抛物型最优控制问题的全离散 Crank-Nicolson 有限元法*

张馨丹[1], 赵建平[1†], 侯延仁[1,2]

(1. 新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017; 2. 西安交通大学 数学与统计学院, 陕西 西安 710049)

摘 要: 针对具有积分控制约束的抛物型最优控制问题, 提出了一种基于 Crank-Nicolson 格式的全离散有限元法. 使用分段线性有限元对状态进行空间离散, 采用 Crank-Nicolson 格式进行时间离散, 对控制变量采用分段线性近似, 从而得到离散的最优性系统. 证明了状态变量、伴随状态变量和控制变量的误差估计, 并通过数值算例验证理论结果.

关键词: 抛物型最优控制问题; Crank-Nicolson 格式; 最优性系统

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2023.05.18.0001

中图分类号: O241.82 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2024)02-0196-010

引文格式: 张馨丹, 赵建平, 侯延仁. 抛物型最优控制问题的全离散 Crank-Nicolson 有限元法[J]. 新疆大学学报(自然科学版中英文), 2024, 41(2): 196-205+245.

英文引文格式: ZHANG Xindan, ZHAO Jianping, HOU Yanren. Fully discrete finite element method based on the Crank-Nicolson scheme for parabolic optimal control problem[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2024, 41(2): 196-205+245.

Fully Discrete Finite Element Method Based on the Crank-Nicolson Scheme for Parabolic Optimal Control Problem

ZHANG Xindan[1], ZHAO Jianping[1], HOU Yanren[1,2]

(*1. School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China;*
2. School of Mathematics and Statistics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an Shaanxi 710049, China)

Abstract: Aiming at parabolic optimal control problem with integral control constraints, a fully discrete finite element method based on Crank-Nicolson scheme is proposed. The state is discretized by piecewise linear finite elements for the space discretization, Crank-Nicolson scheme for time discretization, and the control variables are approximated by piecewise linear function approximation, so as to obtain a discrete optimal system. The error estimates of state variables, adjoint state variables and control variables are proved, and the theoretical results are verified by numerical examples.

Key words: parabolic optimal control problem; Crank-Nicolson scheme; optimality system

0 引 言

偏微分方程最优控制问题在实际工程领域有着广泛的应用[1], 例如, 大气污染控制、癌症治疗过程中的热处理、低温超导激光能量的爆破、数值天气预测中的资料同化、飞机机翼阻力优化、最优形状设计、石油开采过程优化、流体控制和混凝土大坝的最优温度控制等, 都涉及求解偏微分方程描述的最优控制问题.

目前对偏微分方程最优控制问题的数值求解思路主要有两种[2]: 第一种是先优化再离散, 即先利用 Lagrange

* 收稿日期: 2023-05-18
基金项目: 国家自然科学基金"沙丘长时间移动演变行为的动力学模型及其数值模拟研究"(61962056); 新疆维吾尔自治区自然科学基金"带界面的抛物型最优控制问题高效数值算法研究"(2022D01C409).
作者简介: 张馨丹(1996—), 女, 硕士生, 从事偏微分方程的数值解法研究, E-mail: sqzhxd@126.com.
† 通讯作者: 赵建平(1981—), 女, 博士, 教授, 从事偏微分方程的数值解法研究, E-mail: zhaojianping@126.com.

乘子方法推导出最优控制问题的最优性条件 (状态方程、伴随方程、变分不等式), 再利用数值方法进行离散, 使之变成有限维的数值计算问题; 第二种是先离散再优化, 即先利用数值方法对最优控制问题进行离散, 得到有限维的优化问题, 然后再利用优化算法进行求解. 不论选择哪种方法, 数值离散都是不可缺少的, 因此好的离散方法对于求出最优解是至关重要的.

对于具有积分约束的椭圆型最优控制问题已有大量研究[3−6], 但对具有积分约束的抛物型最优控制问题, 用 Crank-Nicolson 有限元方法进行数值求解的研究工作很少. Tang 等[7]研究了一类具有积分约束的抛物型方程的二次最优控制问题, 针对最优控制问题, 构造了一个全离散的有限元格式, 其中: 空间离散为有限元离散, 时间离散为向后 Euler 方法. Sun 等[8]研究了具有积分约束的抛物型最优控制问题的向后 Euler 格式的自适应有限元逼近. 王世杰等[9]考虑了带积分约束的抛物型最优控制问题, 对状态变量和伴随状态变量用线性连续函数离散, 而控制变量使用分片常数离散, 并得到最优的收敛阶. 本文主要讨论具有积分控制约束的抛物型最优控制问题的有限元方法. 对于状态变量的离散, 在空间上采用标准分段线性有限元, 在时间上采用 Crank-Nicolson 格式, 控制变量采用分段线性离散, 并得到控制变量、状态变量以及伴随状态变量关于时间和空间均为二阶收敛. 最后给出了数值算例, 验证理论结果.

1　预备知识

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ $(n{=}2)$ 凸区域, 且具有 Lipschitz 连续边界. Sobolev 空间定义如下:

$$W^{m,p}=\{u\in L^p(\Omega):\ D^\alpha u\in L^p(\Omega),\ \forall\,|\alpha|<m\}.$$

其中范数记作 $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$, 定义如下:

$$\|\,v\,\|_{m,p,\Omega}=\Big(\sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega|D^\alpha v|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}},\ \ p\in[1,\infty),$$

半范数记作 $|\cdot|_{m,p,\Omega}$, 定义如下:

$$|v|_{m,p,\Omega}=\Big(\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega|D^\alpha v|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}},\ \ p\in[1,\infty),$$

其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{N}_0^n$ 为多重指标, $|\alpha|=\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i$, D^α 表示阶数为 $|\alpha|$ 的微分算子. 特别的, 当 $p=2$ 时, 记 $H^m(\Omega)=W^{m,p}(\Omega)$ 且范数 $\|\,v\,\|_{m,\Omega}=\|\,v\,\|_{m,2,\Omega}$.

设 $L^r(0,T;W^{m,p}(\Omega))$ 为从 $[0,T]$ 到 $W^{m,p}(\Omega)$ 范数上所有 L^r 可积函数构成的 Banach 空间, 其范数定义如下:

$$\|\,v\,\|_{L^r(0,T;W^{m,p}(\Omega))}=\Big(\int_0^T\|\,v\,\|^r_{m,p,\Omega}\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{r}},\ \ r\in[1,\infty),$$

定义如下的内积形式:

$$\begin{aligned}a(u,v)&=\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x, &&\forall\,u,\ v\in H_0^1(\Omega),\\(u,v)&=\int_\Omega uv\,\mathrm{d}x, &&\forall\,u,\ v\in L^2(\Omega).\end{aligned}$$

2　模型描述及全离散格式

本节主要考虑以下抛物方程分布最优控制问题:

$$\min_{u\in U_{ad}}J(y,u)=\frac{1}{2}\,\|\,y-y_d\,\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}+\frac{\alpha}{2}\,\|\,u\,\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\tag{1}$$

满足状态方程约束

$$\begin{cases}y_t-\Delta y=f+Bu, & (x,t)\in\Omega_T\\ y=0, & (x,t)\in\Gamma_T\\ y(\cdot,0)=y_0, & x\in\Omega\end{cases}\tag{2}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ 凸多边形区域, $\Omega_T=\Omega\times(0,T]$, $\Gamma_T=\partial\Omega\times(0,T]$. 设 B 是 $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ 到 $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ 的有界线性算子, 积分型控制约束集 U_{ad} 如下表示:

$$U_{ad}=\{u\in L^2(0,T;L^2(\Omega)):\int_\Omega u\mathrm{d}x\geq 0\}.$$

最优控制问题 (1) $\sim$ (2) 可以如下表示:

$$\min_{u\in U_{ad}}\frac{1}{2}\parallel y-y_d\parallel^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}+\frac{\alpha}{2}\parallel u\parallel^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$$

$$\begin{cases}(y_t,w)+a(y,w)=(f+Bu,w), & \forall w\in H_0^1(\Omega)\\ y(\cdot,0)=y_0\end{cases}\tag{3}$$

由文献 [1] 可知, 最优控制问题 (3) 存在唯一解

$$(y,u)\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))\cap H^1(0,T;H^{-1}(\Omega))\times U_{ad}.$$

设 (y,u) 是最优控制问题 (3) 的解, 当且仅当存在伴随状态

$$p\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))\cap H^1(0,T;L^2(\Omega)),$$

使得 (y,p,u) 满足下面的最优性条件:

$$(y_t,w)+a(y,w)=(f+Bu,w),\quad \forall\, w\in H_0^1(\Omega),\ t\in(0,T],\ y(\cdot,0)=y_0\tag{4}$$

$$-(p_t,q)+a(p,q)=(y-y_d,q),\quad \forall\, q\in H_0^1(\Omega),\ t\in(0,T],\ p(\cdot,T)=0\tag{5}$$

$$(\alpha u+B^*p,v-u)\geq 0,\quad \forall\, v\in U_{ad},\ t\in(0,T]\tag{6}$$

其中 B^* 是 B 的伴随算子. 变分不等式 (6) 可表示为

$$u=\frac{1}{\alpha}\Big\{\max(0,\overline{B^*p})-B^*p\Big\}\tag{7}$$

其中 $\overline{B^*p}=(\int_\Omega B^*p\mathrm{d}x)/(\int_\Omega 1\mathrm{d}x)$ 代表 B^*p 在 Ω 上的积分平均.

下面考虑最优控制问题 (3) 的有限元方法. 设 $\mathcal{T}_h$ 表示 Ω 区域上的正规三角形剖分, 使得 $\bar\Omega=\cup_{K\in\mathcal{T}_h}\bar K$. 有限元空间 V_h 定义如下:

$$V_h=\{v\in C(\Omega)\ \big|\ v|_K\in\mathcal{P}_1(K),\ \forall K\in\mathcal{T}_h\},$$

其中 $\mathcal{P}_1(K)$ 是所有次不大于 1 的多项式函数空间. 设 $V_h^0=V_h\cap H_0^1(\Omega)$.

对于时间离散采用 Crank-Nicolson 格式. 设 $\Delta t=T/N$ 为均匀时间步长, 节点用 $t_n=n\Delta t$ $(0\leq n\leq N)$ 表示. 设 $v^i=v(x,t_i)$, $\mathrm{d}_tv^i=(v^i-v^{i-1})/\Delta t$ 和

$$|||v|||=\Big(\sum_{n=1}^N\Delta t\parallel\frac{v^n+v^{n-1}}{2}\parallel^2_{0,\Omega}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

定义 Ritz 投影 $R_h:H_0^1(\Omega)\to V_h^0$ 满足如下条件: 对任意 $u\in H_0^1(\Omega)$, 有

$$(\nabla R_hu,\nabla v_h)=(\nabla u,\nabla v_h),\quad \forall\, v_h\in V_h^0,$$

和 L^2 正交投影[4] $Q_h:U_{ad}\longrightarrow U_{ad,h}$ 满足如下条件: 对任意 $v\in U_{ad}$

$$(v-Q_hv,v_h)=0,\quad \forall\, v_h\in U_{ad,h},$$

接下来给出近似性质:

$$\parallel w-R_hw\parallel_{0,\Omega}\leq Ch^2\parallel w\parallel_{2,\Omega},$$

$$\| v-Q_h v \|_{-r,p,\Omega} \le Ch^{r+t} \| v \|_{t,p,\Omega}, \quad 0\le r,t\le 2.$$

对最优系统 (4) ~ (6) 建立如下的 Crank-Nicolson 有限元全离散格式:

$$\Big(\frac{Y_h^n-Y_h^{n-1}}{\Delta t},w_h\Big)+a\Big(\frac{Y_h^n+Y_h^{n-1}}{2},w_h\Big)=\Big(\frac{f^n+BU_h^n+f^{n-1}+BU_h^{n-1}}{2},w_h\Big), \\ Y_h^0(x)=R_h y_0, \quad \forall\, w_h\in V_h^0, n=1,2,\cdots,N \tag{8}$$

$$-\Big(\frac{P_h^n-P_h^{n-1}}{\Delta t},q_h\Big)+a\Big(\frac{P_h^n+P_h^{n-1}}{2},q_h\Big)=\Big(\frac{Y_h^n-y_d^n+Y_h^{n-1}-y_d^{n-1}}{2},q_h\Big), \\ P_h^N(x)=0, \quad \forall\, q_h\in V_h^0, n=N,N-1,\cdots,1 \tag{9}$$

$$\Big(\alpha\frac{U_h^n+U_h^{n-1}}{2}+B^*\frac{P_h^n+P_h^{n-1}}{2},v-\frac{U_h^n+U_h^{n-1}}{2}\Big)\ge 0, \quad \forall v\in U_{ad,h}, n=1,2,\cdots,N \tag{10}$$

其中 $U_{ad,h}=\{v\in U_{ad}\ \big|\ v|_K\ \in\mathcal{P}_1(K),\ \forall K\in\mathcal{T}_h\}$.

3　收敛性分析

为了得到主要结论, 引入如下的辅助变量, 对于任意 $v\in U_{ad}$, 设 $(y(v),p(v))$ 是下列方程的解:

$$\big(y_t(v),w\big)+a\big(y(v),w\big)=\big(f+Bv,w\big), \quad \forall\, w\in H_0^1(\Omega),\ t\in(0,T],\ y(v)(\cdot,0)=y_0 \tag{11}$$

$$-\big(p_t(v),q\big)+a\big(p(v),q\big)=\big(y(v)-y_d,q\big), \quad \forall\, q\in H_0^1(\Omega),\ t\in(0,T],\ p(v)(\cdot,T)=0 \tag{12}$$

对于任意 $v\in U_{ad}$, 设 $(y_h(v),p_h(v))$ 是下列方程的解:

$$\big(y_{ht}(v),w_h\big)+a\big(y_h(v),w_h\big)=\big(f+Bv,w_h\big), \quad \forall\, w_h\in V_h^0,\ t\in(0,T],\ y_h(v)(\cdot,0)=R_h y_0 \tag{13}$$

$$-\big(p_{ht}(v),q_h\big)+a\big(p_h(v),q_h\big)=\big(y_h(v)-y_d,q_h\big), \quad \forall\, q_h\in V_h^0,\ t\in(0,T],\ p_h(v)(\cdot,T)=0 \tag{14}$$

对于任意 $v\in U_{ad}$, 设 $(y_h^n(v),p_h^n(v))$ 满足下列方程组:

$$\Big(\frac{y_h^n(v)-y_h^{n-1}(v)}{\Delta t},w_h\Big)+a\Big(\frac{y_h^n(v)+y_h^{n-1}(v)}{2},w_h\Big)=\Big(\frac{f^n+Bv^n+f^{n-1}+Bv^{n-1}}{2},w_h\Big), \\ y_h^0(v)(x)=R_h y_0, \quad \forall\, w_h\in V_h^0,\ n=1,2,\cdots,N \tag{15}$$

$$\Big(\frac{p_h^{n-1}(v)-p_h^n(v)}{\Delta t},q_h\Big)+a\Big(\frac{p_h^n(v)+p_h^{n-1}(v)}{2},q_h\Big)=\Big(\frac{y_h^n(v)-y_d^n+y_h^{n-1}(v)-y_d^{n-1}}{2},q_h\Big), \\ p_h^N(v)=0, \quad \forall\, q_h\in V_h^0,\ n=N,N-1,\cdots,1 \tag{16}$$

定理 1 设 $y(u)$ 是方程 (11) 的解, $y_h(u)$ 是方程 (13) 的解, 则有如下不等式成立:

$$\| y(u)-y_h(u) \|_{0,\Omega}^2 \le Ch^4\big(\| y \|_{2,\Omega}^2+\int_0^T \| y_t(u) \|_{1,\Omega}^2\, \mathrm{d}t\big).$$

证明 由方程 (11) 和 (13), 可得如下方程

$$\big(y_t(u)-y_{ht}(u),w_h\big)+a\big(y(u)-y_h(u),w_h\big)=0.$$

利用 Ritz 投影的性质, 上述方程可以表示为

$$\big(y_t(u)-R_h y_t(u),w_h\big)+\big(R_h y_t(u)-y_{ht}(u),w_h\big)+a\big(R_h y(u)-y_h(u),w_h\big)=0 \tag{17}$$

设 $e=R_h y(u)-y_h(u)$, 在方程 (17) 中取 $w_h=R_h y(u)-y_h(u)$, 利用 Young 不等式和 Hölder 不等式, 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| e \|_{0,\Omega}^2+C_1 \| \nabla e \|_{0,\Omega}^2 \le \frac{C_1}{2} \| e \|_{1,\Omega}^2+C_2 \| y_t(u)-R_h y_t(u) \|_{-1,\Omega}^2 .$$

利用 R_h 的性质, 则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|e\|_{0,\Omega}^2+\frac{C_1}{2}\|\nabla e\|_{0,\Omega}^2\leq C_2h^4\|y_t(u)\|_{1,\Omega}^2+\frac{C_1}{2}\|e\|_{0,\Omega}^2 \tag{18}$$

对方程 (18) 在时间上积分, 并利用 Gronwall 引理得

$$\|e\|_{0,\Omega}^2+\int_0^t\|\nabla e\|_{0,\Omega}^2\,\mathrm{d}t\leq Ch^4\int_0^T\|y_t(u)\|_{1,\Omega}^2\,\mathrm{d}t \tag{19}$$

利用三角不等式和 R_h 的性质, 得

$$\begin{aligned}\|y(u)-y_h(u)\|_{0,\Omega}^2&\leq\|y(u)-R_hy(u)\|_{0,\Omega}^2+\|R_hy(u)-y_h(u)\|_{0,\Omega}^2\\&\leq Ch^4\|y(u)\|_{2,\Omega}^2+Ch^4\int_0^T\|y_t(u)\|_{1,\Omega}^2\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

定理 2 设 $y_h(u)$ 和 $y_h^n(u)$ 分别是方程 (13) 和 (15) 的解. 当 h 和 Δt 充分小时, 存在常数 C 使得

$$\|y_h(u)(t_n)-y_h^n(u)\|_{0,\Omega}^2\leq C(\Delta t)^4\int_0^T\|y_{httt}(u)\|_{0,\Omega}^2\,\mathrm{d}t \tag{20}$$

证明 在方程 (13) 中分别取 $t=t_n$ 和 $t=t_{n-1}$, 则得到如下的方程

$$\Big(\frac{y_{ht}(u)(t_n)+y_{ht}(u)(t_{n-1})}{2},w_h\Big)+a\Big(\frac{y_h(u)(t_n)+y_h(u)(t_{n-1})}{2},w_h\Big)=\Big(\frac{f^n+Bu^n+f^{n-1}+Bu^{n-1}}{2},w_h\Big) \tag{21}$$

将方程 (15) 和 (21) 相减, 得

$$\Big(\frac{y_{ht}(u)(t_n)+y_{ht}(u)(t_{n-1})}{2}-d_ty_h^n(u),w_h\Big)+a\Big(\frac{y_h(u)(t_n)+y_h(u)(t_{n-1})-y_h^{n-1}(u)-y_h^n(u)}{2},w_h\Big)=0 \tag{22}$$

设 $e_h^n=y_h(u)(t_n)-y_h^n(u)$, 在方程 (22) 中取 $w_h=\bar{e}_h^n=(e_h^n+e_h^{n-1})/2$, 得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\Delta t}\big(\|e_h^n\|_{0,\Omega}^2-\|e_h^{n-1}\|_{0,\Omega}^2\big)+a\big(\bar{e}_h^n,\bar{e}_h^n\big)\\&\leq C\Big\|d_ty_h(u)(t_n)-\frac{y_{ht}(u)(t_n)+y_{ht}(u)(t_{n-1})}{2}\Big\|_{0,\Omega}\big(\|e_h^n\|_{0,\Omega}+\|e_h^{n-1}\|_{0,\Omega}\big)\\&\leq C_1(\Delta t)^{-1}\Big\|\int_{t_{n-1}}^{t_n}|(t-t_{n-1})(t_n-t)y_{httt}(u)|\,\mathrm{d}t\Big\|_{0,\Omega}\big(\|e_h^n\|_{0,\Omega}+\|e_h^{n-1}\|_{0,\Omega}\big)\\&\leq C_2(\Delta t)^{\frac{3}{2}}\big(\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|y_{httt}(u)\|_{0,\Omega}^2\,\mathrm{d}t\big)^{\frac{1}{2}}\big(\|e_h^n\|_{0,\Omega}+\|e_h^{n-1}\|_{0,\Omega}\big)\\&\leq C(\delta)(\Delta t)^3\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|y_{httt}(u)\|_{0,\Omega}^2\,\mathrm{d}t+\delta\big(\|e_h^n\|_{0,\Omega}^2+\|e_h^{n-1}\|_{0,\Omega}^2\big).\end{aligned}$$

将上式方程整理得

$$\|e_h^n\|_{0,\Omega}^2-\|e_h^{n-1}\|_{0,\Omega}^2+C_1\Delta t\|\nabla\bar{e}_h^n\|_{0,\Omega}^2\leq C(\delta)(\Delta t)^4\int_{t_{n-1}}^{t_n}\|y_{httt}(u)\|_{0,\Omega}^2\,\mathrm{d}t+\delta\Delta t\big(\|e_h^n\|_{0,\Omega}^2+\|e_h^{n-1}\|_{0,\Omega}^2\big) \tag{23}$$

对方程 (23) 从 $n=1$ 到 k 求和, 则有

$$\|e_h^k\|_{0,\Omega}^2+C_1\Delta t\sum_{n=1}^k\|\nabla\bar{e}_h^n\|_{0,\Omega}^2\leq C(\delta)(\Delta t)^4\int_0^T\|y_{httt}(u)\|_{0,\Omega}^2\,\mathrm{d}t+2\delta\Delta t\sum_{n=1}^k\|e_h^n\|_{0,\Omega}^2 \tag{24}$$

利用离散 Gronwall 引理[10], 则有

$$\|e_h^k\|_{0,\Omega}^2+c_1\Delta t\sum_{n=1}^k\|\nabla\bar{e}_h^n\|_{0,\Omega}^2\leq C(\delta)(\Delta t)^4\int_0^T\|y_{httt}(u)\|_{0,\Omega}^2\,\mathrm{d}t \tag{25}$$

结合定理 1 和定理 2, 可以得到以下 $y^n(u)$ 和 $y_h^n(u)$ 的误差估计.

定理 3 设 $y(u)$ 和 y_h^n 分别是方程 (11) 和 (15) 的解, 当 h 和 Δt 充分小时, 存在常数 C 使得

$$\| y^n(u)-y_h^n(u)\|_{0,\Omega}^2\le C(\Delta t)^4\int_0^T \| y_{htttt}(u)\|_{0,\Omega}^2\,\mathrm{d}t+C_1h^4\big(\| y(u)\|_{2,\Omega}^2+\int_0^T \| y_t(u)\|_{1,\Omega}^2\,\mathrm{d}t\big) \tag{26}$$

定理 4 在定理 3 条件成立下, 设 $p(u)$, $p_h(u)$ 和 $p_h^n(u)$ 分别是方程 (12), (14) 和 (16) 的解, 则有

$$\| p^n(u)-p_h^n(u)\|_{0,\Omega}^2\le C(\Delta t)^4\big(\int_0^T \| p_{htttt}(u)\|_{0,\Omega}^2\,\mathrm{d}t+\Delta t\int_0^T \| y_{htttt}(u)\|_{0,\Omega}^2\,\mathrm{d}t\big)$$
$$+C_1h^4\big(\| y\|_{2,\Omega}^2+\int_0^T \| y_t(u)\|_{1,\Omega}^2\,\mathrm{d}t+\| p(u)\|_{2,\Omega}^2+\int_0^T \| p_t(u)\|_{1,\Omega}^2\,\mathrm{d}t\big).$$

证明 与定理 1 和定理 2 的证明类似.

定理 5 设 $(y_h^n(u),p_h^n(u))$ 和 (Y_h^n,P_h^n) 分别是方程 (15) $\sim$ (16) 和 (8) $\sim$ (9) 的解, 则

$$\| y_h^n(u)-Y_h^n\|_{1,\Omega}\le C|||u-U_h|||,$$

$$\| p_h^n(u)-P_h^n\|_{1,\Omega}\le C|||u-U_h|||.$$

证明 将方程 (8) 减去 (15) 可得

$$\big(d_t(Y_h^i-y_h^i(u)),w_h\big)+a\Big(\frac{Y_h^i-y_h^i(u)+Y_h^{i-1}-y_h^{i-1}(u)}{2},w_h\Big)=\Big(B\frac{U_h^i-u^i+U_h^{i-1}-u^{i-1}}{2},w_h\Big) \tag{27}$$

设 $\eta^i=Y_h^i-y_h^i(u)$, 在方程 (27) 中取 $w_h=(\eta^i-\eta^{i-1})/\Delta t$, 则有

$$\big(d_t\eta^i,d_t\eta^i\big)+a\Big(\frac{\eta^i+\eta^{i-1}}{2},\frac{\eta^i-\eta^{i-1}}{\Delta t}\Big)=\Big(B\big(\frac{U_h^i-u^i+U_h^{i-1}-u^{i-1}}{2}\big),\frac{\eta^i-\eta^{i-1}}{\Delta t}\Big),$$

即

$$\big(d_t\eta^i,d_t\eta^i\big)+\frac{1}{2\Delta t}\big[a(\eta^i,\eta^i)-a(\eta^{i-1},\eta^{i-1})\big]=\Big(B\big(\frac{U_h^i-u^i+U_h^{i-1}-u^{i-1}}{2}\big),d_t\eta^i\Big).$$

利用算子 B 的有界性以及 Young 不等式, 则有

$$\Big(B\big(\frac{U_h^i-u^i+U_h^{i-1}-u^{i-1}}{2}\big),d_t\eta^i\Big)\le C(\delta)\Big\|\frac{U_h^i-u^i+U_h^{i-1}-u^{i-1}}{2}\Big\|_{0,\Omega}^2+\delta\| d_t\eta^i\|_{0,\Omega}^2 \tag{28}$$

对方程 (28) 从 $i=1$ 到 n 求和, 从而得到

$$\|\eta^n\|_{1,\Omega}^2\le C\sum_{i=1}^N\Delta t\Big\|\frac{U_h^i-u^i+U_h^{i-1}-u^{i-1}}{2}\Big\|_{0,\Omega}^2=C|||u-U_h|||^2.$$

设 $\epsilon^i=P_h^i-p_h^i(u)$, 类似的

$$a(\epsilon^{i-1},\epsilon^{i-1})\le a(\epsilon^i,\epsilon^i)+C\triangle t\Big\|\frac{Y_h^i-y_h^i(u)+Y_h^{i-1}-y_h^{i-1}(u)}{2}\Big\|_{0,\Omega}^2.$$

将上式从 $i=n+1$ 到 N 求和, 得到

$$a(\epsilon^n,\epsilon^n)\le C\sum_{i=1}^N\triangle t\Big\|\frac{Y_h^i-y_h^i(u)+Y_h^{i-1}-y_h^{i-1}(u)}{2}\Big\|_{0,\Omega}^2,$$

即

$$\| P_h^n-p_h^n(u)\|_{1,\Omega}\le C|||u-u_h|||.$$

定理 6 设 (y,p,u) 和 (Y_h,P_h,U_h) 分别是方程 (4) $\sim$ (6) 和 (8) $\sim$ (10) 的解, 那么

$$|||u-U_h|||\le C(h^2+\Delta t^2).$$

证明 利用方程 (6) 和 (10), 则有

$$
\begin{aligned}
\alpha|||u-U_h|||^2 &= \sum_{i=1}^{N}\alpha\Delta t\Big(\frac{u^i+u^{i-1}}{2}-\frac{U_h^i+U_h^{i-1}}{2},\frac{u^i+u^{i-1}}{2}-\frac{U_h^i+U_h^{i-1}}{2}\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\Delta t\Big(\alpha\frac{u^i+u^{i-1}}{2}+B^*(\frac{p^i+p^{i-1}}{2}),\frac{u^i+u^{i-1}}{2}-\frac{U_h^i+U_h^{i-1}}{2}\Big)\\
&\quad -\sum_{i=1}^{N}\Delta t\Big(\alpha\frac{U_h^i+U_h^{i-1}}{2}+B^*(\frac{P_h^i+P_h^{i-1}}{2}),\frac{Q_hu^i+Q_hu^{i-1}}{2}-\frac{U_h^i+U_h^{i-1}}{2}\Big)\\
&\quad -\sum_{i=1}^{N}\Delta t\Big(\alpha\frac{U_h^i+U_h^{i-1}}{2}+B^*(\frac{P_h^i+P_h^{i-1}}{2}),\frac{u^i+u^{i-1}}{2}-\frac{Q_hu^i+Q_hu^{i-1}}{2}\Big)\\
&\quad +\sum_{i=1}^{N}\Delta t\Big(B^*(\frac{P_h^i+P_h^{i-1}}{2}-\frac{p^i+p^{i-1}}{2}),\frac{u^i+u^{i-1}}{2}-\frac{U_h^i+U_h^{i-1}}{2}\Big)\\
&\le \sum_{i=1}^{N}\Delta t\Big(B^*(\frac{P_h^i+P_h^{i-1}}{2}-\frac{p^i+p^{i-1}}{2}),\frac{u^i+u^{i-1}}{2}-\frac{U_h^i+U_h^{i-1}}{2}\Big)\\
&\quad -\sum_{i=1}^{N}\Delta t\Big(\alpha\frac{U_h^i+U_h^{i-1}}{2}+B^*(\frac{P_h^i+P_h^{i-1}}{2}),\frac{u^i+u^{i-1}}{2}-\frac{Q_hu^i+Q_hu^{i-1}}{2}\Big)\\
&= T_1+T_2.
\end{aligned}
$$

对于 T_1 的估计, 设 $p_h^i(u)$ 是方程 (16) 的解. 将 T_1 分为 T_{11} 和 T_{12} 两部分, 则有

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \sum_{i=1}^{N}\Delta t\Big(\frac{P_h^i+P_h^{i-1}}{2}-\frac{p^i+p^{i-1}}{2},B(\frac{u^i-U_h^i+u^{i-1}-U_h^{i-1}}{2})\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\Delta t\Big(\frac{p_h^i(u)+p_h^{i-1}(u)}{2}-\frac{p^i+p^{i-1}}{2},B(\frac{u^i-U_h^i+u^{i-1}-U_h^{i-1}}{2})\Big)\\
&\quad +\sum_{i=1}^{N}\Delta t\Big(\frac{P_h^i+P_h^{i-1}}{2}-\frac{p_h^i(u)+p_h^{i-1}(u)}{2},B(\frac{u^i-U_h^i+u^{i-1}-U_h^{i-1}}{2})\Big)\\
&= T_{11}+T_{12}.
\end{aligned}
$$

对于 T_{11}, 利用 Cauchy-Schwarz 不等式和定理 4 可以推导出

$$
\begin{aligned}
T_{11} &= \sum_{i=1}^{N}\Delta t\Big(\frac{p_h^i(u)+p_h^{i-1}(u)}{2}-\frac{p^i+p^{i-1}}{2},B(\frac{u^i-U_h^i+u^{i-1}-U_h^{i-1}}{2})\Big)\\
&\le C\sum_{i=1}^{N}\Delta t\,\|p_h^i(u)-p^i\|_{0,\Omega}\Big\|\frac{u^i-U_h^i+u^{i-1}-U_h^{i-1}}{2}\Big\|_{0,\Omega}\\
&\quad +C\sum_{i=1}^{N}\Delta t\,\|p_h^{i-1}(u)-p^{i-1}\|_{0,\Omega}\Big\|\frac{u^i-U_h^i+u^{i-1}-U_h^{i-1}}{2}\Big\|_{0,\Omega}\\
&\le C\Big(\sum_{i=1}^{N}\Delta t\,\|p_h^i(u)-p^i\|_{0,\Omega}^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{N}\Delta t\Big\|\frac{u^i-U_h^i+u^{i-1}-U_h^{i-1}}{2}\Big\|_{0,\Omega}^2\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\quad +C\Big(\sum_{i=1}^{N}\Delta t\,\|p_h^{i-1}(u)-p^{i-1}\|_{0,\Omega}^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{N}\Delta t\Big\|\frac{u^i-U_h^i+u^{i-1}-U_h^{i-1}}{2}\Big\|_{0,\Omega}^2\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\le C(h^2+\Delta t^2)|||u-U_h|||.
\end{aligned}
$$

设 $\gamma^i=(P_h^i+P_h^{i-1})/2-(p_h^i(u)+p_h^{i-1}(u))/2$ 和 $\delta^i=(y_h^i(u)+y_h^{i-1}(u))/2-(Y_h^i+Y_h^{i-1})/2$, 则有

$$
\begin{aligned}
T_{12} &= \sum_{i=1}^{N}\Delta t\Big(\frac{P_h^i+P_h^{i-1}}{2}-\frac{p_h^i(u)+p_h^{i-1}(u)}{2}, B\big(\frac{u^i-U_h^i+u^{i-1}-U_h^{i-1}}{2}\big)\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\Delta t\big(d_t(y_h^i(u)-Y_h^i),\gamma^i\big)+\sum_{i=1}^{N}\Delta t a\big(\gamma^i,\delta^i\big)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\Delta t\big(d_t(y_h^i(u)-Y_h^i),\gamma^i\big)+\sum_{i=1}^{N}\Delta t\big(d_t(P_h^i-p_h^i(u)),\delta^i\big)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{N}\Delta t\Big(\frac{Y_h^i+Y_h^{i-1}}{2}-\frac{y_h^i(u)+y_h^{i-1}(u)}{2},\delta^i\Big)\\
&= R_1+R_2+R_3.
\end{aligned}
$$

对于 R_1 和 R_2, 注意到 $P_h^N-p_h^N(u)=0$ 和 $Y_h^0-y_h^0(u)=0$, 因此

$$
\begin{aligned}
R_1+R_2 &= \sum_{i=1}^{N}\Delta t\big(d_t(y_h^i(u)-Y_h^i),\gamma^i\big)+\sum_{i=1}^{N}\Delta t\big(d_t(P_h^i-p_h^i(u)),\delta^i\big)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\big(y_h^i(u)-Y_h^i, P_h^i-p_h^i(u)\big)-\sum_{i=1}^{N}\big(y_h^{i-1}(u)-Y_h^{i-1}, P_h^{i-1}-p_h^{i-1}(u)\big)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

注意到 $R_3\le 0$, 因此 $T_{12}\le 0$.
即

$$
T_1\le C(\Delta t^2+h^2)|||u-U_h|||.
$$

将 T_2 分解为 J_1,J_2 和 J_3, 表达式如下

$$
\begin{aligned}
T_2 &= -\sum_{i=1}^{N}\Delta t\Big(\alpha\frac{U_h^i+U_h^{i-1}}{2}+B^*\big(\frac{P_h^i+P_h^{i-1}}{2}\big),\frac{u^i+u^{i-1}}{2}-\frac{Q_hu^i+Q_hu^{i-1}}{2}\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\Delta t\Big(\alpha\frac{u^i-U_h^i}{2}+\frac{u^{i-1}-U_h^{i-1}}{2},\frac{u^i+u^{i-1}}{2}-\frac{Q_hu^i+Q_hu^{i-1}}{2}\Big)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{N}\Delta t\Big(B^*\big(\frac{p^i+p^{i-1}-P_h^i-P_h^{i-1}}{2}\big),\frac{u^i+u^{i-1}}{2}-\frac{Q_hu^i+Q_hu^{i-1}}{2}\Big)\\
&\quad-\sum_{i=1}^{N}\Delta t\Big(\alpha\frac{u^i+u^{i-1}}{2}+B^*\big(\frac{p^i+p^{i-1}}{2}\big),\frac{u^i+u^{i-1}}{2}-\frac{Q_hu^i+Q_hu^{i-1}}{2}\Big)\\
&= J_1+J_2+J_3.
\end{aligned}
$$

对于 J_1, 利用 Cauchy-Schwarz 不等式可以推导出

$$
\begin{aligned}
J_1 &\le C|||u-U_h|||\Big[\big(\sum_{i=1}^{N}\Delta t\,\|u^i-Q_hu^i\|_{0,\Omega}^2\big)^{\frac12}+\big(\sum_{i=1}^{N}\Delta t\,\|u^{i-1}-Q_hu^{i-1}\|_{0,\Omega}^2\big)^{\frac12}\Big]\\
&\le Ch^2|||u-U_h|||\,\|u\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}.
\end{aligned}
$$

对于 J_3 估计如下

$$
\begin{aligned}
J_3 &= -\sum_{i=1}^{N}\Delta t\Big(\alpha\frac{u^i+u^{i-1}}{2}+B^*\big(\frac{p^i+p^{i-1}}{2}\big),\frac{u^i+u^{i-1}}{2}-\frac{Q_hu^i+Q_hu^{i-1}}{2}\Big)\\
&\le Ch^4\big(\|u\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}+\|p\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}\big)\|u\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}.
\end{aligned}
$$

对于 J_2, 利用 Cauchy-Schwarz 不等式和定理 4 可以推导出

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \sum_{i=1}^{N}\Delta t\Big(\frac{P_h^i+P_h^{i-1}}{2}-\frac{p^i+p^{i-1}}{2},B\big(\frac{u^i+u^{i-1}}{2}-\frac{Q_hu^i+Q_hu^{i-1}}{2}\big)\Big)\\
&= \sum_{i=1}^{N}\Delta t\Big(\frac{P_h^i+P_h^{i-1}}{2}-\frac{p_h^i(u)+p_h^{i-1}(u)}{2},B\big(\frac{u^i+u^{i-1}}{2}-\frac{Q_hu^i+Q_hu^{i-1}}{2}\big)\Big)\\
&\quad +\sum_{i=1}^{N}\Delta t\Big(\frac{p_h^i(u)+p_h^{i-1}(u)}{2}-\frac{p^i+p^{i-1}}{2},B\big(\frac{u^i+u^{i-1}}{2}-\frac{Q_hu^i+Q_hu^{i-1}}{2}\big)\Big)\\
&\le Ch^2(h^2+\Delta t^2)\parallel u\parallel_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}+Ch^2|||u-U_h|||\parallel u\parallel_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}.
\end{aligned}
$$

综上所述结论成立.

结合定理 3, 定理 4, 定理 5 和定理 6 得到以下误差估计.

定理 7 设 (y,p,u) 和 (Y_h,P_h,U_h) 分别是方程 (4) ∼ (6) 和 (8) ∼ (10) 的解, 那么

$$
\parallel y^n-Y_h^n\parallel_{0,\Omega}+\parallel p^n-P_h^n\parallel_{0,\Omega}\le C(h^2+\Delta t^2),\quad 0\le n\le N \tag{29}
$$

证明 设 $p_h^n(u)$ 和 $y_h^n(u)$ 是满足方程 (16) 和 (15) 的解. 利用三角不等式, 则有

$$
\parallel y^n-Y_h^n\parallel_{0,\Omega}\le\parallel y^n-y_h^n(u)\parallel_{0,\Omega}+\parallel y_h^n(u)-Y_h^n\parallel_{0,\Omega},
$$

$$
\parallel p^n-P_h^n\parallel_{0,\Omega}\le\parallel p^n-p_h^n(u)\parallel_{0,\Omega}+\parallel p_h^n(u)-P_h^n\parallel_{0,\Omega}.
$$

利用定理 5, 则有

$$
\begin{aligned}
&\parallel y^n-Y_h^n\parallel_{0,\Omega}\le\parallel y^n-y_h^n(u)\parallel_{0,\Omega}+C|||u-U_h|||,\\
&\parallel p^n-P_h^n\parallel_{0,\Omega}\le\parallel p^n-p_h^n(u)\parallel_{0,\Omega}+C|||u-U_h|||.
\end{aligned}
$$

因此, 由定理 3, 定理 4 和定理 6 得到误差估计 (29).

4 数值算例

根据上一节理论证明, 我们有全离散格式的误差为 $O(\Delta t^2+h^2)$. 本节中, 将给出几个数值算例来验证理论结果.

算例 1 设 $\Omega=(0,1)\times(0,1)$, $T=1$, $\alpha=1$. 最优控制问题数据如下:

$$
\begin{aligned}
&f(x,t)=\exp(t)\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)+8\pi^2\exp(t)\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)-\max\{0,\overline{p(x,t)}\}+(T-t)\sin(2\pi x)\sin(2\pi y),\\
&y_d(x,t)=(\exp(t)-1)\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)-8(1-t)\pi^2\sin(2\pi x)\sin(2\pi y).
\end{aligned}
$$

最优解:

$$
\begin{aligned}
&y(x,t)=\exp(t)\sin(2\pi x)\sin(2\pi y),\\
&u(x,t)=\max\{0,\overline{p(x,t)}\}-(T-t)\sin(2\pi x)\sin(2\pi y),\\
&p(x,t)=(T-t)\sin(2\pi x)\sin(2\pi y).
\end{aligned}
$$

表 1 给出最优控制变量 u, 状态变量 y 和伴随状态变量 p 的误差以及收敛阶. 由表 1 可知, 控制变量、状态变量和伴随状态变量的收敛阶是二阶. 在图 1 中, 左图绘制了 $t=0.5$ 时 U_h 的图形, 右图绘制了 $\Delta t=1/64$、$h=1/64$ 和 $t=0.5$ 时 u 的图形.

算例 2 设 $\Omega=(0,1)\times(0,1)$, $T=1$, $\alpha=1$. 最优控制问题数据如下:

$$
\begin{aligned}
&f(x,t)=\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)+8\pi^2t\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)-\max\{0,\overline{p(x,y)}\}+(T-t)\sin(2\pi x)\sin(2\pi y),\\
&y_d(x,t)=t\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)-\sin(2\pi x)\sin(2\pi y)-8(1-t)\pi^2\sin(2\pi x)\sin(2\pi y).
\end{aligned}
$$

最优解:

$$
\begin{aligned}
&y(x,t)=t\sin(2\pi x)\sin(2\pi y),\\
&u(x,t)=\max\{0,\overline{p(x,y)}\}-(T-t)\sin(2\pi x)\sin(2\pi y),\\
&p(x,t)=(T-t)\sin(2\pi x)\sin(2\pi y).
\end{aligned}
$$

表 2 给出最优控制变量 u, 状态变量 y 和伴随状态变量 p 的误差以及收敛阶. 由表 2 可知, 控制变量、状态变量和伴随状态变量的收敛阶是二阶.

表 1　算例 1 在 $\Delta t=h$ 时控制变量、状态变量和伴随状态变量的误差和收敛阶

N	控制变量		状态变量		伴随状态变量	
	$\lvert\lvert\lvert u-U_h\rvert\rvert\rvert$	收敛阶	$\lVert y-Y_h\rVert_{0,\Omega}$	收敛阶	$\lVert p-P_h\rVert_{0,\Omega}$	收敛阶
4	$1.583\,0\times10^{-1}$	\	$6.734\,3\times10^{-1}$	\	$2.582\,0\times10^{-1}$	\
8	$5.001\,7\times10^{-2}$	1.662 2	$2.227\,6\times10^{-1}$	1.596 1	$8.323\,3\times10^{-2}$	1.633 3
16	$1.337\,9\times10^{-2}$	1.902 5	$6.008\,9\times10^{-2}$	1.890 3	$2.232\,5\times10^{-2}$	1.898 5
32	$3.404\,2\times10^{-3}$	1.974 6	$1.529\,0\times10^{-2}$	1.974 5	$5.682\,0\times10^{-3}$	1.974 2
64	$8.548\,5\times10^{-4}$	1.993 6	$3.839\,5\times10^{-3}$	1.993 6	$1.426\,9\times10^{-3}$	1.993 5

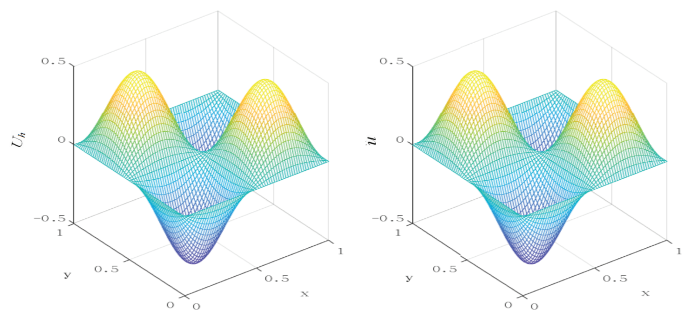

图 1　当 $t=0.5$ 时, U_h (左)和 u (右)的图像

表 2　算例 2 在 $\Delta t=h$ 时控制变量、状态变量和伴随状态变量的误差和收敛阶

N	控制变量		状态变量		伴随状态变量	
	$\lvert\lvert\lvert u-U_h\rvert\rvert\rvert$	收敛阶	$\lVert y-Y_h\rVert_{0,\Omega}$	收敛阶	$\lVert p-P_h\rVert_{0,\Omega}$	收敛阶
4	$1.554\,8\times10^{-1}$	\	$2.593\,0\times10^{-1}$	\	$2.580\,7\times10^{-1}$	\
8	$4.887\,2\times10^{-2}$	1.669 6	$8.271\,0\times10^{-2}$	1.648 4	$8.263\,2\times10^{-2}$	1.643 0
16	$1.304\,4\times10^{-2}$	1.905 7	$2.210\,4\times10^{-2}$	1.903 7	$2.211\,1\times10^{-2}$	1.902 0
32	$3.316\,8\times10^{-3}$	1.975 5	$5.623\,4\times10^{-3}$	1.974 8	$5.625\,1\times10^{-3}$	1.974 8
64	$8.327\,5\times10^{-4}$	1.993 8	$1.412\,1\times10^{-3}$	1.993 6	$1.412\,5\times10^{-3}$	1.993 6

5　结 论

本文通过有限元离散, 研究了具有积分控制约束的抛物型最优控制问题. 对状态方程采用标准分段线性有限元法进行空间离散, 时间离散采用 Crank-Nicolson 格式. 控制变量采用分段线性离散. 证明状态变量、伴随状态变量和控制变量的误差估计关于时间和空间均为二阶收敛, 并给出数值算例验证了理论结果.

参考文献:

[1] 龚伟，刘会坡，严宁宁．最优控制问题的有限元高精度分析及其应用[J]．中国科学：数学，2015，45(7)：953-974.
GONG W，LIU H P，YAN N N．High accuracy analysis of fifinite element methods for optimal control problems and its application[J]．Scientia Sinica(Mathematica)，2015，45(7)：953-974．(in Chinese)

(下转第 245 页)