

2-Hamming 图的强 Menger 边连通容错性*

解国强, 孟吉翔[†]

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

摘要: 设 G 是连通图. 若 G 的任一对顶点 u, v 之间有 $\min\{d(u), d(v)\}$ 条边不交的路, 则称连通图 G 为强 Menger 边连通的. 设 G 是强 Menger 边连通图, m 是非负整数, 若对任意满足 $|F| \leq m$ 的边子集 F , $G - F$ 都是强 Menger 边连通图, 则称 G 是 m -边容错强 Menger 边连通图. 证明了 2-Hamming 图 $H(n, k, 2)$ 是 $(4n-2)$ -边容错强 Menger 边连通的, 其中 $n \geq 2, k \geq 5$.

关键词: 容错性; 强 Menger 边连通性; h -Hamming 图; 边不交路

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2023.03.27.0001

中图分类号: O157.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2023)06-0671-05

引文格式: 解国强, 孟吉翔. 2-Hamming 图的强 Menger 边连通容错性[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2023, 40(6): 671-675+682.

英文引文格式: XIE Guoqiang, MENG Jixiang. Edge fault-tolerance of strongly Menger edge connected 2-Hamming graphs[J]. Journal of Xinjiang University (Natural Science Edition in Chinese and English), 2023, 40(6): 671-675+682.

Edge Fault-Tolerance of Strongly Menger Edge Connected 2-Hamming Graphs

XIE Guoqiang, MENG Jixiang

(School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China)

Abstract: A connected graph G is strongly Menger edge connected if any two of its vertices u, v are connected by $\min\{d(u), d(v)\}$ edge-disjoint paths. Let G be a strongly Menger edge connected graph and m be a non-negative integer, G is said to be m -edge tolerant strongly Menger edge connected if $G - F$ is strongly Menger edge connected for any edge subset F with $|F| \leq m$. It is proved in this paper that the 2-Hamming graphs $H(n, k, 2)$ are $(4n-2)$ -edge fault-tolerant strongly Menger edge connected for $n \geq 2, k \geq 5$.

Key words: fault tolerance; strong Menger edge connectivity; h -Hamming graphs, edge-disjoint paths

0 引言

并行路由(即顶点不相交路径的构造)一直是互连网络中的一个重要问题. 通过顶点间的不相交的路径不仅可以避免通信瓶颈, 提高信息传输的效率, 而且在顶点故障的情况下提供了替代路径. 随着互连网络规模的不断增加, 路由发生故障不可避免, 这与相应图的连通性密切相关.

为了更好地反映出网络的顶点不交路的容错性, Oh 等^[1]提出了强 Menger 连通性的概念, 并证明了 n 维星图 (n -dimensional star graphs) 在 $n \geq 3$ 时是 $(n-3)$ -容错强 Menger 连通的. Shih 等^[2]证明了所有 n 维超立方体网络 (n -dimensional hypercubes) 在 $n \geq 2$ 时是 $(n-2)$ -容错强 Menger 连通的, 并且在 $n \geq 5$ 时是 $(2n-5)$ -条件容错强

* 收稿日期: 2023-03-27

基金项目: 新疆维吾尔自治区自然科学基金“图与网络的容错”(2020D04046); 国家自然科学基金“图的不交路覆盖性及相关问题研究”(12261085).

作者简介: 解国强(1996-), 男, 硕士生, 从事图论及其应用的研究, E-mail: xieguoqiang@stu.xju.edu.cn.

[†] 通讯作者: 孟吉翔(1962-), 男, 博士, 教授, 从事图论及其应用的研究, E-mail: mjxxju@sina.com.

Menger 连通的. Chen 等^[3]证明了 n 维增广立方体 (n -dimensional augmented cubes) 在 $n \geq 4$ 时是 $(2n-7)$ -容错强 Menger 连通的. Cai 等^[4]证明了 n 维冒泡星图 (n -dimensional bubble-sort star graphs) 在 $n \geq 4$ 时是 $(2n-5)$ -容错强 Menger 连通的. Yang 等^[5]证明了折叠超立方体 (folded hypercubes) 在 $n \geq 6$ 时是 $(n-1)$ -容错强 Menger 连通的, 并且在 $n \geq 8$ 时是 $(2n-3)$ -条件容错强 Menger 连通的. Li 等^[6]证明了 n 维平衡超立方体 (n -dimensional balanced hypercubes) 在 $n \geq 2$ 时是 $(2n-4)$ -条件容错强 Menger 连通的.

为了更好地反映出网络的边不交路的容错性, Qiao 等^[7]提出了强 Menger 边连通性的概念, 并证明了 n 维超立方体在 $n \geq 4$ 时是 $(2n-4)$ -条件边容错强 Menger 边连通的, 而 n 维折叠超立方体在 $n \geq 5$ 时是 $(2n-2)$ -条件边容错强 Menger 边连通的. Cheng 等^[8]改进了这个结论, 证明了 n 维折叠超立方体在 $n \geq 5$ 时是 $(3n-5)$ -条件边容错强 Menger 边连通的. Li 等^[6]证明了 n 维平衡超立方体在 $n \geq 2$ 时是 $(2n-2)$ -边容错强 Menger 边连通的, 并且在 $n \geq 2$ 时是 $(6n-8)$ -条件边容错强 Menger 边连通的.

本文将介绍一类新的网络结构, 称为 h -Hamming 图. h -Hamming 图是一般的 Hamming 图的推广, 而且 k -元 n -立方体, Harary 图也被包含在这个网络当中. h -Hamming 图是 Cayley 图, 具有简单而丰富的拓扑性质. 本文主要探讨 2-Hamming 图的强 Menger 边连通容错性, 得到 2-Hamming 图 $H(n, k, 2)$ ($n \geq 2, k \geq 5$) 是 $(4n-2)$ -边容错强 Menger 边连通的, 但不是 $(4n-1)$ -边容错强 Menger 边连通的.

1 预备知识

设 $G = (V(G), E(G))$ 是一个顶点集为 $V(G)$ 和边集为 $E(G)$ 的有限图, 用 $|V(G)|$ 和 $|E(G)|$ 表示图 G 的点数和边数. 对于一个顶点子集 $U \subseteq V(G)$, 由顶点集 U 导出的子图记为 $G[U]$. 图 G 中的一个顶点 u 的邻集用 $N_G(u)$ 表示, 或简称为 $N(u)$. $N(u)$ 中的顶点个数称为 u 的度, 记作 $d_G(u)$. 图 G 的最小度用 $\delta(G)$ 表示. 对于一个子图 $H \subseteq G$, $u \in V(H)$, 定义 $d_H(u) = |N_H(u)|$. 设 $x, y \in V(G)$, 一个 (x, y) -边割是 E 的一个边子集 S , 其中 x 和 y 分别属于 $G-S$ 的两个不同的分支. 令 A, B 是 G 的子图, $E(A, B)$ 表示一个端点在 A 中, 另一个端点在 B 中的边构成的集合. 图 G 的最大分支的顶点数记作 $mc(G)$. 本文中未定义的术语和符号, 请参阅文献 [9].

定理 1^[10] 设 x 和 y 为图 G 的两个相异顶点, x 和 y 之间边不交的路的条数的最大值等于 (x, y) -边割的最小基数.

定义 1^[7] 设 G 为一个连通图, 若 G 中的每一对顶点 x, y 之间都有 $\min\{d_G(x), d_G(y)\}$ 条边不交的路, 则 G 为强 Menger 边连通图.

定义 2^[7] 设 G 为强 Menger 边连通图, m 为非负整数, 若对于任意的 $F \subseteq E(G)$ 且 $|F| \leq m$, $G-F$ 仍是强 Menger 边连通的, 则 G 为 m -边容错强 Menger 边连通图.

设 Γ 是一个群, S 是群 Γ 的一个不包含单位元的生成子集, 并且满足 $S = S^{-1}$. Cayley 图 $C(\Gamma, S)$ 是顶点集为 Γ 的图, 对于 Γ 中的任意两个不同的元 x 和 y , x 与 y 在 $C(\Gamma, S)$ 中相邻当且仅当 $x^{-1}y \in S$. 设 $Z_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ 是模 k 的剩余类加群, $S \subseteq Z_k \setminus \{0\}$, $S = -S$. Cayley 图 $C(Z_k, S)$ 通常称为循环图.

h -Hamming 图 $H(n, k, h)$, $1 \leq h \leq k-1$, 其顶点集为 $\{(i_1, i_2, \dots, i_n) \mid i_p \in Z_k, 1 \leq p \leq n\}$, 其中 (i_1, i_2, \dots, i_n) 与 (j_1, j_2, \dots, j_n) 相邻当且仅当存在 r ($1 \leq r \leq n$), 使得当 $p \neq r$ 时, 有 $i_p = j_p$, 且当 $p = r$ 时, 有 $j_p - i_p \in \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm h\} \pmod{k}$. 为了方便, 本文在类似的表述中省略了“ \pmod{k} ”. $H(1, 5, 2)$ 和 $H(1, 6, 2)$ 如图 1 所示.

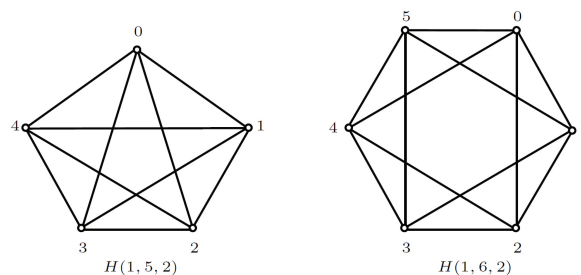


图 1 2-Hamming 图的两个例子

设 $z \in Z_k$, 令 $V_z = \{u \mid u = a_1 a_2 \dots a_{n-1} z \in V(H(n, k, h))\}$. 由 $H(n, k, h)$ 的顶点集 V_z 导出的子图, 记为单元 $R[z]$. 易知, 当 $n \geq 2$ 时, $R[z]$ 同构于 $H(n-1, k, h)$. $R[z]$ 中的每一个顶点 v , 其不在 $V(R[z])$ 中的邻点称为 v 的外邻点. 显然, v 恰有 4 个外邻点, 它们分别位于不同的单元 $R[z-2]$, $R[z-1]$, $R[z+1]$ 和 $R[z+2]$ 中.

易知, $H(n, k, h) \cong \underbrace{C(Z_k, S_h) \times C(Z_k, S_h) \times \cdots \times C(Z_k, S_h)}_n$. 其中图的乘积为笛卡儿积, 并且 $S_h = \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm h\} \subseteq Z_k$. 特别的, $H(n, k, 1)$ 是 k -元 n -立方体^[11], 文献 [12–14] 讨论了 k -元 n -立方体的强 Menger 边连通性的容错. $H(n, k, k-1)$ 是通常的 Hamming 图, 文献 [15] 介绍了 Hamming 图的容错分析, $H(1, k, h)$ 是 Harary 图^[16], 文献 [17] 介绍了 Harary 图的可靠性分析.

2 边容错强 Menger 边连通性

$H(n, k, h)$ 是交换群 $\underbrace{Z_k \times Z_k \times \cdots \times Z_k}_n$ 上的一个 Cayley 图, 因而是点传递的, 由此可知其边连通度为其正则度^[18], 于是我们得到引理 1.

引理 1 $\lambda(H(n, k, 2)) = \delta(H(n, k, 2)) = 4n$, 其中 $n \geq 1, k \geq 5$.

引理 2^[19] 设 $S \subseteq E(H(1, k, 2))$ ($k \geq 5$) 且 $|S| \leq 5$, 则在 $H(1, k, 2) - S$ 中存在一个分支 Y , 使得 $|V(Y)| \geq k-1$, 即 $mc(H(1, k, 2) - S) \geq k-1$.

引理 3 设 $S \subseteq E(H(2, k, 2))$ ($k \geq 5$) 且 $|S| \leq 13$, 则在 $H(2, k, 2) - S$ 中存在一个分支 Y , 使得 $|V(Y)| \geq k^2 - 1$, 即 $mc(H(2, k, 2) - S) \geq k^2 - 1$.

证明 记 $S_j = S \cap E(R[j])$, 设 Y_j 为 $R[j] - S_j$ 中的最大分支, 其中 $j = 0, 1, \dots, k-1$. 记 $M_{ij} = E(R[i], R[j])$, $T_{ij} = S \cap M_{ij}$, 并且 $T = \bigcup T_{ij}$, 其中 $0 \leq i \leq k-1, j = i+1, i+2, i-1, i-2$. 于是 $|S| = \sum_{j=0}^{k-1} |S_j| + |T| \leq 13$. 记 $H(n, k, 2) - S$ 中的一个最大分支为 Y . 不失一般性, 设 S_0, S_1, \dots, S_{k-1} 中边数最多的是 S_0 , 边数第二多的是 S_r ($r \neq 0$), 边数第三多的是 S_t ($t \neq 0, r$). 易得, $|S_r| \leq \lfloor 13/2 \rfloor = 6, |S_t| \leq \lfloor 13/3 \rfloor = 4$.

情形 1 $|S_0| \leq 3$.

由 $\lambda(R[i]) = 4$ 可知, $R[i] - S_i$ 连通, 其中 $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. 进一步有 $R[i] - S_i = Y_i$, 其中 $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. 根据 2-Hamming 图的定义可知, $R[i]$ 与 $R[i+j]$ ($R[i-j]$) 之间有完美匹配并且恰有 k 条边, 其中 $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}, j \in \{1, 2\}$. 因为 $3k \geq 15 > 13 \geq |T|$, 所以 $H(2, k, 2)[\bigcup_{i=0}^{k-1} V(Y_i)]$ 是连通的. 因此 $H(2, k, 2) - S$ 是连通的, 并且 $|V(Y)| = k^2 \geq k^2 - 1$.

情形 2 $4 \leq |S_0| \leq 5$.

情形 2.1 $|S_r| \leq 3$.

由 $\lambda(R[i]) = 4$ 可知, $R[i] - S_i$ 连通, 并且 $R[i] - S_i = Y_i, 1 \leq i \leq k-1$. 因为 $R[i]$ 与 $R[i+j]$ ($R[i-j]$) 之间有完美匹配并恰有 k 条边, 其中 $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}, j \in \{1, 2\}$, 又因为 $2k > 9$, 所以 $H(2, k, 2)[\bigcup_{i=1}^{k-1} V(Y_i)]$ 是连通的. 又由 $4k-4 > 9$ 可知, 在 $H(2, k, 2)$ 中存在一条边 e , 并且满足一个端点在 Y_0 中, 另一个端点在 Y_1, Y_2, Y_{k-2} 或 Y_{k-1} 中. 所以 Y_0 与 $H(2, k, 2)[\bigcup_{i=1}^{k-1} V(Y_i)]$ 连通. 于是 $Y = H(2, k, 2)[\bigcup_{i=0}^{k-1} V(Y_i)]$, 并且 $|V(Y)| = \sum_{i=1}^{k-1} |V(R[i] - S_i)| + |V(Y_0)| \geq (k-1)k + (k-1) = k^2 - 1$.

情形 2.2 $4 \leq |S_r| \leq 5$.

情形 2.2.1 $|S_t| \leq 3$.

由 $\lambda(R[i]) = 4$ 可知, $R[i] - S_i$ 是连通的, 且 $R[i] - S_i = Y_i$, 其中 $i \notin \{0, r\}$. 根据 2-Hamming 图的定义, $R[i]$ 与 $R[i+j]$ ($R[i-j]$) 之间有完美匹配并恰有 k 条边, 其中 $i \notin \{0, r\}, j \in \{1, 2\}$. 又因为 $2k > 5 \geq |S| - |S_0| - |S_r| \geq |T|$, 所以 $H(2, k, 2)[\bigcup_{i \notin \{0, r\}} V(Y_i)]$ 是连通的. 由引理 2 可知, $|V(Y_0)| \geq k-1$ 和 $|V(Y_r)| \geq k-1$, 下面考虑 r 的值.

(1) 如果 $r \in \{1, 2, k-2, k-1\}$. 不妨设 $r = 1$. 由 $3k-3 > 5 \geq |T|$ 可知, 在 $H(2, k, 2)$ 中, 存在一条边 e_1 , 使得一个端点在 Y_0 中, 另一个端点在 Y_2, Y_{k-2} 或 Y_{k-1} 中. 并且, 在 $H(2, k, 2)$ 中也存在一条边 e_2 , 使得一个端点在 Y_1 中, 另一个端点在 Y_2, Y_3 或 Y_{k-1} 中.

(2) 如果 $r \notin \{1, 2, k-2, k-1\}$, 因为 $4k-4 > 5 \geq |T|$, 所以在 $H(2, k, 2)$ 中存在一条边 e_1 , 使得一个端点在 Y_0 中, 另一个端点在 Y_1, Y_2, Y_{k-2} 或 Y_{k-1} 中. 并且在 $H(2, k, 2)$ 中也存在一条边 e_2 , 使得一个端点在 Y_r 中, 另一个端点在 $Y_{r+1}, Y_{r+2}, Y_{r-2}$ 或 Y_{r-1} 中.

因此, 在 $H(2, k, 2) - S$ 中, Y_0 与 $H(2, k, 2)[\bigcup_{i \notin \{0, r\}} V(Y_i)]$ 连通, 且 Y_r 与 $H(2, k, 2)[\bigcup_{i \notin \{0, r\}} V(Y_i)]$ 连通. 于是, $Y = H(2, k, 2)[\bigcup_{i=0}^{k-1} V(Y_i)]$. 故 $|V(Y)| = \sum_{i \notin \{0, r\}} |V(R[i] - S_i)| + |V(Y_0)| + |V(Y_r)| \geq (k-2)k + (k-1) + (k-1) = k^2 - 2$. 若 $|V(Y)| = k^2 - 2$, 则 $|S| \geq |E(Y, H(2, k, 2) - Y)| \geq 14$, 这与 $|S| \leq 13$ 矛盾. 因此 $|V(Y)| \geq k^2 - 1$.

情形 2.2.2 $|S_t| = 4$.

因为 $|S_0| \geq |S_r| \geq |S_t| \geq 4$ 以及 $|S| \leq 13$, 所以 $\sum_{i \notin \{0, r, t\}} |S_i| \leq |T| + \sum_{i \notin \{0, r, t\}} |S_i| \leq |S| - |S_0| - |S_r| - |S_t| \leq 1$. 又由 $\lambda(R[i]) = 4$ 可知, $R[i] - S_i$ 连通, 且 $R[i] - S_i = Y_i$, 其中 $i \notin \{0, r, t\}$. 由引理 2 可知, $|V(Y_0)| \geq k-1$, $|V(Y_r)| \geq k-1$, $|V(Y_t)| \geq k-1$. 因为 $|T| \leq 1$, $H(2, k, 2)[\bigcup_{i=0}^{k-1} V(Y_i)]$ 是连通的, 又因为在 $H(2, k, 2)$ 中, 每个单元 $R[j]$ 中的任意顶点都有 4 个外邻点, 其中 $j = 0, r, t$, 所以 $H(2, k, 2) - S$ 是连通的. 故 $|V(Y)| = k^2$.

情形 3 $6 \leq |S_0| \leq 9$.

情形 3.1 $|S_r| \leq 3$.

因为 $\lambda(R[i]) = 4$, 所以 $R[i] - S_i$ 是连通的, 并且 $R[i] - S_i = Y_i$, $1 \leq i \leq k-1$. 根据 2-Hamming 图的定义, $R[i]$ 与 $R[i+j]$ ($R[i-j]$) 之间有完美匹配并恰有 k 条边, 其中 $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, $j \in \{1, 2\}$. 又因为 $2k > 7 \geq |T|$, 所以 $H(2, k, 2)[\bigcup_{i=1}^{k-1} V(Y_i)]$ 是连通的. 若 $|V(Y)| \leq k^n - 2$, 则在图 $H(n, k, 2) - S$ 中, $R[0] - S_0$ 中至少有两个顶点没有外邻点, 于是, $|T| \geq 8$, 这与 $|T| \leq |S| - |S_0| \leq 7$ 矛盾. 因此, $|V(Y)| \geq k^2 - 1$.

情形 3.2 $4 \leq |S_r| \leq 5$.

由引理 2 可知, $|V(Y_r)| \geq k-1$. 因为 $\sum_{i \notin \{0, r\}} |S_i| \leq |T| + \sum_{i \notin \{0, r\}} |S_i| \leq |S| - |S_0| - |S_r| \leq 3$ 和 $\lambda(R[i]) = 4$, 所以 $R[i] - S_i$ 是连通的且 $R[i] - S_i = Y_i$, 其中 $i \notin \{0, r\}$. 由于 $|T| \leq 3$, $H(2, k, 2)[\bigcup_{i=1}^{k-1} V(Y_i)]$ 是连通的. 又因为在 $H(2, k, 2)$ 中, $R[0]$ 中的任意顶点都有 4 个外邻点, 所以 $R[0] - S_0$ 与 $H(2, k, 2)[\bigcup_{i=1}^{k-1} V(Y_i)]$ 是连通的. 于是, $|V(Y)| \geq k^2 - 1$.

情形 3.3 $|S_r| = 6$.

由 $\lambda(R[i]) = 4$ 可知, $R[i] - S_i$ 是连通的, 且 $R[i] - S_i = Y_i$, $i \notin \{0, r\}$. 因为 $|T| \leq |S| - |S_0| - |S_r| \leq 1 < k$, 所以 $H(2, k, 2)[\bigcup_{i \notin \{0, r\}} V(Y_i)]$ 是连通的. 又因为在 $H(2, k, 2)$ 中每个单元 $R[j]$ 中的任意顶点都有 4 个外邻点, 其中 $j \in \{0, r\}$, 于是, 在 $H(2, k, 2) - S$ 中, $R[0] - S_0$ 与 $H(2, k, 2)[\bigcup_{i \notin \{0, r\}} V(Y_i)]$ 连通, 并且 $R[r] - S_r$ 与 $H(2, k, 2)[\bigcup_{i \notin \{0, r\}} V(Y_i)]$ 连通, 从而, $H(2, k, 2) - S$ 是连通的. 故 $|V(Y)| = k^2$.

情形 4 $10 \leq |S_0| \leq 13$.

由 $\sum_{i=1}^{k-1} |S_i| \leq \sum_{i=1}^{k-1} |S_i| + |T| \leq |S| - |S_0| \leq 3$ 和 $\lambda(R[i]) = 4$, 知 $R[i] - S_i$ 是连通的, 且 $R[i] - S_i = Y_i$, 其中 $1 \leq i \leq k-1$. 注意到 $|M_{j, j+1}| - |T_{j, j+1}| \geq k-3 \geq 1$, 从而 $|E(Y_j, Y_{j+1})| \geq 1$, 其中 $1 \leq j \leq k-2$. 于是 $H(2, k, 2)[\bigcup_{i=1}^{k-1} V(Y_i)]$ 是连通的. 因为 $|T| \leq |S| - |S_0| \leq 3$, 所以在 $H(2, k, 2) - S$ 中, $R[0] - S_0$ 的每一个顶点都有外邻点. 因此, $H(2, k, 2) - S$ 是连通图, 故 $|V(Y)| = k^2$. 引理得证.

引理 4 设 $S \subseteq E(H(n, k, 2))$ ($n \geq 2, k \geq 5$) 且 $|S| \leq 8n-3$, 则在 $H(n, k, 2) - S$ 中存在一个分支 Y , 使得 $|V(Y)| \geq k^n - 1$, 即 $mc(H(n, k, 2) - S) \geq k^n - 1$.

证明 用归纳法, 分别由引理 2 和引理 3 可知, 当 $n = 1, 2$ 时结论成立. 假设该结论对于 $n-1$ 时成立 (其中 $n \geq 3$). 记 $H(n, k, 2) - S$ 中的一个最大分支为 Y . 下面证明结论对于 n 时也成立. 记 $S_j = S \cap E(R[j])$, 设 Y_j 为 $R[j] - S_j$ 中的最大分支, 其中 $j = 0, 1, \dots, k-1$. 记 $M_{ij} = E(R[i], R[j])$, $T_{ij} = S \cap M_{ij}$, 并且 $T = \bigcup T_{ij}$, 其中 $0 \leq i \leq k-1, j = i+1, i+2, i-1, i-2$. 于是 $|S| = \sum_{j=0}^{k-1} |S_j| + |T| \leq 8n-3$. 不失一般性, 设 S_0, S_1, \dots, S_{k-1} 中边数最多的是 S_0 , 边数第二多的是 S_r ($r \neq 0$). 易得, $|S_r| \leq \lfloor (8n-3)/2 \rfloor = 4n-2$.

情形 1 $|S_0| \leq 4n-5$.

由 $\lambda(R[i]) = 4n-4$ 可知, $R[i] - S_i$ 是连通的, 且 $R[i] - S_i = Y_i$, 其中 $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. 又因为 $|M_{j, j+1}| - |T_{j, j+1}| \geq k^{n-1} - (8n-3) \geq 1$, 所以 $|E(Y_j, Y_{j+1})| \geq 1$, 其中 $0 \leq j \leq k-1, n \geq 3, k \geq 5$. 故 $H(n, k, 2) - S$ 是连通的, $|V(Y)| = k^n \geq k^n - 1$.

情形 2 $4n-4 \leq |S_0| \leq 8n-11 = 8(n-1) - 3$.

由归纳假设可知, $|V(Y_0)| \geq k^{n-1} - 1$.

情形 2.1 $|S_r| \leq 4n-5$.

由 $\lambda(R[i]) = 4n-4$ 知, $R[i] - S_i$ 是连通的, 且 $R[i] - S_i = Y_i$, $1 \leq i \leq k-1$. 注意到 $|M_{j, j+1}| - |T_{j, j+1}| \geq k^{n-1} - ((8n-3) - (4n-4)) \geq 1$, 则 $|E(Y_j, Y_{j+1})| \geq 1$, 其中 $1 \leq j \leq k-2, n \geq 3$. 又由 $4k^{n-1} - 4 > 8n-3$ 可知, 在 $H(n, k, 2) - S$ 中, 存在一条边 e , 使得它的一个端点在 Y_0 中, 另一个端点在 Y_1, Y_2, Y_{k-2} 或 Y_{k-1} 中. 故 $|V(Y)| = \sum_{i=1}^{k-1} |V(R[i] - S_i)| + |V(Y_0)| \geq (k-1)k^{n-1} + (k^{n-1} - 1) = k^n - 1$.

情形 2.2 $4n-4 \leq |S_r| \leq 4n-2 \leq 8n-11 = 8(n-1) - 3$.

由归纳假设可知, $|V(Y_r)| \geq k^{n-1} - 1$.

由 $\sum_{i \notin \{0,r\}} |S_i| \leq |T| + \sum_{i \notin \{0,r\}} |S_i| \leq |S| - |S_0| - |S_r| \leq 5$ 和 $\lambda(R[i]) = 4n-4 \geq 8$ 可知, $R[i] - S_i$ 是连通的且 $R[i] - S_i = Y_i$, 其中 $i \notin \{0,r\}$. 根据 2-Hamming 图的定义, $R[i]$ 与 $R[i+j]$ ($R[i-j]$) 之间恰有 k^{n-1} 条边, 其中 $i \notin \{0,r\}$, $j \in \{1,2\}$. 又因为 $k^{n-1} > 5 \geq |S| - |S_0| - |S_r| \geq |T|$, 所以 $H(n,k,2)[\bigcup_{i \notin \{0,r\}} V(Y_i)]$ 是连通的. 以下考虑 r 的值.

(1) 当 $r \in \{1, 2, k-2, k-1\}$ 时, 不妨设 $r=1$, 由 $3k^{n-1} - 3 > 5 \geq |T|$ 可知, $H(n,k,2) - S$ 中存在一条边 e_1 , 使得一个端点在 Y_0 中, 另一个端点在 Y_2, Y_{k-2} 或 Y_{k-1} 中. 同理, $H(n,k,2) - S$ 中也存在一条边 e_2 , 使得一个端点在 Y_1 中, 另一个端点在 Y_2, Y_3 或 Y_{k-1} 中.

(2) 当 $r \notin \{1, 2, k-2, k-1\}$ 时, 因为 $4k^{n-1} - 4 > 5 \geq |T|$, 所以 $H(n,k,2) - S$ 中存在一条边 e_1 , 其满足一个端点在 Y_0 中, 另一个端点在 Y_1, Y_2, Y_{k-2} 或 Y_{k-1} 中. 并且, 存在一条边 e_2 , 满足它的一个端点在 Y_r 中, 另一个端点在 $Y_{r+1}, Y_{r+2}, Y_{r-2}$ 或 Y_{r-1} 中.

因此, 在 $H(n,k,2) - S$ 中, Y_0 与 $H(n,k,2)[\bigcup_{i \notin \{0,r\}} V(Y_i)]$ 连通, 且 Y_r 与 $H(n,k,2)[\bigcup_{i \notin \{0,r\}} V(Y_i)]$ 连通. 进一步, $|V(Y)| \geq k^n - 2$. 若 $|V(Y)| = k^n - 2$, 则 S 中至少有 $8n-2$ 条边, 这与 $|S| \leq 8n-3$ 矛盾. 故 $|V(Y)| \geq k^n - 1$.

情形 3 $8n-10 \leq |S_0| \leq 8n-3$.

由 $\sum_{i=1}^{k-1} |S_i| + |T| \leq |S| - |S_0| \leq 7$ 和 $\lambda(R[i]) = 4n-4 \geq 8$ 可知, $R[i] - S_i$ 是连通的, 且 $R[i] - S_i = Y_i$, 其中 $1 \leq i \leq k-1$. 因为 $|M_{j,j+1}| - |T_{j,j+1}| \geq k^{n-1} - 7 \geq 1$, 所以 $|E(Y_j, Y_{j+1})| \geq 1$, 其中 $1 \leq j \leq k-2$, $n \geq 3$. 于是, $H(n,k,2)[\bigcup_{i=1}^{k-1} V(Y_i)]$ 连通. 若 $|V(Y)| \leq k^n - 2$, 则在 $H(n,k,2) - S$ 中, $R[0] - S_0$ 至少有两个顶点没有外邻点, 从而 $|T| \geq 8$, 这与 $|T| \leq |S| - |S_0| \leq 7$ 矛盾. 因此, $|V(Y)| \geq k^n - 1$. 引理得证.

引理 5^[20] (1) 设 G 为一个 k -正则图, 设 m 是整数且满足 $0 \leq m \leq k-2$, 则图 G 是 m -边容错强 Menger 边连通的, 当且仅当 $mc(G-S) \geq |V(G)| - 1$, 对于 $S \subseteq E(G)$, $|S| \leq m+k-1$ 都成立. (2) 若 G 是顶点数不小于 $k+2$ 的 k -正则图, 则 G 不是 $(k-1)$ -边容错强 Menger 边连通的.

定理 2 $H(n,k,2)$ ($n \geq 2, k \geq 5$) 是 $(4n-2)$ -边容错强 Menger 边连通的, 但不是 $(4n-1)$ -边容错强 Menger 边连通的.

证明 由引理 4 和引理 5 可证定理 2.

参考文献:

- [1] OH E, CHEN J E. On strong Menger-connectivity of star graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2003, 129(2/3): 499-511.
- [2] SHIH L M, CHIANG C F, HSU L H, et al. Strong Menger connectivity with conditional faults on the class of hypercube-like networks[J]. Information Processing Letters, 2008, 106(2): 64-69.
- [3] CHEN Y C, CHEN M H, TAN J J M. Maximally local connectivity and connected components of augmented cubes[J]. Information Sciences, 2014, 273: 387-392.
- [4] CAI H Y, LIU H Q, LU M. Fault-tolerant maximal local-connectivity on Bubble-sort star graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2015, 181: 33-40.
- [5] YANG W H, ZHAO S L, ZHANG S R. Strong Menger connectivity with conditional faults of folded hypercubes[J]. Information Processing Letters, 2017, 125: 30-34.
- [6] LI P S, XU M. Fault-tolerant strong Menger (edge) connectivity and 3-extra edge-connectivity of balanced hypercubes[J]. Theoretical Computer Science, 2018, 707: 56-68.
- [7] QIAO Y L, YANG W H. Edge disjoint paths in hypercubes and folded hypercubes with conditional faults[J]. Applied Mathematics and Computation, 2017, 294: 96-101.
- [8] CHENG Q, LI P S, XU M. Conditional (edge-) fault-tolerant strong Menger (edge) connectivity of folded hypercubes[J]. Theoretical Computer Science, 2018, 728: 1-8.
- [9] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory[M]. New York: Springer, 2008.
- [10] MENGER K. Zur allgemeinen kurventheorie[J]. Fundamenta Mathematicae, 1927, 10(1): 96-115.
- [11] FENG K, JI Z J, WEI W. Subnetwork reliability analysis in k -ary n -cubes[J]. Discrete Applied Mathematics, 2019, 267: 85-92.