

极大外平面图的 Wiener 指标的上下界*

孙晓慧, 安新慧[†]

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

摘要: 外平面图是具有平面嵌入的平面图, 其中每个顶点位于外部区域的边界上. 若通过添加边获得的图不是外平面图, 则此时的外平面图是极大外平面图. 图 G 的 Wiener 指标是所有顶点对之间距离的总和. 证明了对于 n 个顶点的极大外平面图 G , 有 $W(K_1 \vee P_{n-1}) \leq W(G) \leq W(P_n^2)$, 其中 $K_1 \vee P_{n-1}$ 是通过将一个点和路 P_{n-1} 的每个顶点相连得到的图, P_n^2 是路的平方图.

关键词: 极大外平面图; Wiener 指标; 极图; 平方图

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2023.01.04.0001

中图分类号: O157.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2023)05-0560-05

引文格式: 孙晓慧, 安新慧. 极大外平面图的 Wiener 指标的上下界[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2023, 40(5): 560-564.

英文引文格式: SUN Xiaohui, AN Xinhui. Sharp bounds for Wiener index of maximal outerplanar graphs[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2023, 40(5): 560-564.

Sharp Bounds for Wiener Index of Maximal Outerplanar Graphs

SUN Xiaohui, AN Xinhui

(School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China)

Abstract: A graph is outerplanar if it has a crossing-free embedding in the plane such that all vertices are on the boundary of its outer face. An outerplanar graph is maximal outerplanar if no edge can be added without losing outerplanarity. The Wiener index of a graph G is the sum of distances between all pairs of vertices of G . We show that for a maximal outerplanar graph G on n vertices, $W(K_1 \vee P_{n-1}) \leq W(G) \leq W(P_n^2)$, where $K_1 \vee P_{n-1}$ is the graph obtained from joining a vertex to each vertex of P_{n-1} and P_n^2 is the square of P_n .

Key words: maximal outerplanar graph; Wiener index; extremal graphs; square graphs

0 引言

1947年, Wiener^[1]首次引入连通图 G 的 Wiener 指标用于研究化学中石蜡的沸点. 它是图 G 的所有无序顶点间距离的总和. 如果图 G 是连通图且 $u, v \in V(G)$, 则 u 和 v 之间的距离 $d(u, v)$ 是连接 u 和 v 的最短路径上的边数. 连通图 G 的 Wiener 指标 $W(G)$ 定义如下:

$$W(G) = \sum_{u, v \in V(G)} d(u, v).$$

Entringer 等^[2]证明了 n 个顶点的树的 Wiener 指标在其为星图时达到最小值 $(n-1)^2$, 在其为路时达到最大值 $(n^3-n)/6$. Marraki 和 Modabish 证明了 n 个顶点的平面图的 Wiener 指标的最小值为 $(n-2)^2+2$ ^[3]. Che 和 Collins 证明了当图 G 是一个顶点数为 $n \geq 3$ 的 Apollonian 网络时, Wiener 指标的最大值为 $\lfloor (n^3+3n^2)/18 \rfloor$, 并且进一步讨论了当图 G 是顶点数为 $3 \leq n \leq 10$ 的极大平面图的 Wiener 指标的上界, 并猜测它对所有 $n \geq 3$ 都成立^[4]. Ghosh 等证明了上述猜想, 并确定了 $n \geq 10$ 的极大平面图的 Wiener 指标为 Apollonian 网络时达到最大值^[5]. 本文中我们主要研究了极大外平面图的 Wiener 指标的上下界.

* 收稿日期: 2023-01-04

基金项目: 国家自然科学基金“图中距离参数的研究”(11801487).

作者简介: 孙晓慧(1997-), 女, 硕士生, 从事图论及其应用的研究, E-mail: sunxiaohui202208@163.com.

[†] 通讯作者: 安新慧(1978-), 女, 博士, 副教授, 从事图论及其应用的研究, E-mail: xjaxh@163.com.

1 预备知识

本文仅考虑有限简单连通图, 未指定的符号定义参阅文献 [6]. 用 $N(v)$ 表示顶点 v 的邻点集, 基数 $|N(v)|$ 是点 v 的度数, 记为 $d(v)$. 集合 S 的基数用 $|S|$ 表示. 图 G 的顶点集用 $V(G)$ 表示, 其基数称为图 G 的阶数. 如果图 G 中的任意两个顶点可通过路径连接, 则称其为连通图. 对于点 $x, y \in V(G)$, $d(x, y)$ 表示图 G 中连接 x 和 y 的最短路的长度. $N(x, i)$ 表示图 G 中与顶点 x 的距离为 i 的所有点的集合. 特别的, 当 $i = 1$ 时, $N(x, 1)$ 是 x 的邻点集并且其基数等于 x 的度数. 图 G 中顶点 x 的离心率表示 x 与图 G 中其它顶点之间的最大距离, 记为 $e(x)$. 图 G 的直径是所有顶点离心率的最大值, 用 $\text{diam}(G)$ 表示.

定义 1 用 $W(x, G)$ 表示顶点 x 和图 G 中其它顶点之间所有距离的总和, 即

$$W(x, G) = \sum_{y \in V(G)} d(x, y).$$

图 G 的 Wiener 指标 $W(G)$ 表示 G 中的无序顶点对之间的所有距离之和. 图 G 的 Wiener 指标还可以表示为:

$$W(G) = \sum_{x, y \in V(G)} d(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{x \in V(G)} W(x, G).$$

定义 2 外平面图是具有平面嵌入的平面图, 其中每个顶点位于外部区域的边界上. 若通过添加边获得的图不是外平面图, 则此时的外平面图是极大外平面图.

对于给定的图 G , 我们使用 $G - x$ 表示通过删除顶点 x 得到的图形. 两个图 G_1 和 G_2 的连接, 用 $G_1 \vee G_2$ 表示, 即将图 G_1 中的每个顶点与图 G_2 中每个顶点连接. 我们首先给出极大外平面图的一些简单性质.

引理 1 设图 G 是 n 个顶点的极大外平面图 ($n \geq 3$), 则

- (i) 图 G 中至少有两个 2 度顶点.
- (ii) 如果 $d(v) = 2$, 那么图 $G - v$ 也是极大外平面图.
- (iii) 图 G 恰好有 $2n - 3$ 条边.

定义 3 设 P_n^2 是通过将路 P_n 中所有距离为 2 的顶点对之间连边后得到的图.

引理 2^[7] 设图 G 是 n 个顶点的极大外平面图, 其中 $n \geq 5$. 若 v 为图 G 中 1 个度为 2 的点, 并且其邻点为 u 和 w , 则 $d(u) + d(w) \geq 7$, 等号成立当且仅当 $G[N(u) \cup N(w)] \cong P_5^2$.

当 $n \geq 3$ 时, 令 \mathcal{H}_n 表示 n 个顶点的所有非同构的极大外平面图的集合. 当 $n \in \{3, 4, 5\}$, \mathcal{H}_n 包含唯一确定的图 C_3, H_1, H_2 , 如图 1 所示.

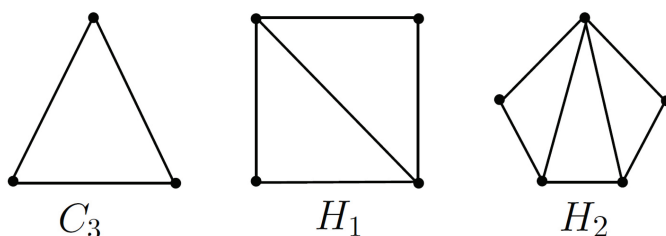


图 1 $C_3, H_1 = P_4^2, H_2 = P_5^2$

当 $n = 6$ 时, $\mathcal{H}_6 = \{H'_1, H'_2, H'_3\}$ (如图 2 所示). 通过直接计算, 可以得到

$$W(H'_1) = 21, W(H'_2) = 21, W(H'_3) = 22.$$

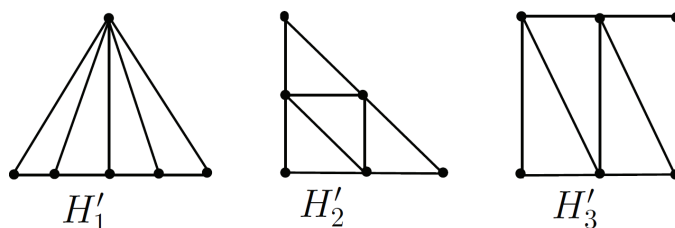


图 2 $H'_1 = K_1 \vee P_5, H'_2, H'_3 = P_6^2$

在本文中, 我们给出了极大外平面图的 Wiener 指标的上下界, 并刻画了相应的极图.

2 极大外平面图的 Wiener 指标的下界

在本节中,我们将确定极大外平面图的 Wiener 指标的下界,并刻画相应的极图.

引理 3 阶数 $n \geq 7$ 的极大外平面图 G 的直径为 2 当且仅当 $G \cong K_1 \vee P_{n-1}$.

证明 显然, $K_1 \vee P_{n-1}$ 是一个极大外平面图,并且直径为 2. 下面假设图 G 是直径为 2 且 $n \geq 7$ 的极大外平面图. 由引理 1 可知,在图 G 中存在 $v_0 \in V(G)$, 它的度数 $d(v_0) = 2$. 设 $N(v_0) = \{u_0, w_0\}$. 由于图 G 的直径是 2, 对于任何 $y \in V(G) \setminus \{v_0, u_0, w_0\}$, 有 $d(v_0, y) = 2$. 如果 $d(u_0) = n-1$ 或 $d(w_0) = n-1$, 则 $G \cong K_1 \vee P_{n-1}$. 下面考虑如果 $d(u_0) < n-1$ 且 $d(w_0) < n-1$, 那么 u_0 和 w_0 还有一个与 v_0 不同的公共邻点, 记作 z_0 . 此外, u_0 有一个不同于 v_0 的 2 度邻点 u_1 , 且 w_0 也有一个不同于 v_0 的 2 度邻点 w_1 . 显然, $d(u_1, w_1) = 3$, 这与图 G 的直径为 2 矛盾.

定理 1 设图 G 为顶点数 $n \geq 7$ 的极大外平面图, 则 $W(G) \geq n^2 - 3n + 3$, 等式成立当且仅当 $G \cong K_1 \vee P_{n-1}$.

证明 当图 G 为极大外平面图且 $v \in V(G)$, 有

$$\begin{aligned} W(v, G) &= \sum_{u \in V(G)} d(u, v) = \sum_{\substack{u \in V(G) \\ d(u, v) = 1}} d(u, v) + \sum_{\substack{u \in V(G) \\ d(u, v) \geq 2}} d(u, v) \\ &\geq d(v) + 2[n - d(v) - 1] \\ &= 2n - d(v) - 2 \end{aligned} \quad (1)$$

因此, 可得

$$\begin{aligned} W(G) &= \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} W(v, G) \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} (2n - d(v) - 2) \\ &= n(n-1) - \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} d(v) \\ &= n(n-1) - \frac{1}{2} \cdot 2|E(G)| \\ &= n^2 - 3n + 3 \end{aligned} \quad (2)$$

等式 (1) 和等式 (2) 成立当且仅当对任意 $u, v \in V(G)$, 有 $d(u, v) \leq 2$. 由于 $n \geq 7$, 根据引理 3, 等式成立当且仅当 $G \cong K_1 \vee P_{n-1}$.

3 极大外平面图的 Wiener 指标的上界

在本节中,我们将确定极大外平面图的 Wiener 指标的上界,并刻画相应的极图.

图 3 为 n 分别是偶数和奇数时的 P_n^2 的结构.

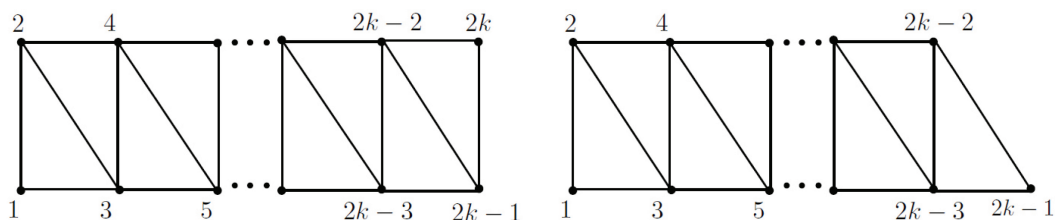


图 3 P_{2k}^2 和 P_{2k-1}^2

引理 4^[8] 设 P_n 为顶点数 $n \geq 3$ 的路, 则

$$W(P_n^2) = \begin{cases} \frac{1}{12}n^3 + \frac{1}{8}n^2 - \frac{1}{12}n - \frac{1}{8}, & n \text{ 为奇数;} \\ \frac{1}{12}n^3 + \frac{1}{8}n^2 - \frac{1}{12}n, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

引理 5^[9] 每个阶数至少为 3 的极大外平面图都是 2 连通的.

引理 6 设图 G 为 n 个顶点的 2 连通图, 则 $\text{diam}(G) \leq \lfloor n/2 \rfloor$.

证明 设 x 是图 G 中的顶点, $e(x) = t$, 其中 $t > 1$.

注意, $N(x, i)$ 对于 $0 \leq i \leq t$ 是两两不相交的, 并且形成了图 G 的顶点集的一个划分, 从而

$$n = |V(G)| = \sum_{i=0}^t |N(x, i)|.$$

显然 $|N(x, 0)| = 1$. 当 $1 \leq i \leq t-1$ 时, $N(x, i)$ 是图 G 的一个顶点割. 由于图 G 是 2 连通的, 对于 $1 \leq i \leq t-1$ 有 $|N(x, i)| \geq 2$. 因此, $n \geq 2(t-1) + 2 = 2t$. 那么 $e(x) = t \leq \lfloor n/2 \rfloor$, 所以

$$\text{diam}(G) = \max_{x \in V(G)} \{e(x)\} \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

引理 7 设图 G 是 n 个顶点的 2 连通图. 如果 $v \in V(G)$ 且 $d(v) = 2$, 那么

$$W(v, G) \leq \begin{cases} \frac{n^2-1}{4}, & n \text{ 为奇数;} \\ \frac{n^2}{4}, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

证明 对 n 个顶点的 2 连通图 G , 有

$$\begin{aligned} W(v, G) &= \sum_{i=1}^t i |N(v, i)| \\ &= \sum_{i=1}^t [t - (t-i)] \cdot |N(v, i)| \\ &= t \sum_{i=1}^t |N(v, i)| - \sum_{i=1}^{t-1} (t-i) \cdot |N(v, i)|. \end{aligned}$$

因为 $|N(v, i)| \geq 2$ ($1 \leq i \leq t-1$),

$$\begin{aligned} W(v, G) &\leq t(n-1) - 2 \sum_{i=1}^{t-1} (t-i) \\ &= t(n-1) - 2 \sum_{i=1}^{t-1} i \\ &= -t^2 + tn. \end{aligned}$$

由于 $-t^2 + tn$ 在 t 接近 $n/2$ 的整数处最大化, 则

$$W(v, G) \leq \begin{cases} \frac{n^2-1}{4}, & n \text{ 为奇数;} \\ \frac{n^2}{4}, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

引理 7 得证.

定理 2 设图 G 为顶点数 $n \geq 2$ 的极大外平面图, 则

$$W(G) \leq \begin{cases} \frac{1}{12}n^3 + \frac{1}{8}n^2 - \frac{1}{12}n - \frac{1}{8}, & n \text{ 为奇数;} \\ \frac{1}{12}n^3 + \frac{1}{8}n^2 - \frac{1}{12}n, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

等式成立当且仅当 $G \cong P_n^2$.

证明 设图 G 是 n 个顶点的极大外平面图. 当 $n \leq 5$ 时, 显然图 G 存在唯一的极大外平面图同构于 P_n^2 .

当 $n = 6$ 时, 由图 2 可知, 只有三个不同构的极大外平面图 H'_1, H'_2, H'_3 . 通过简单计算可得, $W(H'_1) = 21, W(H'_2) = 21, W(H'_3) = 22$. 由于 $H'_3 \cong P_6^2$, 所以 $n = 6$ 时, 结果成立.

当 $n \geq 7$ 时, 我们对顶点数 n 使用数学归纳法证明, 若 $G \not\cong P_n^2$, 则 $W(G) < W(P_n^2)$. 接下来基于以下两种情况, 可以得到 $n-1$ 个顶点的极大外平面图 G' , 其中 $G' \not\cong P_{n-1}^2$.

情况 1 图 G 至少有三个 2 度顶点.

图 G 存在两个 2 度顶点, 记为 u 和 v , 使得 $d(u, v) < \lfloor (n-1)/2 \rfloor - 1$. 这意味着当 w 是与 u, v 不同的 2 度顶点时, $G-w \not\cong P_{n-1}^2$. 设 $G' = G-w$.

情况 2 图 G 恰好有两个 2 度顶点.

图 G 的两个 2 度顶点记为 u 和 v , 由于 $G \not\cong P_n^2$, 因此至少存在一个顶点 w , 其度数至少为 5. 因此, 图 $G-u$ 和 $G-v$ 中的至少有一个与 P_{n-1}^2 不同构. 不失一般性, 假设 $G-u \not\cong P_{n-1}^2$, 因此设 $G' \cong G-u$.

由于图 G' 是一个顶点数为 $n-1$ 的极大外平面图, 且 $G' \not\cong P_{n-1}^2$, 根据归纳假设, $W(G') < W(P_{n-1}^2)$, 即

$$W(G') < \begin{cases} \frac{1}{12}(n-1)^3 + \frac{1}{8}(n-1)^2 - \frac{1}{12}(n-1) - \frac{1}{8}, & n \text{ 为奇数} \\ \frac{1}{12}(n-1)^3 + \frac{1}{8}(n-1)^2 - \frac{1}{12}(n-1), & n \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (3)$$

由于

$$W(G) = W(G') + W(v, G) \quad (4)$$

将式 (3) 代入式 (4), 利用引理 7, 我们得到

$$W(G) < \begin{cases} \frac{1}{12}n^3 + \frac{1}{8}n^2 - \frac{1}{12}n - \frac{1}{8}, & n \text{ 为奇数;} \\ \frac{1}{12}n^3 + \frac{1}{8}n^2 - \frac{1}{12}n, & n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

定理得证.

参考文献:

- [1] WIENER H. Structural determination of paraffin boiling points[J]. Journal of the American Chemical Society, 1947, 69: 17-20.
- [2] ENTRINGER R C, JACKSON D E, SNYDER D A. Distance in graphs[J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 1976, 26(101): 283-296.
- [3] MARRAKI M E, MODABISH A. Wiener index of planar maps[J]. Journal of Theoretical and Applied Information Technology, 2010, 18: 7-10.
- [4] CHE Z Y, COLLINS K L. An upper bound on Wiener indices of maximal planar graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2019, 258: 76-86.
- [5] GHOSH D, GYÓRI E, PAULO S A, et al. The maximum Wiener index of maximal planar graphs[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2020, 40(4): 1121-1135.
- [6] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory[M]. New York: Springer, 2008.
- [7] HOU A L, LI S C, SONG L Z, et al. Sharp bounds for Zagreb indices of maximal outerplanar graphs[J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2011, 22(2): 252-269.
- [8] AN X H, WU B Y D R. The Wiener index of the k th power of a graph[J]. Applied Mathematics Letters, 2008, 21(5): 436-440.
- [9] FABRICI I. Light graphs in families of outerplanar graphs[J]. Discrete Mathematics, 2007, 307: 866-872.

责任编辑: 赵新科