被国内外学者广泛研究. Daley 和 Kendall<sup>[1]</sup> 于 1965 年提出了经典的 DK 谣言传播模型, 为研究谣言传播奠定了基础. 随后, Maki 和 Thompson 在 1973 年改进 DK 谣言模型, 并提出了 MT 谣言传播模型<sup>[2]</sup>. 随着研究的深入,

\* 收稿日期: 2022-10-13

基金项目: 国家自然科学基金“多智能体系统的有限/固定与指定时间分布式优化一致性”(62163035); 中央引导地方科技发展专项“非线性系统的限时稳定性及其应用”(ZY2022A05).

作者简介: 任静静(1998-), 女, 硕士生, 从事微分方程及其应用的研究, E-mail: renjingjingrjj@163.com.

<sup>†</sup> 通讯作者: 梅雪晖(1973-), 女, 博士, 副教授, 从事运筹学与最优化、应用统计的研究, E-mail: meixuehui163@163.com.

学者们开始考虑复杂网络的拓扑性质. 例如, Zanette<sup>[3-4]</sup>建立了小世界网络的谣言传播模型, 并指出网络的拓扑结构会极大地影响谣言传播. Moreno 等<sup>[5]</sup>建立了基于无标度网络的谣言传播模型, 并推导出谣言的传播速率受网络拓扑结构的影响. 随后, 越来越多的学者开始研究网络拓扑中的谣言传播模型, 并取得了优异的成果<sup>[6-7]</sup>. 然而, 大多数研究是基于单一语言环境下的谣言传播机制<sup>[8-10]</sup>, 多语言环境很少被考虑.

通常情况下, 多语言会增加谣言传播的复杂性. 研究表明, 在多语言环境中可以更准确地模拟真实世界的情况. 例如, Li 等<sup>[11]</sup>建立并分析了复杂网络中的 2I2SR 谣言传播模型, 并通过平均场方程研究了模型的动力学. Wang 等<sup>[12]</sup>根据不同的语言将所有个体分成不同的组, 并建立新的具有双线性发生率的交叉传播机制模型来分析和研究谣言的传播过程. 值得注意的是, 发生率在谣言传播中起着重要作用, 它主要包括双线性发生率和非线性发生率. 双线性发生率的特点是传播者数量是线性增加的, 然而, 谣言传播与个人心理素质密切相关, 每个人心理素质不同, 传播谣言的概率就会不同. 使用双线性发生率则会有一定的局限性, 而非线性发生率是将个体差异考虑在内, 从而能更好地研究谣言的传播.

除了考虑到时滞对谣言传播和控制的影响, 许多学者还考虑多种机制来控制谣言传播. 例如, 犹豫机制<sup>[13]</sup>、怀疑机制<sup>[14]</sup>等等. 然而, 惩罚机制很少被提出, 因此本文提出了一种惩罚机制来控制谣言的传播. 同时, 我们还需要控制惩罚措施的成本, 在控制谣言的基础上将成本降到最低, 所以提出了最优化控制策略.

基于以上分析, 本文提出了一种多语言环境下具有惩罚机制和时滞的谣言传播模型, 并利用优化理论对惩罚机制进行控制. 本文的主要工作如下:

- (i) 建立了具有非线性发生率的谣言传播模型, 考虑到谣言传播与人们心理素质密切相关, 不同的人相信谣言的概率不同, 使用非线性发生率更有利于谣言传播的研究;
- (ii) 从理论上分析了时滞对谣言传播的影响, 并在数值模拟中得以验证;
- (iii) 引入了惩罚机制, 对传播者实施相应的惩罚措施, 可以更好地抑制谣言的传播;
- (iv) 为了降低传播者的密度和成本, 提出了带有时滞的最优化控制.

## 1 模型建立

随着在线社交网络平台的发展, 用户可以在平台上发布和转发一些信息, 其中包括世界各地的语言. 假设在线社交网络的总人数用  $N(t)$  来表示, 我们将总人口分为五类: 无知者  $I_H(t)$  代表不知道谣言但易感染且受教育程度高的用户, 无知者  $I_L(t)$  代表不知道谣言但易感染且受教育程度低的用户, 传播者  $S_1(t)$  代表知道并可以通过母语和外语传播谣言的用户, 传播者  $S_2(t)$  代表知道但只能通过母语传播的用户,  $R(t)$  代表知道谣言但对谣言失去兴趣不再传播谣言的用户. 同时我们有以下关系  $I_H(t) + I_L(t) + S_1(t) + S_2(t) + R(t) = N(t)$ .

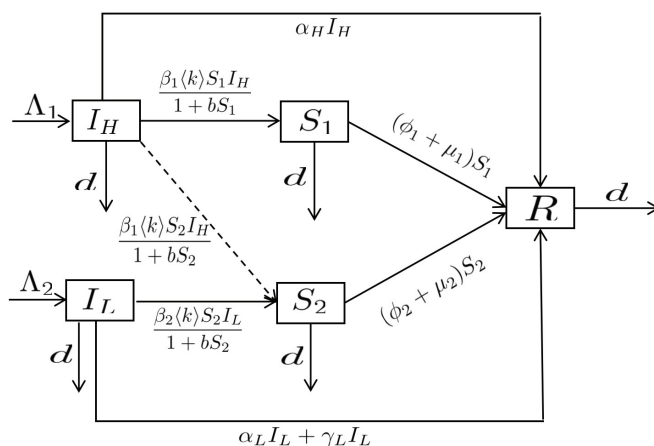


图 1 2I2SR 谣言传播仓室图

如图 1 所示,  $I_H(t)$  是通晓母语和其它国外语言的高教育者, 可以与  $S_1(t)$  或  $S_2(t)$  接触, 成为传播者. 而  $I_L(t)$  是只懂母语的low教育者, 只有与  $S_2(t)$  接触才能成为传播者. 又因为教育不能在短时间内得到改善, 所以我们需要对低教育者进行短期在线视频教育  $\gamma_L$ , 帮助他们了解真相识别谣言. 同时, 无知者  $I_H(t)$  和  $I_L(t)$  本身具有一定的分析识别谣言的能力, 可以自行恢复成免疫者  $R(t)$ .

设  $I_H(t)$ ,  $I_L(t)$ ,  $S_1(t)$ ,  $S_2(t)$  和  $R(t)$  分别表示在  $t$  时刻五类状态的密度, 则由图 1 可知, 其模型表示如下:

$$\begin{cases} \frac{dI_H(t)}{dt} = \Lambda_1 - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H(t) S_1(t)}{1 + b_1 S_1(t)} - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H(t) S_2(t)}{1 + b_2 S_2(t)} - \alpha_H I_H(t) - d I_H(t) \\ \frac{dI_L(t)}{dt} = \Lambda_2 - \frac{\beta_2 \langle k \rangle S_2(t) I_L(t)}{1 + b_2 S_2(t)} - (\alpha_L + \gamma_L) I_L(t) - d I_L(t) \\ \frac{dS_1(t)}{dt} = \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H(t) S_1(t)}{1 + b_1 S_1(t)} - (\phi_1 + \mu_1) S_1(t) - d S_1(t) \\ \frac{dS_2(t)}{dt} = \frac{\langle k \rangle S_2(t)}{1 + b_2 S_2(t)} (\beta_1 I_H(t) + \beta_2 I_L(t)) - (\phi_2 + \mu_2) S_2(t) - d S_2(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = (\phi_1 + \mu_1) S_1(t) + (\phi_2 + \mu_2) S_2(t) + \alpha_H I_H(t) + (\alpha_L + \gamma_L) I_L(t) - d R(t) \end{cases} \quad (1)$$

模型 (1) 中参数含义如表 1 所示. 结合实际情况, 所有参数均存在且为正, 其初始条件为:

$$I_H(0) > 0, I_L(0) > 0, S_1(0) > 0, S_2(0) > 0, R(0) > 0 \quad (2)$$

表 1 2I2SR 谣言传播模型参数含义

参数	意义
$\Lambda_1$	$I_H(t)$ 的移入率
$\Lambda_2$	$I_L(t)$ 的移入率
$d$	移出率
$\langle k \rangle$	同质网络的平均度
$\mu_i$	对 $S_i(t)$ ( $i=1,2$ ) 的惩罚机制
$\alpha_H$	$I_H(t)$ 转变为 $R(t)$ 的移出率
$\alpha_L$	$I_L(t)$ 转变为 $R(t)$ 的移出率
$\phi_1$	$S_1(t)$ 转变为 $R(t)$ 的移出率
$\phi_2$	$S_2(t)$ 转变为 $R(t)$ 的移出率
$\beta_1$	$I_H(t)$ 转变为 $S_1(t)$ 或者 $S_2(t)$ 的移出率
$\beta_2$	$I_L(t)$ 转变为 $S_2(t)$ 的移出率
$\gamma_L$	短期在线视频教育
$b_i$	饱和常数

注 1 从图 1 可以看出, 与 Yu 等<sup>[15]</sup>中的模型不同, 我们根据受教育程度对谣言无知者进行分类, 分为高教育者  $I_H(t)$  和低教育者  $I_L(t)$ . 同时, 无知者自身有一定的能力识别谣言恢复成  $R(t)$ . 但是  $I_L(t)$  的自愈能力较低, 需要对其采取短期在线视频教育.

注 2 由于受教育程度不同, 他们识别谣言的能力会有所不同. 受教育程度高的人比受教育程度低的人更容易辨别谣言. 即  $I_L(t)$  的自恢复能力低于  $I_H(t)$ , 因此移出率  $\alpha_H > \alpha_L$ .

由模型 (1) 可知

$$\frac{dN(t)}{dt} = \Lambda_1 + \Lambda_2 - dN(t).$$

于是,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{d}.$$

模型 (1) 的所有解是非负的, 可行域定义为:

$$\Omega = \{(I_H, I_L, S_1, S_2, R) \in \mathcal{R}_+^5 | I_H(t) + I_L(t) + S_1(t) + S_2(t) + R(t) \leq \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{d}\}.$$

对于模型 (1) 解的非负性, 可以得出以下结论.

引理 1 对任意  $t \geq 0$ , 模型 (1) 满足初始条件 (2) 的解  $(I_H(t), I_L(t), S_1(t), S_2(t), R(t))$  为正.

证明 根据模型 (1) 第一个方程

$$\frac{dI_H(t)}{dt} = \Lambda_1 - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H(t) S_1(t)}{1 + b_1 S_1(t)} - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H(t) S_2(t)}{1 + b_2 S_2(t)} - \alpha_H I_H(t) - d I_H(t) \tag{3}$$

进一步可得

$$\begin{aligned} & \frac{dI_H(t)}{dt} \exp \left\{ \int_0^t \left( \frac{\beta_1 \langle k \rangle S_1(\nu)}{1 + b_1 S_1(\nu)} + \frac{\beta_1 \langle k \rangle S_2(\nu)}{1 + b_2 S_2(\nu)} + \alpha_H + d \right) d\nu \right\} \\ & + I_H(t) \left( \frac{\beta_1 \langle k \rangle S_1(\nu)}{1 + b_1 S_1(\nu)} + \frac{\beta_1 \langle k \rangle S_2(\nu)}{1 + b_2 S_2(\nu)} + \alpha_H + d \right) * \\ & \exp \left\{ \int_0^t \left( \frac{\beta_1 \langle k \rangle S_1(\nu)}{1 + b_1 S_1(\nu)} + \frac{\beta_1 \langle k \rangle S_2(\nu)}{1 + b_2 S_2(\nu)} + \alpha_H + d \right) d\nu \right\} \\ & = \Lambda_1 \times \exp \left\{ \int_0^t \left( \frac{\beta_1 \langle k \rangle S_1(\nu)}{1 + b_1 S_1(\nu)} + \frac{\beta_1 \langle k \rangle S_2(\nu)}{1 + b_2 S_2(\nu)} + \alpha_H + d \right) d\nu \right\}. \end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned} I_H(t) &= I_H(0) \exp \left\{ - \int_0^t \left( \frac{\beta_1 \langle k \rangle S_1(\nu)}{1 + b_1 S_1(\nu)} + \frac{\beta_1 \langle k \rangle S_2(\nu)}{1 + b_2 S_2(\nu)} + \alpha_H + d \right) d\nu \right\} \\ &+ \exp \left\{ - \int_0^t \left( \frac{\beta_1 \langle k \rangle S_1(\nu)}{1 + b_1 S_1(\nu)} + \frac{\beta_1 \langle k \rangle S_2(\nu)}{1 + b_2 S_2(\nu)} + \alpha_H + d \right) d\nu \right\} \\ &\times \left( \int_0^t \Lambda_1 \times \exp \left\{ \int_0^t \left( \frac{\beta_1 \langle k \rangle S_1(\lambda)}{1 + b_1 S_1(\lambda)} + \frac{\beta_1 \langle k \rangle S_2(\lambda)}{1 + b_2 S_2(\lambda)} + \alpha_H + d \right) d\lambda \right\} d\nu \right) > 0. \end{aligned}$$

类似的, 可以证明  $I_L(0) > 0, S_1(0) > 0, S_2(0) > 0$ , 并且  $R(0) > 0$ . 因此, 对任意的  $t \geq 0$ , 模型 (1) 具有初始条件 (2) 的解  $(I_H(t), I_L(t), S_1(t), S_2(t), R(t))$  都是正的.

## 2 2I2SR 模型的动力学分析

接下来, 我们利用下一代矩阵计算模型 (1) 的平衡点和基本再生数, 并且利用 Routh-Hurwitz 判据和 LaSalle 不变原理讨论平衡点的稳定性.

### 2.1 模型的平衡点和基本再生数

将  $S_1(t) = S_2(t) = 0$  带入模型 (1) 中, 可以得到无谣言平衡点  $E_0 = (\Lambda_1 / (d + \alpha_H), \Lambda_2 / (d + \alpha_L + \gamma_L), 0, 0)$ , 接着用下一代矩阵法计算基本再生数  $\mathcal{R}_0$ . 设  $\chi = (S_1(t), S_2(t), I_H(t), I_L(t))^T$ , 则模型 (1) 可简化为

$$\frac{d\chi}{dt} = \mathcal{F}(\chi) - \mathcal{V}(\chi) \tag{4}$$

则

$$F = D\mathcal{F}(E_0) = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1 \langle k \rangle \Lambda_1}{d + \alpha_H} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle k \rangle \left( \frac{\Lambda_1 \beta_1}{d + \alpha_H} + \frac{\Lambda_2 \beta_2}{d + \alpha_L + \gamma_L} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$V = D\mathcal{V}(E_0) = \begin{pmatrix} (\phi_1 + \mu_1) + d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\phi_2 + \mu_2) + d & 0 & 0 \\ \frac{\beta_1 \langle k \rangle \Lambda_1}{d + \alpha_H} & \frac{\beta_1 \langle k \rangle \Lambda_1}{d + \alpha_H} & d + \alpha_H & 0 \\ 0 & \frac{\beta_2 \langle k \rangle \Lambda_2}{d + \alpha_L + \gamma_L} & 0 & d + \alpha_L + \gamma_L \end{pmatrix} \tag{6}$$

定义基本再生数  $\mathcal{R}_0$  为矩阵  $FV^{-1}$  的谱半径, 其中基本再生数  $\mathcal{R}_0 = \max\{\mathcal{R}_{01}, \mathcal{R}_{02}\}$ , 并且  $\mathcal{R}_{01} = (\beta_1 \langle k \rangle \Lambda_1) / (d + \alpha_H)(\phi_1 + \mu_1 + d)$ ,  $\mathcal{R}_{02} = \langle k \rangle / (\phi_2 + \mu_2 + d)[(\Lambda_1 \beta_1) / (d + \alpha_H) + \Lambda_2 \beta_2 / (d + \alpha_L + \gamma_L)]$ .

2.2 稳定性分析

为了进一步研究多语言环境下谣言传播的过程, 将对模型 (1) 的平衡点进行分类讨论. 定理 1 和定理 2 分别对无谣言平衡点  $E_0$  的局部和全局稳定性进行了详细讨论, 定理 3 和定理 4 分别讨论了谣言盛行平衡点  $E^*$  的稳定性.

接下来, 我们首先给出一个定理来解决模型 (1) 的无谣言平衡的局部稳定性.

定理 1 若  $\mathcal{R}_0 < 1$ , 则模型 (1) 的无谣言平衡点  $E_0$  是局部渐近稳定的. 若  $\mathcal{R}_0 > 1$ , 则无谣言平衡点  $E_0$  是不稳定的.

证明

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1 \langle k \rangle \Lambda_1}{F} - \phi_1 - \mu_1 - d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle k \rangle \left( \frac{\Lambda_1 \beta_1}{F} + \frac{\Lambda_2 \beta_2}{G} \right) - \phi_2 - \mu_2 - d & 0 & 0 \\ -\frac{\beta_1 \langle k \rangle \Lambda_1}{F} & -\frac{\beta_1 \langle k \rangle \Lambda_1}{F} & -F & 0 \\ 0 & \frac{\beta_2 \langle k \rangle \Lambda_2}{G} & 0 & -G \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$G = d + \alpha_L + \gamma_L, F = d + \alpha_H.$$

$$\lambda_1 = -G, \lambda_2 = -F, \lambda_3 = (\phi_1 + \mu_1 + d)(\mathcal{R}_{02} - 1), \lambda_4 = (\phi_2 + \mu_2 + d)(\mathcal{R}_{01} - 1).$$

因此, 当  $\mathcal{R}_0 < 1$  时, 无谣言平衡点  $E_0$  是局部渐近稳定的. 当  $\mathcal{R}_0 > 1$  时,  $E_0$  则是不稳定的.

定理 1 证明了无谣言平衡点  $E_0$  是局部渐近稳定的, 但只研究局部稳定性是不够全面的. 因此, 我们还需要研究无谣言平衡点  $E_0$  是全局渐近稳定的.

定理 2 若  $\mathcal{R}_0 < 1$ , 则模型 (1) 的无谣言平衡点  $E_0$  是全局渐近稳定的. 若  $\mathcal{R}_0 > 1$ , 则无谣言平衡点  $E_0$  是不稳定的.

证明 构造 Lyapunov 函数:

$$V(t) = S_1(t) + S_2(t),$$

对  $V(t)$  求导, 可以得到

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H(t) S_1(t)}{1 + b_1 S_1(t)} - (\phi_1 + \mu_1) S_1(t) - d S_1(t) + \frac{\langle k \rangle S_2(t)}{1 + b_2 S_2(t)} (\beta_1 I_H(t) + \beta_2 I_L(t)) - (\phi_2 + \mu_2) S_2(t) - d S_2(t) \\ &\leq (\phi_1 + \mu_1 + d)(\mathcal{R}_{01} - 1) S_1(t) + (\phi_2 + \mu_2 + d)(\mathcal{R}_{02} - 1) S_2(t). \end{aligned}$$

显然, 如果  $\mathcal{R}_0 < 1$ , 我们有  $dV(t)/dt < 0$  并且  $dV(t)/dt = 0$  当且仅当  $S_1(t) = S_2(t) = 0$ . 根据 LaSalle 不变原理. 当  $\mathcal{R}_0 < 1$  时, 无谣言平衡点  $E_0$  是全局渐近稳定.

模型 (1) 的无谣言平衡点  $E_0$  在  $\mathcal{R}_0 < 1$  时局部渐近稳定. 在  $\mathcal{R}_0 > 1$  时, 则不稳定.

我们讨论了无谣言平衡点的稳定性, 为了全面地了解谣言传播过程, 并有利于采取一定措施来控制谣言的传播. 接下来我们将分类讨论谣言盛行平衡点的局部渐近稳定性.

定理 3 若  $\mathcal{R}_{01} > 1$  且  $\mathcal{R}_{02} < 1$ , 则模型 (1) 中的谣言盛行平衡点  $E_1^*$  是局部渐近稳定的. 否则谣言盛行平衡点  $E_1^*$  是不稳定的.

证明

$$J(E_1^*) = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^*}{(1 + b_1 S_1^*)^2} - \phi_1 - \mu_1 - d & \frac{\beta_1 \langle k \rangle S_1^*}{1 + b_1 S_1^*} & 0 \\ -\frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^*}{(1 + b_2 S_2^*)^2} & -\frac{\beta_1 \langle k \rangle S_1^*}{1 + b_1 S_1^*} - \phi_1 - \mu_1 - d & 0 \\ 0 & 0 & -\phi_2 - \mu_2 - d \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$(\lambda + \phi_2 + \mu_2 + d)(\lambda + \phi_1 + \mu_1 + d) \times \left[ \lambda + \phi_1 + \mu_1 + d + \frac{\phi_1 + \mu_1 + d}{I_H^*} \left( \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^* - (\phi_1 + \mu_1 + d)}{b_1(\phi_1 + \mu_1 + d)} - \frac{\phi_1 + \mu_1 + d}{\beta_1 \langle k \rangle} \right) \right] = 0.$$

$J(E_1^*)$  的特征值可以给出:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\phi_2 - \mu_2 - d < 0, \quad \lambda_2 = -\phi_1 - \mu_1 - d < 0, \\ \lambda_3 &= -\phi_1 - \mu_1 - d - \frac{\phi_1 + \mu_1 + d}{I_H^*} \left( \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^* - (\phi_1 + \mu_1 + d)}{b_1(\phi_1 + \mu_1 + d)} - \frac{\phi_1 + \mu_1 + d}{\beta_1 \langle k \rangle} \right) < 0. \end{aligned}$$

定理 3 讨论了  $\mathcal{R}_{01} > 1$  且  $\mathcal{R}_{02} < 1$  时谣言盛行平衡点的局部渐近稳定情况, 当  $\mathcal{R}_{01} > 1, \mathcal{R}_{02} > 1$  时我们有如下定理.

**定理 4** 若  $\mathcal{R}_{01} > 1, \mathcal{R}_{02} > 1$ , 则模型 (1) 的谣言盛行平衡点  $E_2^* = (I_H^*, I_L^*, S_1^*, S_2^*)$  是局部渐近稳定的. 否则谣言盛行平衡点  $E_2^* = (I_H^*, I_L^*, S_1^*, S_2^*)$  是不稳定的.

$$p_4 \lambda^4 + p_3 \lambda^3 + p_2 \lambda^2 + p_1 \lambda + p_0 = 0,$$

不难证明  $p_i \geq 0$  ( $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ) 且  $p_1 p_2 p_3 > p_1^2 p_4 + p_3^2 > 0$ . 根据 Routh-Hurwitz 判据, 我们可以知道谣言盛行平衡点  $E_2^*$  是局部渐近稳定的.

### 3 具有时滞的谣言传播模型的动态分析

随着社会的进步, 互联网已经和人们的生活紧密相连, 无论是真实还是虚假的信息, 我们都可以从网络 (Facebook、Twitter、微博等) 获取. 由于每个人在接触谣言时对信息的敏感度不同, 他们会考虑是否接收和传播谣言. 这个过程需要足够的时间来识别和判断, 就会产生时滞. 因此我们需要进一步研究具有时滞的谣言传播, 模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dI_H(t)}{dt} = \Lambda_1 - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H(t) S_1(t)}{1 + b_1 S_1(t)} - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H(t) S_2(t)}{1 + b_2 S_2(t)} - \alpha_H I_H(t) - d I_H(t) \\ \frac{dI_L(t)}{dt} = \Lambda_2 - \frac{\beta_2 \langle k \rangle S_2(t) I_L(t)}{1 + b_2 S_2(t)} - (\alpha_L I_L(t) + \gamma_L I_L(t)) - d I_L(t) \\ \frac{dS_1(t)}{dt} = \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H(t) S_1(t - \tau)}{1 + b_1 S_1(t - \tau)} - (\phi_1 + \mu_1) S_1(t) - d S_1(t) \\ \frac{dS_2(t)}{dt} = \frac{\langle k \rangle S_2(t - \tau)}{1 + b_2 S_2(t - \tau)} (\beta_1 I_H(t) + \beta_2 I_L(t)) - (\phi_2 + \mu_2) S_2(t) - d S_2(t) \end{cases} \quad (9)$$

其中, 模型 (9) 的初始条件为:

$$\begin{aligned} I_H(t) = \varsigma_{I_H}(\theta) \geq 0, \quad I_L(t) = \varsigma_{I_L}(\theta) \geq 0, \quad S_1(t) = \varsigma_{S_1}(\theta) \geq 0, \\ S_2(t) = \varsigma_{S_2}(\theta) \geq 0, \quad R(t) = \varsigma_R(\theta) \geq 0, \quad \theta \in [-\tau, 0]. \end{aligned}$$

不失一般性, 我们给出了具有时滞的无谣言平衡点的局部渐近稳定性条件.

**定理 5** 对于模型 (9), 若  $\mathcal{R}_0 < 1$ , 则无谣言平衡点  $E_0$  是局部渐近稳定的. 若  $\mathcal{R}_0 > 1$ , 则无谣言平衡点  $E_0$  是不稳定的.

**证明** 根据模型 (9), 可以得出无谣言平衡点  $E_0$  处的雅可比矩阵, 并求出  $J(E_0)$  的特征方程为:

$$(\lambda + G_1)(\lambda + F_1) \left[ \lambda - \frac{\beta_1 \langle k \rangle \Lambda_1}{F_1} e^{-\lambda \tau} + \phi_1 + \mu_1 + d \right] \times \left[ \lambda - \langle k \rangle \left( \frac{\Lambda_1 \beta_1}{F_1} + \frac{\Lambda_2 \beta_2}{G_1} \right) e^{-\lambda \tau} + \phi_1 + \mu_1 + d \right] = 0 \quad (10)$$

且特征值为:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -(d + \alpha_L + \gamma_L), \quad \lambda_2 = -(d + \alpha_H), \quad \lambda_3 = (\phi_1 + \mu_1 + d) \left( \frac{\beta_1 \langle k \rangle \Lambda_1 e^{-\lambda \tau}}{F_1(\phi_1 + \mu_1 + d)} - 1 \right), \\ \lambda_4 &= (\phi_2 + \mu_2 + d) \left[ \frac{\langle k \rangle e^{-\lambda \tau}}{\phi_2 + \mu_2 + d} \left( \frac{\Lambda_1 \beta_1}{F_1} + \frac{\Lambda_2 \beta_2}{G_1} - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

当  $\mathcal{R}_0 < 1$  且  $\tau = 0$  时, 无谣言平衡点  $E_0$  是局部渐近稳定的.

当  $\tau > 0$  时, 我们用反证法. 假设模型有纯虚根  $\lambda_3 = i\omega_3$  和  $\lambda_4 = i\omega_4$ , 则有

$$\begin{cases} \omega_3 = -(\phi_1 + \mu_1 + d)\mathcal{R}_{01} \sin \omega_3 \tau \\ \phi_1 + \mu_1 + d = (\phi_1 + \mu_1 + d)\mathcal{R}_{01} \cos \omega_3 \tau \end{cases} \quad (11)$$

和

$$\begin{cases} \omega_4 = -(\phi_2 + \mu_2 + d)\mathcal{R}_{02} \sin \omega_4 \tau \\ \phi_2 + \mu_2 + d = (\phi_2 + \mu_2 + d)\mathcal{R}_{02} \cos \omega_4 \tau \end{cases} \quad (12)$$

将等式 (11) 和 (12) 两边的平方相加得到如下结果:

$$\omega_3^2 = (\phi_1 + \mu_1 + d)^2(\mathcal{R}_{01}^2 - 1), \quad \omega_4^2 = (\phi_2 + \mu_2 + d)^2(\mathcal{R}_{02}^2 - 1) \quad (13)$$

若  $\mathcal{R}_0 < 1$ , 则没有正实根的  $\omega_3$  和  $\omega_4$  满足模型 (13). 因此, 模型 (10) 没有纯虚根  $\lambda_3 = i\omega_3$  和  $\lambda_4 = i\omega_4$ . 由  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ ,  $\lambda_3 < 0$  和  $\lambda_4 < 0$ , 可以得到当  $\mathcal{R}_0 < 1$  时, 无谣言平衡点  $E_0$  是局部渐近稳定的.

当  $\mathcal{R}_0 > 1$  时, 我们可以得到:

$$\begin{aligned} F_1(\lambda) &= \lambda - (\phi_1 + \mu_1 + d)(\mathcal{R}_{01}e^{-\lambda\tau} - 1) \\ F_2(\lambda) &= \lambda - (\phi_2 + \mu_2 + d)(\mathcal{R}_{02}e^{-\lambda\tau} - 1) \end{aligned} \quad (14)$$

则有  $F_1(0) = -(\phi_1 + \mu_1 + d)(\mathcal{R}_{01} - 1)$  和  $F_2(0) = -(\phi_2 + \mu_2 + d)(\mathcal{R}_{02} - 1)$ , 由于:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1(\lambda)}{\partial \lambda} &= 1 + \tau(\phi_1 + \mu_1 + d)\mathcal{R}_{01}e^{-\lambda\tau} \\ \frac{\partial F_2(\lambda)}{\partial \lambda} &= 1 + \tau(\phi_2 + \mu_2 + d)\mathcal{R}_{02}e^{-\lambda\tau} \end{aligned} \quad (15)$$

可以很容易地得到  $\lim_{t \rightarrow \infty} F_1(\lambda) = \infty$  和  $\lim_{t \rightarrow \infty} F_2(\lambda) = \infty$ . 所以  $F_1(\lambda) = 0$  和  $F_2(\lambda) = 0$  至少有一个正实根, 并且当  $\mathcal{R}_0 > 1$  时, 无谣言平衡点  $E_0$  是不稳定的.

上面讨论了关于谣言盛行平衡点的局部渐近稳定性. 接下来给出谣言盛行平衡点的全局渐近稳定性条件.

**定理 6** 若  $\mathcal{R}_0 > 1$ , 则模型 (9) 中的谣言盛行平衡点  $E_1^* = (I_H^*, I_L^*, S_1^*, S_2^*)$  是全局渐近稳定的. 否则谣言盛行平衡点  $E_1^* = (I_H^*, I_L^*, S_1^*, S_2^*)$  是不稳定的.

**证明** 构造 Lyapunov 泛函:

$$V_2(t) = V_{21} + V_{22}(t) \quad (16)$$

其中:

$$V_{21}(t) = (I_H(t) - I_H^* - I_H^* \ln \frac{I_H(t)}{I_H^*}) + (I_L(t) - I_L^* - I_L^* \ln \frac{I_L(t)}{I_L^*}) + (S_1(t) - S_1^* - S_1^* \ln \frac{S_1(t)}{S_1^*}) + (S_2(t) - S_2^* - S_2^* \ln \frac{S_2(t)}{S_2^*}).$$

$$\begin{aligned} V_{22}(t) &= \int_{t-\tau}^t \left[ \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H(t) S_1(\Theta)}{1 + b_1 S_1(\Theta)} - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^* S_1^*}{1 + b_1 S_1^*} + \frac{\beta_2 \langle k \rangle I_L(t) S_2(\Theta)}{1 + b_2 S_2(\Theta)} \right. \\ &\quad - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^* S_1^*}{1 + b_1 S_1^*} \ln \frac{(1 + b_1 S_1^*) I_H(t) S_1(\Theta)}{I_H^* S_1^* (1 + b_1 S_1(\Theta))} - \frac{\beta_2 \langle k \rangle I_L^* S_2^*}{1 + b_2 S_2^*} \\ &\quad - \frac{\beta_2 \langle k \rangle I_L^* S_2^*}{1 + b_2 S_2^*} \ln \frac{(1 + b_2 S_2^*) I_L(t) S_2(\Theta)}{I_L^* S_2^* (1 + b_2 S_2(\Theta))} + \frac{\beta_2 \langle k \rangle I_H(t) S_2(\Theta)}{1 + b_2 S_2(\Theta)} \\ &\quad \left. - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^* S_2^*}{1 + b_2 S_2^*} - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^* S_2^*}{1 + b_2 S_2^*} \ln \frac{(1 + b_2 S_2^*) I_H(t) S_2(\Theta)}{I_H^* S_2^* (1 + b_2 S_2(\Theta))} \right] d\Theta. \end{aligned}$$

计算  $V_2(t)$  的导数, 可以得到:

$$\begin{aligned}
\frac{dV_2(t)}{dt} &= \left[ \left(1 - \frac{I_H^*}{I_H(t)}\right) \frac{\partial I_H(t)}{\partial t} + \left(1 - \frac{I_L^*}{I_L(t)}\right) \frac{\partial I_L(t)}{\partial t} + \left(1 - \frac{S_1^*}{S_1(t)}\right) \frac{\partial S_1(t)}{\partial t} \right. \\
&\quad + \left(1 - \frac{S_1^*}{S_1(t)}\right) \frac{\partial S_1(t)}{\partial t} + \left(1 - \frac{S_2^*}{S_2(t)}\right) \frac{\partial S_2(t)}{\partial t} + \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H(t) S_1(t)}{1 + b_1 S_1(t)} \\
&\quad - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H(t) S_1(t - \tau)}{1 + b_1 S_1(t - \tau)} - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^* S_1^*}{1 + b_1 S_1^*} \ln \frac{S_1(t)(1 + b_1 S_1(t - \tau))}{S_1(t - \tau)(1 + b_1 S_1(t))} \\
&\quad + \frac{\beta_2 \langle k \rangle I_L(t) S_2(t)}{1 + b_2 S_2(t)} + \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H(t) S_2(t)}{1 + b_2 S_2(t)} + \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H(t) S_2(t)}{1 + b_2 S_2(t)} \\
&\quad - \frac{\beta_2 \langle k \rangle I_L(t) S_2(t - \tau)}{1 + b_2 S_2(t - \tau)} - \frac{\beta_2 \langle k \rangle I_L^* S_2^*}{1 + b_2 S_2^*} \ln \frac{S_2(t)(1 + b_2 S_2(t - \tau))}{S_2(t - \tau)(1 + b_2 S_2(t))} \\
&\quad \left. - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H(t) S_2(t - \tau)}{1 + b_2 S_2(t - \tau)} - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^* S_2^*}{1 + b_2 S_2^*} \ln \frac{S_2(t)(1 + b_2 S_2(t - \tau))}{S_2(t - \tau)(1 + b_2 S_2(t))} \right], \\
&= \left(1 - \frac{I_H^*}{I_H(t)}\right) \Lambda_1 + \left(1 - \frac{I_L^*}{I_L(t)}\right) \Lambda_2 + [-(\alpha_H + d) \frac{(I_H(t) - I_H^*)^2}{I_H(t)} \\
&\quad - (\gamma_L + \alpha_L + d) \frac{(I_L(t) - I_L^*)^2}{I_L(t)} - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^* S_1^*}{1 + b_1 S_1^*} \left(\frac{I_H^*}{I_H(t)} - 1 - \ln \frac{I_H^*}{I_H(t)}\right) \\
&\quad - \frac{I_L^* S_2^*}{1 + b_2 S_2^*} \left(\frac{I_L^*}{I_L(t)} - 1 - \ln \frac{I_L^*}{I_L(t)}\right) - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^* S_2^*}{1 + b_2 S_2^*} \left(\frac{I_H^*}{I_H(t)} - 1 - \ln \frac{I_H^*}{I_H(t)}\right) \\
&\quad - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^* S_1^*}{1 + b_1 S_1^*} \left(\frac{(1 + b_1 S_1^*) I_H(t) S_1(t - \tau)}{I_H^* S_1(t)(1 + b_1 S_1(t - \tau))} - 1 - \ln \frac{(1 + b_1 S_1^*) I_H(t) S_1(t - \tau)}{I_H^* S_1(t)(1 + b_1 S_1(t - \tau))}\right) \\
&\quad - \frac{\beta_2 \langle k \rangle I_L^* S_2^*}{1 + b_2 S_2^*} \left(\frac{S_2(t - \tau) I_L(t)(1 + b_2 S_2^*)}{S_2(t) I_L^*(1 + b_2 S_2(t - \tau))} - 1 - \ln \frac{s_2(t - \tau) I_L(t)(1 + b_2 S_2^*)}{S_2(t) I_L^*(1 + b_2 S_2(t - \tau))}\right) \\
&\quad - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^* S_2^*}{1 + b_2 S_2^*} \left(\frac{(1 + b_2 S_2^*) I_H(t) S_2(t - \tau)}{I_H^* S_2(t)(1 + b_2 S_2(t - \tau))} - 1 - \ln \frac{(1 + b_2 S_2^*) I_H(t) S_2(t - \tau)}{I_H^* S_2(t)(1 + b_2 S_2(t - \tau))}\right) \\
&\quad - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^* S_1^*}{1 + b_1 S_1^*} \left(\frac{1 + b_1 S_1(t)}{1 + b_1 S_1^*} - 1 - \ln \frac{1 + b_1 S_1(t)}{1 + b_1 S_1^*}\right) + \frac{(1 + b_1 S_1(t)) \beta_1 \langle k \rangle I_H^* S_1^*}{(1 + b_1 S_1^*)^2} \\
&\quad - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^* S_2^*}{1 + b_2 S_2^*} \left(\frac{1 + b_2 S_2(t)}{1 + b_2 S_2^*} - 1 - \ln \frac{1 + b_2 S_2(t)}{1 + b_2 S_2^*}\right) + \frac{(1 + b_2 S_2(t)) \beta_1 \langle k \rangle I_H^* S_2^*}{(1 + b_2 S_2^*)^2} \\
&\quad - \frac{\beta_2 \langle k \rangle I_L^* S_2^*}{1 + b_2 S_2^*} \left(\frac{1 + b_2 S_2(t)}{1 + b_2 S_2^*} - 1 - \ln \frac{1 + b_2 S_2(t)}{1 + b_2 S_2^*}\right) + \frac{(1 + b_2 S_2(t)) \beta_2 \langle k \rangle I_L^* S_2^*}{(1 + b_2 S_2^*)^2} \\
&\quad + \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^* S_1^*}{1 + b_1 S_1^*} \left(\frac{1 + b_1 S_1(t)}{1 + b_1 S_1^*} - 1\right) + \beta_1 \langle k \rangle I_H^* S_1(t) \left(\frac{1}{1 + b_1 S_1(t)} - \frac{1}{1 + b_1 S_1^*}\right) \\
&\quad + \frac{\beta_2 \langle k \rangle I_L^* S_2^*}{1 + b_2 S_2^*} \left(\frac{1 + b_2 S_2(t)}{1 + b_2 S_2^*} - 1\right) + \beta_2 \langle k \rangle I_L^* S_2(t) \left(\frac{1}{1 + b_2 S_2(t)} - \frac{1}{1 + b_2 S_2^*}\right) \\
&\quad + \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^* S_2^*}{1 + b_2 S_2^*} \left(\frac{1 + b_2 S_2(t)}{1 + b_2 S_2^*} - 1\right) + \beta_1 \langle k \rangle I_H^* S_2(t) \left(\frac{1}{1 + b_2 S_2(t)} - \frac{1}{1 + b_2 S_2^*}\right) \\
&= \left(1 - \frac{I_H^*}{I_H(t)}\right) \Lambda_1 + \left(1 - \frac{I_L^*}{I_L(t)}\right) \Lambda_2 + [-(\alpha_H + d) \frac{(I_H(t) - I_H^*)^2}{I_H(t)} \\
&\quad - (\gamma_L + \alpha_L + d) \frac{(I_L(t) - I_L^*)^2}{I_L(t)} - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^* S_1^*}{1 + b_1 S_1^*} \left(\frac{I_H^*}{I_H(t)} - 1 - \ln \frac{I_H^*}{I_H(t)}\right) \\
&\quad - \frac{I_L^* S_2^*}{1 + b_2 S_2^*} \left(\frac{I_L^*}{I_L(t)} - 1 - \ln \frac{I_L^*}{I_L(t)}\right) - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^* S_2^*}{1 + b_2 S_2^*} \left(\frac{I_H^*}{I_H(t)} - 1 - \ln \frac{I_H^*}{I_H(t)}\right) \\
&\quad - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^* S_1^*}{1 + b_1 S_1^*} \left(\frac{(1 + b_1 S_1^*) I_H(t) S_1(t - \tau)}{I_H^* S_1(t)(1 + b_1 S_1(t - \tau))} - 1 - \ln \frac{(1 + b_1 S_1^*) I_H(t) S_1(t - \tau)}{I_H^* S_1(t)(1 + b_1 S_1(t - \tau))}\right) \\
&\quad - \frac{\beta_2 \langle k \rangle I_L^* S_2^*}{1 + b_2 S_2^*} \left(\frac{S_2(t - \tau) I_L(t)(1 + b_2 S_2^*)}{S_2(t) I_L^*(1 + b_2 S_2(t - \tau))} - 1 - \ln \frac{s_2(t - \tau) I_L(t)(1 + b_2 S_2^*)}{S_2(t) I_L^*(1 + b_2 S_2(t - \tau))}\right) \\
&\quad - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^* S_2^*}{1 + b_2 S_2^*} \left(\frac{(1 + b_2 S_2^*) I_H(t) S_2(t - \tau)}{I_H^* S_2(t)(1 + b_2 S_2(t - \tau))} - 1 - \ln \frac{(1 + b_2 S_2^*) I_H(t) S_2(t - \tau)}{I_H^* S_2(t)(1 + b_2 S_2(t - \tau))}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^* S_1^*}{1+b_1 S_1^*} \left( \frac{1+b_1 S_1(t)}{1+b_1 S_1^*} - 1 - \ln \frac{1+b_1 S_1(t)}{1+b_1 S_1^*} \right) - \frac{b_1 \beta_2 \langle k \rangle I_L^* (S_1^* - S_1(t))^2}{(1+b_1 S_1^*)^2 (1+b_1 S_1(t))} \\
 & -\frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^* S_2^*}{1+b_2 S_2^*} \left( \frac{1+b_2 S_2(t)}{1+b_2 S_2^*} - 1 - \ln \frac{1+b_2 S_2(t)}{1+b_2 S_2^*} \right) - \frac{b_2 \beta_1 \langle k \rangle I_H^* (S_2^* - S_2(t))^2}{(1+b_2 S_2^*)^2 (1+b_2 S_2(t))} \\
 & -\frac{\beta_2 \langle k \rangle I_L^* S_2^*}{1+b_2 S_2^*} \left( \frac{1+b_2 S_2(t)}{1+b_2 S_2^*} - 1 - \ln \frac{1+b_2 S_2(t)}{1+b_2 S_2^*} \right) - \frac{b_1 \beta_1 \langle k \rangle I_H^* (S_1^* - S_1(t))^2}{(1+b_1 S_1^*)^2 (1+b_1 S_1(t))}.
 \end{aligned}$$

综上所述, 当  $(\beta_2 \langle k \rangle I_L^* S_2^*) / (1+b_2 S_2^*) > 0$ ,  $(\beta_2 \langle k \rangle I_H^* S_2^*) / (1+b_2 S_2^*) > 0$ ,  $(\beta_2 \langle k \rangle I_H^* S_1^*) / (1+b_2 S_1^*) > 0$  时, 当且仅当  $I_H(t) = I_H^*$ ,  $I_L(t) = I_L^*$ ,  $S_1(t) = S_1^*$ ,  $S_2(t) = S_2^*$ , 我们可以得到  $dV_2(t)/dt \leq 0$  和  $dV_2(t)/dt = 0$ . 因此, 当  $\mathcal{R}_0 > 1$  时, 模型 (9) 中谣言盛行的平衡点  $E_1^*$  是全局渐近稳定的.

### 4 最优化控制

众所周知, 当谣言继续传播时, 政府需要采取可行的措施来遏制谣言的传播. 这一部分中, 我们将介绍一种惩罚机制来控制谣言的传播. 该措施不仅可以有效减少谣言传播, 还可以最大限度地降低控制成本. 因此, 我们建立带有惩罚机制的最优化控制系统模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dI_H(t)}{dt} = \Lambda_1 - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H(t) S_1(t)}{1+b_1 S_1(t)} - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H(t) S_2(t)}{1+b_2 S_2(t)} - \alpha_H I_H(t) - dI_H(t) \\ \frac{dI_L(t)}{dt} = \Lambda_2 - \frac{\beta_2 \langle k \rangle S_2(t) I_L(t)}{1+b_2 S_2(t)} - (\alpha_L I_L(t) + \gamma_L I_L(t)) - dI_L(t) \\ \frac{dS_1(t)}{dt} = \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H(t) S_1(t-\tau)}{1+b_1 S_1(t-\tau)} - (\phi_1 + \mu_1(t)) S_1(t) - dS_1(t) \\ \frac{dS_2(t)}{dt} = \frac{\langle k \rangle S_2(t-\tau)}{1+b_2 S_2(t-\tau)} (\beta_1 I_H(t) + \beta_2 I_L(t)) - (\phi_2 + \mu_2(t)) S_2(t) - dS_2(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} = (\phi_1 + \mu_1(t)) S_1(t) + (\phi_2 + \mu_2(t)) S_2(t) + \alpha_H I_H(t) + \alpha_L I_L(t) + \gamma_L I_L(t) - dR(t) \end{cases} \tag{17}$$

目标函数定义如下:

$$J(\mu_1(t), \mu_2(t)) = \int_0^T [r_1 S_1(t) + r_2 S_2(t) + \nu_1 \mu_1(t)^2 + \nu_2 \mu_2(t)^2] dt \tag{18}$$

其中:  $\mu_1(t)$  和  $\mu_2(t)$  表示通过实施惩罚机制对谣言传播者的控制程度,  $r_i$  和  $\nu_i$  ( $i=1,2$ ) 表示惩罚传播者  $S_1(t)$  和  $S_2(t)$  的权重系数. 其中  $\mu_1(t)$  和  $\mu_2(t)$  的可行域为  $U = \{(\mu_1(t), \mu_2(t)) \mid 0 \leq \mu_1(t) \leq \mu_1^{\max}, 0 \leq \mu_2(t) \leq \mu_2^{\max}, t \in [0, T]\}$ ,  $\mu_1^{\max} \leq 1$  和  $\mu_2^{\max} \leq 1$  是  $\mu_1(t)$  和  $\mu_2(t)$  的上限.  $\mu_1^*$  和  $\mu_2^*$  是最优控制, 符合  $J(\mu_1^*, \mu_2^*) = \min\{J(\mu_1(t), \mu_2(t)) \mid (\mu_1(t), \mu_2(t)) \in U\}$ . 为了进一步描述最优控制问题, 构造 Lagrangian 函数:

$$L(S_1(t), S_2(t), \mu_1(t), \mu_2(t)) = r_1 S_1(t) + r_2 S_2(t) + \nu_1 \mu_1(t)^2 + \nu_2 \mu_2(t)^2.$$

Hamiltonian 函数为:

$$\begin{aligned}
 H(t) = & L(S_1(t), S_2(t), \mu_1(t), \mu_2(t)) + \lambda_1(t) \left[ \Lambda_1 - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H(t) S_1(t)}{1+b_1 S_1(t)} \right. \\
 & - \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H(t) S_2(t)}{1+b_2 S_2(t)} - \alpha_H I_H(t) - dI_H(t) \left. \right] + \lambda_2(t) \left[ \Lambda_2 - \frac{\beta_2 \langle k \rangle S_2(t) I_L(t)}{1+b_2 S_2(t)} \right. \\
 & - (\alpha_L I_L(t) + \gamma_L I_L(t)) - dI_L(t) \left. \right] + \lambda_3(t) \left[ \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H(t) S_1(t-\tau)}{1+b_1 S_1(t-\tau)} \right. \\
 & - (\phi_1 + \mu_1(t)) S_1(t) - dS_1(t) \left. \right] + \lambda_4(t) \left[ \frac{\langle k \rangle S_2(t-\tau)}{1+b_2 S_2(t-\tau)} (\beta_1 I_H(t) + \beta_2 I_L(t)) \right. \\
 & - (\phi_2 + \mu_2(t)) S_2(t) - dS_2(t) \left. \right] + \lambda_5(t) \left[ (\phi_1 + \mu_1(t)) S_1(t) + \alpha_H I_H(t) \right. \\
 & \left. + (\phi_2 + \mu_2(t)) S_2(t) + \alpha_L I_L(t) + \gamma_L I_L(t) - dR(t) \right]
 \end{aligned} \tag{19}$$

根据 Pontryagin 的极大原理, 得出以下结论.

**定理 7** 若  $(I_H^*, I_L^*, S_1^*, S_2^*, R^*)$  是最优控制  $\mu_1^*$  和  $\mu_2^*$  的最优状态解, 则最优控制问题 (19) 中的伴随变量  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  和  $\lambda_5$  满足如下条件:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dI_H(t)}{dt} &= \frac{\beta_1 \langle k \rangle S_1^*}{1 + b_1 S_1^*} (\lambda_1(t) - \lambda_3(t)) + \frac{\beta_1 \langle k \rangle S_2^*}{1 + b_2 S_2^*} (\lambda_1(t) - \lambda_4(t)) \\ &\quad + \alpha_H (\lambda_1(t) - \lambda_5(t)) + \lambda_1(t) d \\ \frac{dI_L(t)}{dt} &= \frac{\beta_2 \langle k \rangle S_2^*}{1 + b_2 S_2^*} (\lambda_2(t) - \lambda_4(t)) + (\alpha_L + \gamma_L) (\lambda_2(t) - \lambda_5(t)) + \lambda_2(t) d \\ \frac{dS_1(t)}{dt} &= \lambda_1(t) \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^*}{(1 + b_1 S_1^*)^2} - \chi_{[0, t-\tau]} \lambda_3(t + \tau) \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^*}{(1 + b_1 S_1^*)^2} \\ &\quad + (\phi_1 + \mu_1(t)) (\lambda_3(t) - \lambda_5(t)) - r_1 + \lambda_3(t) d \\ \frac{dS_2(t)}{dt} &= (\lambda_1(t) \beta_1 I_H^* + \lambda_2(t) \beta_2 I_L^*) \frac{\langle k \rangle}{(1 + b_2 S_2^*)^2} - r_2 + \lambda_4(t) d \\ &\quad + (\phi_2 + \mu_2(t)) (\lambda_4(t) - \lambda_5(t)) - \lambda_4(t + \tau) \chi_{[0, t-\tau]} \left[ \frac{\langle k \rangle}{(1 + b_2 S_2^*)^2} (\beta_1 I_H^* + \beta_2 I_L^*) \right] \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \lambda_5(t) d \end{aligned} \right. \quad (20)$$

且边界条件  $\lambda_i(T) = 0$ , ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ). 最优控制  $\mu_1^*$  和  $\mu_2^*$  为:

$$\mu_1^* = \min \left\{ \max \left\{ \frac{(\lambda_3 - \lambda_5) S_1^*}{2\nu_1}, 0 \right\}, \mu_1^{\max} \right\} \quad (21)$$

$$\mu_2^* = \min \left\{ \max \left\{ \frac{(\lambda_4 - \lambda_5) S_2^*}{2\nu_2}, 0 \right\}, \mu_2^{\max} \right\} \quad (22)$$

其中,

$$\chi_{[0, t-\tau_i]}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, t - \tau_i] \quad (i = 1, 2) \\ 1, & \text{其它} \end{cases}$$

证明 由 Pontryagin 极大原理, 设  $I_H(t) = I_H^*$ ,  $I_L(t) = I_L^*$ ,  $S_1(t) = S_1^*$ ,  $S_2(t) = S_2^*$  和  $R(t) = R^*$ , 则伴随方程满足:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\lambda_1(t)}{dt} &= \frac{\beta_1 \langle k \rangle S_1^*}{1 + b_1 S_1^*} (\lambda_1(t) - \lambda_3(t)) + \frac{\beta_1 \langle k \rangle S_2^*}{1 + b_2 S_2^*} (\lambda_1(t) - \lambda_4(t)) \\ &\quad + \alpha_H (\lambda_1(t) - \lambda_5(t)) + \lambda_1(t) d, \\ \frac{d\lambda_2(t)}{dt} &= \frac{\beta_2 \langle k \rangle S_2^*}{1 + b_2 S_2^*} (\lambda_2(t) - \lambda_4(t)) + (\alpha_L + \gamma_L) (\lambda_2(t) - \lambda_5(t)) + \lambda_2(t) d, \\ \frac{d\lambda_3(t)}{dt} &= \lambda_1(t) \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^*}{(1 + b_1 S_1^*)^2} - \chi_{[0, t-\tau]} \lambda_3(t + \tau) \frac{\beta_1 \langle k \rangle I_H^*}{(1 + b_1 S_1^*)^2} \\ &\quad + (\phi_1 + \mu_1(t)) (\lambda_3(t) - \lambda_5(t)) - r_1 + \lambda_3(t) d, \\ \frac{d\lambda_4(t)}{dt} &= (\lambda_1(t) \beta_1 I_H^* + \lambda_2(t) \beta_2 I_L^*) \frac{\langle k \rangle}{(1 + b_2 S_2^*)^2} - r_2 + \lambda_4(t) d \\ &\quad + (\phi_2 + \mu_2(t)) (\lambda_4(t) - \lambda_5(t)) - \lambda_4(t + \tau) \chi_{[0, t-\tau]} \left[ \frac{\langle k \rangle}{(1 + b_2 S_2^*)^2} (\beta_1 I_H^* + \beta_2 I_L^*) \right], \\ \frac{d\lambda_5(t)}{dt} &= \lambda_5(t) d. \end{aligned} \right.$$

对式 (19) 中的  $\mu_1(t)$  和  $\mu_2(t)$  求导, 且由最优性条件可知:

$$\frac{\partial H(t)}{\partial \mu_1(t)} \Big|_{\mu_1(t) = \mu_1^*} = \nu_1 \mu_1^* - \lambda_3(t) S_1^* + \lambda_5(t) S_1^* = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial \mu_2(t)} \Big|_{\mu_2(t) = \mu_2^*} = \nu_2 \mu_2^* - \lambda_4(t) S_2^* + \lambda_5(t) S_2^* = 0 \quad (24)$$

对式 (23) 和 (24) 求解得:

$$\mu_1^* = \frac{(\lambda_3 - \lambda_5)S_1^*}{2\nu_1}, \quad \mu_2^* = \frac{(\lambda_4 - \lambda_5)S_2^*}{2\nu_2}.$$

而基于控制集  $U = \{(\mu_1(t), \mu_2(t)) \mid 0 \leq \mu_1(t) \leq \mu_1^{\max}, 0 \leq \mu_2(t) \leq \mu_2^{\max}, t \in [0, T]\}$ , 即有:

$$\mu_1^* = \begin{cases} 0, & \frac{(\lambda_3 - \lambda_5)S_1^*}{2\nu_1} < 0 \\ \frac{(\lambda_3 - \lambda_5)S_1^*}{2\nu_1}, & 0 \leq \frac{(\lambda_3 - \lambda_5)S_1^*}{2\nu_1} \leq 1 \\ 1, & \frac{(\lambda_3 - \lambda_5)S_1^*}{2\nu_1} > 1 \end{cases} \quad (25)$$

$$\mu_2^* = \begin{cases} 0, & \frac{(\lambda_4 - \lambda_5)S_2^*}{2\nu_2} < 0 \\ \frac{(\lambda_4 - \lambda_5)S_2^*}{2\nu_2}, & 0 \leq \frac{(\lambda_4 - \lambda_5)S_2^*}{2\nu_2} \leq 1 \\ 1, & \frac{(\lambda_4 - \lambda_5)S_2^*}{2\nu_2} > 1 \end{cases} \quad (26)$$

则  $\mu_1^*$  和  $\mu_2^*$  为模型 (17) 的最优解区间可表示为:

$$\mu_1^* = \min\left\{\max\left\{\frac{(\lambda_3 - \lambda_5)S_1^*}{2\nu_1}, 0\right\}, \mu_1^{\max}\right\},$$

$$\mu_2^* = \min\left\{\max\left\{\frac{(\lambda_4 - \lambda_5)S_2^*}{2\nu_2}, 0\right\}, \mu_2^{\max}\right\}.$$

这意味着加入惩罚控制  $\mu_1(t)$  和  $\mu_2(t)$  有利于相关部门遏制谣言的传播, 并且通过计算我们也得到了最优控制的区间. 因此, 政府及有关部门既可以有效遏制谣言的传播, 同时也降低了谣言传播成本.

## 5 数值模拟

本节中, 我们将进行一些数值模拟, 以验证我们提出的理论结果的有效性.

**例 1** 选择  $\langle k \rangle = 4$ ,  $\Lambda_1 = 0.0171$ ,  $\Lambda_2 = 0.0221$ ,  $b_1 = 0.178$ ,  $b_2 = 0.398$ ,  $\gamma_L = 0.021$ ,  $\phi_1 + \mu_1 = 0.049$ ,  $\phi_2 + \mu_2 = 0.129$ ,  $\beta_1 = 0.04$ ,  $\beta_2 = 0.06$ ,  $\alpha_H = 0.0129$ ,  $\alpha_L = 0.006$ ,  $d = 0.0392$ , 通过计算,  $\mathcal{R}_1 = 0.5954 < 1$ ,  $\mathcal{R}_2 = 0.7886 < 1$ . 无谣言平衡点  $E_0$  是局部和全局渐近稳定的, 如图 2 (a) 和图 2 (b) 所示.

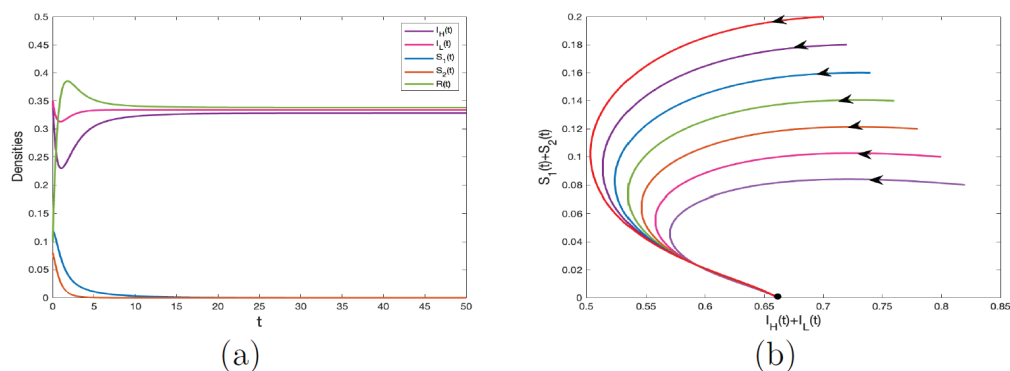


图 2 模型 (1) 无谣言平衡点的稳定性

**例 2** 选择  $\langle k \rangle = 4$ ,  $\Lambda_1 = 0.0201$ ,  $\Lambda_2 = 0.0201$ ,  $b_1 = 0.058$ ,  $b_2 = 0.048$ ,  $\gamma_L = 0.0595$ ,  $\phi_1 + \mu_1 = 0.0073$ ,  $\phi_2 + \mu_2 = 0.0496$ ,  $\beta_1 = 0.073$ ,  $\beta_2 = 0.078$ ,  $\alpha_H = 0.0289$ ,  $\alpha_L = 0.0149$ ,  $d = 0.0402$ , 通过计算,  $\mathcal{R}_1 = 1.8371 > 1$ ,  $\mathcal{R}_2 = 1.5812 > 1$ . 谣言盛行平衡点  $E_1 = (I_H, I_L, S_1, S_2)$  是渐近稳定的, 如图 3 所示.

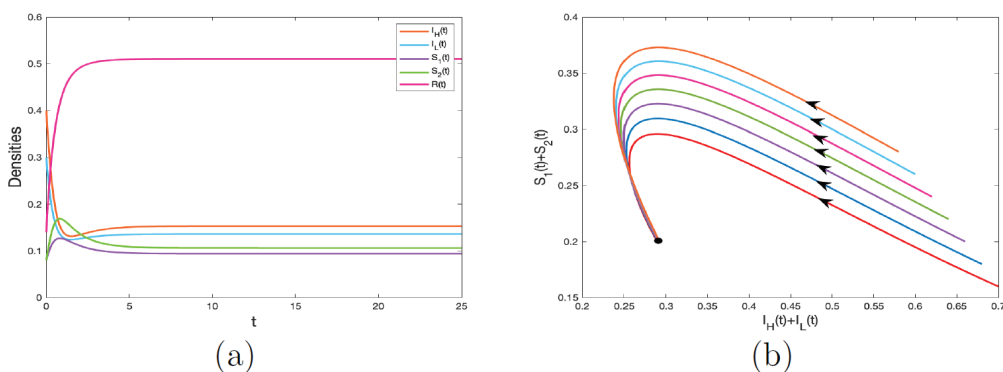


图 3 模型 (1) 中谣言盛行的稳定性

例 3 选取和例 2 相同的参数, 观察传播者  $S_1(t)$  和  $S_2(t)$  的变化. 图 4 (a) 显示了时滞对  $S_1(t)$  的影响, 图 4 (b) 显示了时滞对  $S_2(t)$  的影响. 从中可以看出  $S_i(t)$  ( $i=1,2$ ) 的峰值随着  $\tau$  的增加而逐渐减小, 也就是说时滞会抑制传播者密度的峰值.

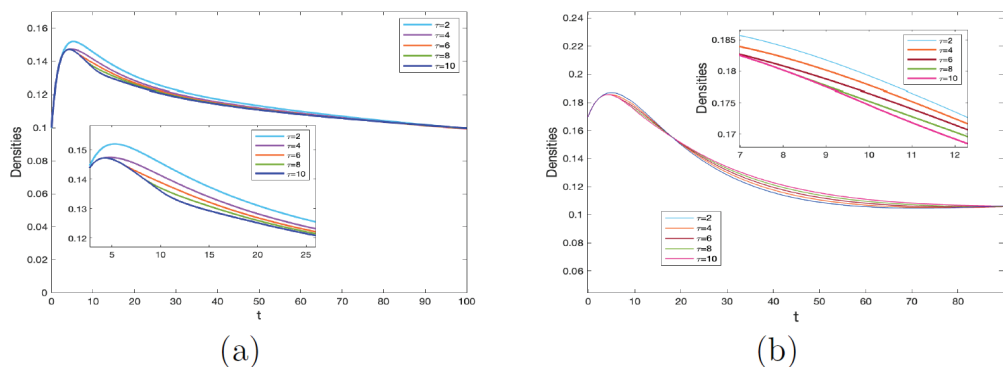


图 4  $S_1(t)$  和  $S_2(t)$  在不同时滞下密度的变化

注 3 由图 4 可知, 无论  $\tau$  取什么值, 传播者  $S_1(t)$  和  $S_2(t)$  最终都会趋于稳定.

例 4 通过这部分的数值模拟, 我们发现最优控制可以有效地控制谣言传播. 其它参数取值与例 2 相同, 取  $r_1=1, r_2=1, \nu_1=1, \nu_2=2$ , 我们分别对  $I_H(t), I_L(t), S_1(t)$  和  $S_2(t)$  进行模拟. 在图 5 中, 实线表示有控制, 虚线表示没有控制. 我们发现, 当采取惩罚控制时,  $I_H(t)$  和  $I_L(t)$  的个体数量在增加, 但传播者的数量  $S_1(t)$  和  $S_2(t)$  则相反. 这也验证了我们理论分析的准确性, 当对传播者采取惩罚机制时, 可以有效遏制谣言的传播.

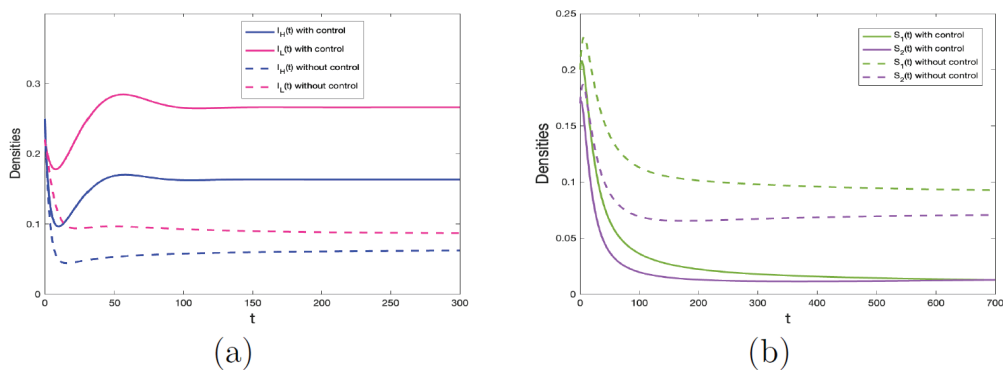


图 5 最优化控制对谣言传播的影响

例 5 最优控制  $\mu_i(t)$  ( $i=1,2$ ) 的轨迹如图 6 所示. 选择  $T=7$ , 可以发现最优化控制随时间的推移逐渐减少到 0, 如图 6 (a) 所示. 同时可以发现, 随着控制力的降低, 控制成本  $J(t)$  在一定时期内逐渐增加, 且前期增加速度快于后期. 当  $T=10$  时, 控制成本  $J(t)$  达到最大值.

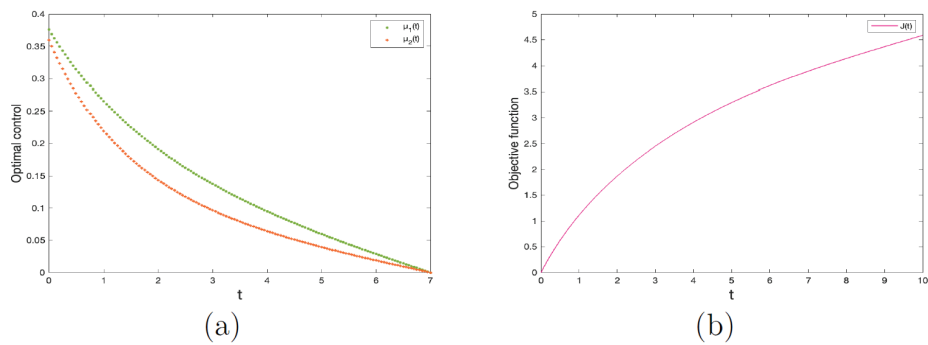


图 6 最优控制  $\mu_i(t)(i=1,2)$  和控制成本  $J(t)$  的轨迹

例 6 基于以上结论, 我们模拟了最优控制  $\mu_i(t)$  ( $i=1,2$ ) 和控制成本  $J(t)$  在不同时刻的变化过程, 分别选择  $T=6, T=8$  和  $T=10$ . 可以发现, 最优控制  $\mu_i(t)$  ( $i=1,2$ ) 轨迹随时间的不同而不同, 控制成本  $J(t)$  随着时间的增加而逐渐增加. 如图 7 所示.

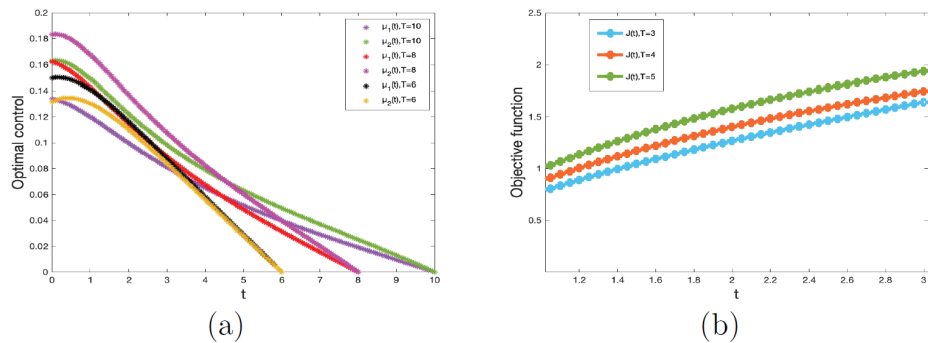


图 7 最优控制  $\mu_i(t)(i=1,2)$  和控制成本  $J(t)$  在不同时刻的轨迹

注 4 由图 7 可知, 对传播者采取惩罚机制的策略, 可以减少谣言的传播, 降低谣言的危害, 具有一定的现实意义.

## 6 结论

本文研究了多语言环境下带有惩罚机制的 2I2SR 谣言传播模型. 通过下一代矩阵方法计算了基本再生数  $\mathcal{R}_0$ , 并根据 Routh-Hurwitz 判据和 LaSalle 不变原理判断平衡点的局部和全局渐近稳定性. 由于无知者对信息敏感度的不同, 本文提出了具有时滞的谣言传播模型来研究时滞对传播的影响. 同时, 为了约束传播者肆无忌惮的行为, 提出了具有惩罚机制的谣言传播模型. 然后根据 Pontryagin 极大原则提出了最优化控制, 在减少控制成本的同时也减少谣言的传播. 最后, 通过数值模拟得出以下结论:

1) 从数值模拟中可以看出, 当  $\mathcal{R}_0 < 1$  时, 无谣言平衡点是局部和全局渐近稳定的. 当  $\mathcal{R}_0 > 1$  时, 谣言盛行平衡点是局部和全局渐近稳定的. 这与我们的理论分析是一致的.

2) 数值模拟表明, 时间延迟越大, 谣言传播越广, 控制成本也就越高. 因此, 立即采取惩罚措施是非常有必要的, 不仅可以惩罚传播者而且可以遏制谣言传播. 同时, 数值模拟的结果也验证了结论的正确性.

3) 通过最优控制的数值模拟, 我们发现谣言传播周期越短, 传播强度和范围越小. 与此同时, 控制谣言的成本也会降低.

## 参考文献:

- [1] DALEY D J, KENDALL D G. Stochastic rumors[J]. IMA Journal of Applied Mathematics, 1965, 1(1): 42-55.
- [2] MAKI D P, THOMPSON M. Mathematical models and applications: with emphasis on the social, life, and management sciences[M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1973.
- [3] ZANETTE D H. Critical behavior of propagation on small-world networks[J]. Physical Review E, 2001, 64(5): 050901.
- [4] ZANETTE D H. Dynamics of rumor propagation on small-world networks[J]. Physical Review E, 2002, 65(4): 041908.