

扭积芬斯勒流形的某些曲率性质*

冯娅璐, 张晓玲[†]

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

摘要: 基于共形平坦定义和已知结论, 利用偏微分方程理论完全刻画了扭积芬斯勒度量分别是 Berwald 度量或局部闵可夫斯基度量的等价条件, 并构造了两类非黎曼且共形于局部闵可夫斯基扭积芬斯勒度量的新的芬斯勒度量的例子.

关键词: 扭积芬斯勒度量; Berwald 度量; 局部闵可夫斯基度量; 共形平坦

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2022.03.09.0003

中图分类号: O186.14 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2023)01-0043-06

引文格式: 冯娅璐, 张晓玲. 扭积芬斯勒流形的某些曲率性质[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2023, 40(1): 43-48.

英文引文格式: FENG Yalu, ZHANG Xiaoling. Curvature properties on Finsler warped product manifolds[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2023, 40(1): 43-48.

Curvature Properties on Finsler Warped Product Manifolds

FENG Yalu, ZHANG Xiaoling

(School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China)

Abstract: Based on the definition of conformal flatness and known conclusions, we completely characterize two equivalent conditions that Finsler warped product metrics are Berwald metrics or locally Minkowskian metrics by using theories of PDEs. Furthermore, we construct examples of two new Finsler metrics that are non-Riemannian and conformal to the locally Minkowskian Finsler warped product metrics.

Key words: Finsler warped product metric; Berwald metric; locally Minkowskian metric; conformally flat

0 引言

芬斯勒度量是没有二次型限制的黎曼度量^[1]. Weyl 定理^[2]指出, 芬斯勒空间的射影性质和共形性质唯一地决定了这个度量的性质. 因此共形性质的研究吸引了许多学者的关注. 在黎曼几何中, 黎曼流形具有常截面曲率当且仅当它是射影平坦的, 此时也是共形平坦的. 遗憾的是, 这些结论在芬斯勒几何中不再成立. 因此芬斯勒度量的共形平坦性质的刻画尤为重要. 为了研究芬斯勒几何的共形平坦性, 学者们做了许多工作. 文献 [3] 对共形平坦的弱爱因斯坦多项式 (α, β) -度量进行分类, 且证明了不存在非平凡的具有迷向 S 曲率的共形平坦 (α, β) -度量; 文献 [4] 研究了具有几乎消失 Ξ -曲率的共形平坦的多项式 (α, β) -度量; 文献 [5] 刻画了具有常旗曲率的共形平坦 (α, β) -度量, 得到其必为局部闵可夫斯基度量或者黎曼度量. 但非平凡的共形平坦性的结果甚少, 因此关于芬斯勒度量的共形平坦性的刻画有待我们进一步研究. 本文中我们主要研究了扭积芬斯勒度量的共形平坦性.

考虑 n 维乘积流形 $M := I \times \check{M}$, 其中 I 是 \mathbb{R} 的一个开区间, \check{M} 是一个具有黎曼度量 $\check{\alpha}$ 的 $n-1$ 维流形. $TM := \bigcup_{u \in M} T_u M$ 是 M 上的切丛, 其中 $T_u M$ 是 $u \in M$ 处的切空间, $v \in T_u M$ 是非零切向量, $\check{u} \in \check{M}$, \check{v} 为 $T_u \check{M}$ 上的非零切向量. 在 TM 上定义非负函数:

$$F(u, v) = \check{\alpha}(\check{u}, \check{v}) \phi \left(u^1, \frac{v^1}{\check{\alpha}(\check{u}, \check{v})} \right),$$

* 收稿日期: 2022-03-09

基金项目: 国家自然科学基金“Finsler流形上旗曲率和共形变换的研究”(11961061), “黎曼-芬斯勒几何中若干问题的研究”(11461064).

作者简介: 冯娅璐(1996-), 女, 硕士生, 从事微分几何的研究, E-mail: 2215604852@qq.com.

[†] 通讯作者: 张晓玲(1978-), 女, 副教授, 从事微分几何的研究, E-mail: xlzhang@ymail.com.

其中 $u = (u^1, \check{u}), v = v^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \check{v}$, $\phi(r, s)$ 是 \mathbb{R}^2 上的一个正函数, $r = u^1$ 和 $s = \frac{v^1}{\check{\alpha}(\check{u}, \check{v})}$, 则称 F 为流形 M 上的扭积芬斯勒度量.

扭积度量最初是由文献 [6] 在研究具有负曲率的黎曼流形时而提出的. 后来文献 [7] 和文献 [8] 将扭积度量推广到芬斯勒几何的范畴, 并称这种度量为扭积芬斯勒度量. 近年来, 扭积芬斯勒流形得到了许多学者的关注并取得了一定的研究进展. 文献 [9] 得到了所有的 Douglas 型扭积芬斯勒度量, 并构造一些新例子; 文献 [10] 研究了具有数量(常)旗曲率的扭积芬斯勒度量, 并刻画了爱因斯坦扭积芬斯勒度量. 最近, 文献 [11] 刻画了具有相对迷向 Landsberg 曲率的扭积芬斯勒度量; 文献 [12] 刻画了具有弱迷向 S 曲率的扭积芬斯勒度量.

若芬斯勒度量 \bar{F} 共形于一个局部闵可夫斯基度量, 则称这个度量是共形平坦的, 即在某个坐标系下, 存在 M 上的数量函数 $\rho(u)$, 使得 $\bar{F} = e^{\rho(u)} F$ 成立, 其中 F 是局部闵可夫斯基度量. 而局部闵可夫斯基度量的刻画和 Berwald 度量相关. 因而在本文中, 我们先研究了 Berwald 型扭积芬斯勒度量; 其次利用 Berwald 度量的结果, 刻画了局部闵可夫斯基的扭积芬斯勒度量; 最后, 构造了两类非黎曼且共形于局部闵可夫斯基扭积芬斯勒度量的新的芬斯勒度量的例子. 结论如下:

定理 1 设 $F = \check{\alpha}\phi(r, s)$, $r = u^1$, $s = \frac{v^1}{\check{\alpha}}$ 是 $n(\geq 3)$ 维流形 M 上的一个扭积芬斯勒度量. 那么 F 是 Berwald 度量的充要条件是 ϕ 满足下列情况之一:

- 1) $\phi = k(s)$, 其中 k 是满足 $k(s) > 0$, $k(s) - sk'(s) > 0$ 和 $k''(s) > 0$ 的可微函数;
- 2) $\phi = h(|s|g(r))$, 其中 $g(r)(\neq const)$ 是任意可微正函数, 且 h 是满足 $h(t) - th'(t) > 0$ 和 $h''(t) > 0$ 的可微正函数;
- 3) $\phi = f(r)\sqrt{g(r)s^2 + 1}$, 其中 $f(r)(\neq const)$ 和 $g(r)$ 是可微正函数. 这时 F 是黎曼度量.

注 $n(\geq 3)$ 维流形 M 上的扭积芬斯勒度量 $F = \check{\alpha}\phi(r, s)$, $r = u^1$, $s = \frac{v^1}{\check{\alpha}}$ 是黎曼度量当且仅当 $\omega_s - s\omega_s = 0$, 其中 $\omega = \phi^2$.

定理 2 设 $F = \check{\alpha}\phi(r, s)$, $r = u^1$, $s = \frac{v^1}{\check{\alpha}}$ 是 $n(\geq 3)$ 维流形 M 上的一个非黎曼扭积芬斯勒度量. 那么 F 是局部闵可夫斯基度量当且仅当 $\check{R}^i_j = 0$ 且下列情况之一成立:

- 1) $\phi = k(s)$, 其中 k 是满足 $k(s) - sk'(s) > 0$, $k''(s) > 0$ 和 $[k(s)^2]_s - s[k(s)^2]_{ss} \neq 0$ 的可微正函数;
- 2) $\phi = h(|s|g(r))$, 其中 $g(r)(\neq const)$ 是可微正函数, h 是满足 $h(t) - th'(t) > 0$, $h''(t) > 0$ 和 $[h(t)^2]_s - t[h(t)^2]_{ss} \neq 0$ 的可微正函数.

注 定理 2 中的黎曼度量 $\check{\alpha}$ 为欧氏度量, 记为 $|\check{v}|$.

1 预备知识

设 M 是一个 n 维光滑流形. $F: TM \rightarrow [0, \infty)$ 是其切丛 TM 上的非负函数. 如果 F 满足如下条件:

- 1) F 是带孔切丛 $TM \setminus \{0\}$ 上的 C^∞ 函数;
 - 2) 对于任意 $x \in M$, $F_x := F|_{T_x M}$ 是 $T_x M$ 上的一个闵可夫斯基范数,
- 则称 F 是流形 M 上的芬斯勒结构或芬斯勒度量.

在本文中指标规定如下:

$$1 \leq A, B, C \cdots \leq n, 2 \leq i, j, k \cdots \leq n.$$

设 F 是定义在 n 维流形 M 上的芬斯勒度量. F 的测地系数为

$$G^A := \frac{1}{4} g^{AC} [(F^2)_{u^D v^C} v^D - (F^2)_{u^C}] = \frac{1}{2} \Gamma_{BC}^A v^B v^C,$$

其中 $g^{AC} := \frac{1}{2} (F^2)_{v^A v^C}$, $(g^{AC}) := (g^{AC})^{-1}$ 和 $\Gamma_{BC}^A := \frac{1}{2} g^{AD} \left(\frac{\delta g^{DB}}{\delta u^C} - \frac{\delta g^{BC}}{\delta u^D} + \frac{\delta g^{AD}}{\delta u^C} \right)$.

F 的 Berwald 曲率 $B := B_{CDE}^A \frac{\partial}{\partial u^A} \otimes du^C \otimes du^D \otimes du^E$ 定义为

$$B_{CDE}^A := \frac{\partial^3 G^A}{\partial v^C \partial v^D \partial v^E}.$$

若 $B_{CDE}^A = 0$, 则称 F 为 Berwald 度量.

F 的黎曼曲率为

$$R_v := R_C^A du^C \otimes \frac{\partial}{\partial u^A},$$

其中

$$R_C^A := 2 \frac{\partial G^A}{\partial u^C} - v^D \frac{\partial^2 G^A}{\partial v^C \partial v^D} + 2G^D \frac{\partial^2 G^A}{\partial v^C \partial v^D} - \frac{\partial G^A}{\partial v^D} \frac{\partial G^D}{\partial v^C}.$$

引理 1^[1] 设 (M, F) 是一个芬斯勒流形, 且 R_{BCD}^A 和 P_{BCD}^A 分别是陈联络的 hh -曲率和 hv -曲率. 那么下面三种情况等价:

- (i) (M, F) 是局部闵可夫斯基度量;
- (ii) $R_{BCD}^A = 0$ 和 $P_{BCD}^A = 0$;
- (iii) $R_{AC} := l^B R_{BACD} l^D = 0$ 和 $P_{BACD} = 0$, 其中 $l^B := \frac{v^B}{F}$.

注 $R_{BCD}^A = 0$ 当且仅当 $R_C^A = 0$. $P_{BCD}^A = 0$ 当且仅当 $\Gamma_{BC}^A = \Gamma_{BC}^A(u)$, 即 F 为 Berwald 度量.

2 主要定理的证明

下面我们将完成定理 1 的证明. 首先, 我们需要下面的引理.

引理 2^[9] 一个扭积芬斯勒度量 $F = \check{\alpha}\phi(r, s)$, $r = u^1$, $s = \frac{v^1}{\alpha}$ 是 Berwald 度量的充要条件是

$$\begin{cases} \Phi = a(r)s^2 + b(r) \\ \Psi = c(r)s \end{cases} \quad (1)$$

其中 $a(r)$, $b(r)$ 和 $c(r)$ 是任意可微函数, 且

$$\begin{aligned} \Phi &:= \frac{s\phi_s(\phi - s\phi_s)_r - \phi(\phi - s\phi_s)_r + s^2\phi_r\phi_{ss}}{2\phi\phi_{ss}}, \\ \Psi &:= \frac{s\phi_r\phi_{ss} + \phi_s(\phi - s\phi_s)_r}{2\phi\phi_{ss}}. \end{aligned}$$

注 显然, $\Phi = a(r)s^2 + b(r)$ 和 $\Psi = c(r)s$ 分别是方程 $\Phi_s - s\Phi_{ss} = 0$ 和 $\Psi - s\Psi_s = 0$ 的解.

命题 1^[9] 扭积芬斯勒度量 $F = \check{\alpha}\phi(r, s)$, $r = u^1$, $s = \frac{v^1}{\alpha}$ 是正定的当且仅当正函数 ϕ 满足

$$\phi - s\phi_s > 0, \quad \phi_{ss} > 0.$$

根据上面的引理 2, 我们将证明定理 1.

定理 1 的证明 经过简单的计算, 可知充分性是显然成立的. 下面将进行必要性的证明.

由于 $\Phi - s\Psi = -\frac{(\phi - s\phi_s)_r}{2\phi_{ss}}$, 因此方程组 (1) 等价于

$$(\phi - s\phi_s)_r = 2\{[c(r) - a(r)]s^2 - b(r)\}\phi_{ss} \quad (2)$$

和

$$s\phi_r + 2\{[c(r) - a(r)]s^2 - b(r)\}\phi_s = 2c(r)s\phi \quad (3)$$

对 (3) 关于 s 求导再结合 (2), 我们得到

$$\phi_r + [c(r) - 2a(r)]s\phi_s = c(r)\phi \quad (4)$$

由 (3) 与 (4), 我们得到

$$[c(r)s^2 - 2b(r)]\phi_s = c(r)s\phi \quad (5)$$

因此, 方程组 (1) 等价于

$$\phi_r + [c(r) - 2a(r)]s\phi_s = c(r)\phi \quad (6)$$

和

$$[c(r)s^2 - 2b(r)]\phi_s = c(r)s\phi \quad (7)$$

下面我们分三种情形进行讨论:

情形 1 $b(r)$ 和 $c(r)$ 只有一个为 0. 由 (7) 知, ϕ 满足 $\phi - s\phi_s = 0$ 或 $\phi_s = 0$. 根据命题 1, 由 ϕ 定义的芬斯勒度量不符合正定性条件. 因此, 我们舍去这种情形.

情形 2 $b(r) = c(r) = 0$. 这时, (7) 恒成立, (6) 为

$$\phi_r - 2a(r)s\phi_s = 0.$$

若 $a(r) = 0$, 则存在可微函数 k , 使得 $\phi = k(s)$. 若 $a(r) \neq 0$, 上式的特征方程为 $\frac{dr}{1} = \frac{ds}{-2a(r)s}$, 求得首次积分为 $|s|e^{2\int a(r)dr} = \xi$. 因此解为

$$\phi = h(|s|e^{2\int a(r)dr}),$$

其中 h 是任意可微函数.

由命题 1 和 ϕ 定义的芬斯勒度量满足的正定性条件知: h 是满足 $h(t) - th'(t) > 0$, $h''(t) > 0$ 的可微正函数.

情形 3 $b(r) \neq 0$, $c(r) \neq 0$. (7) 的解为

$$\phi = p(r)\sqrt{|c(r)s^2 - 2b(r)|} \quad (8)$$

其中 $p(r)$ 是任意可微正函数. 进一步, 我们把这个解代入 (6), 化简得

$$-2a(r)p(r)c(r)s^2 + \frac{1}{2}p(r)[c'(r)s^2 - 2b'(r)] + p'(r)[c(r)s^2 - 2b(r)] = -2b(r)c(r)p(r).$$

根据 s^0 和 s^2 的系数分别相等, 我们有

$$p(r)b'(r) + 2p'(r)b(r) = 2b(r)c(r)p(r) \quad (9)$$

和

$$p(r)c'(r) + 2p'(r)c(r) = 4a(r)c(r)p(r) \quad (10)$$

由 (9), 我们计算得到 $p(r) = a_0 \frac{1}{\sqrt{|b(r)|}} e^{\int c(r)dr}$, 其中 a_0 是任意正常数. 进一步, 把 (9) 代入 (10) 中, 我们得到 $a(r) = \frac{1}{4} \left(2c(r) + \frac{c'(r)}{c(r)} - \frac{b'(r)}{b(r)} \right)$.

下面分析芬斯勒度量的正定性条件. 经过计算, 若 $c(r)s^2 - 2b(r) > 0$, 则

$$\begin{aligned} \phi - s\phi_s &= -2b(r)p(r)[c(r)s^2 - 2b(r)]^{-\frac{1}{2}}, \\ \phi_{ss} &= -2b(r)c(r)p(r)[c(r)s^2 - 2b(r)]^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

因此 F 是芬斯勒度量当且仅当 $b(r) < 0$, $c(r) > 0$. 同样的, 若 $c(r)s^2 - 2b(r) < 0$, 则 $b(r) > 0$, $c(r) < 0$.

综上, 方程的解 (8) 可化简为 $\phi = f(r)\sqrt{g(r)s^2 + 1}$, 其中 $f(r) (\neq const)$ 和 $g(r)$ 是可微正函数. 证毕.

注 基于定理 1, 我们知引理 2 中的函数 $a(r)$, $b(r)$ 和 $c(r)$ 与 $f(r)$, $g(r)$ 有如下关系:

- (i) 当 $\phi = k(s)$ 时, $a(r) = 0$, $b(r) = 0$ 和 $c(r) = 0$;
- (ii) 当 $\phi = h(|s|g(r))$ 时, $a(r) = \frac{1}{2} \frac{g'(r)}{g(r)}$, $b(r) = 0$ 和 $c(r) = 0$;
- (iii) 当 $\phi = f(r)\sqrt{g(r)s^2 + 1}$ 时, $a(r) = \frac{f'(r)}{2f(r)} + \frac{g'(r)}{4g(r)}$, $b(r) = -\frac{f'(r)}{2f(r)g(r)}$ 和 $c(r) = \frac{f'(r)}{f(r)}$.

下面我们将给出定理 2 的证明. 首先, 我们需要下面的引理.

引理 3^[8] 一个扭积芬斯勒度量 $F = \check{\alpha}\phi(r, s)$, $r = u^1$, $s = \frac{v^1}{\check{\alpha}}$ 的黎曼曲率为

$$\begin{aligned} R_1^1 &= \lambda\check{\alpha}^2, & R_j^1 &= -s\lambda\check{\alpha}^2\check{l}_j, \\ R_1^i &= \tau\check{\alpha}^2\check{l}^i, & R_j^i &= \check{R}_j^i + \check{\alpha}^2(\mu\delta_j^i - \nu\check{l}^i\check{l}_j), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \lambda &:= (2\Phi_r - s\Phi_{sr}) + (2\Phi\Phi_{ss} - \Phi_s^2) + 2(\Phi_s - s\Phi_{ss})\Psi - (2\Phi - s\Phi_s)\Psi_s, \\ \mu &:= \Psi^2 - 2s\Psi\Psi_s - s\Psi_r + 2\Phi\Psi_s, \\ \nu &:= s(\Psi_r - s\Psi_{sr}) + (\Psi - s\Psi_s)^2 - 2s^2\Psi\Psi_{ss} + 2s\Phi\Psi_{ss} + (2\Phi - s\Phi_s)\Psi_s, \\ \tau &:= (\nu - \mu)/s. \end{aligned}$$

根据定理 1 和引理 3, 我们将完成定理 2 的证明.

定理 2 的证明 根据引理 1, 我们知 F 是局部闵可夫斯基度量当且仅当它是 Berwald 度量且 $R_B^A = 0$. 根据定理 1 和引理 3, 非黎曼扭积芬斯勒度量 F 是局部闵可夫斯基度量的充要条件是 $\lambda = \tau = 0, \check{R}_j^i = \check{\alpha}^2 (\nu \check{l}^i \check{l}_j - \mu \delta_j^i)$, 且下列情况之一成立:

- 1) $\phi = k(s)$;
- 2) $\phi = h(|s|g(r))$.

当 $\phi = k(s)$ 或 $\phi = h(|s|g(r))$ 时, λ, τ, μ 和 ν 均消失, 且 $\check{R}_j^i = 0$. 证毕.

接下来, 我们构造了两类非黎曼且共形于局部闵可夫斯基扭积芬斯勒度量的特殊芬斯勒度量.

例 1 设可微函数

$$h(t) = \exp\left(-\sum_{i=1}^p t^{\frac{1}{2i}}\right),$$

其中 p 是正整数. 则它满足

$$h(t) - th'(t) = h(t) \left(1 + \sum_{i=1}^p \frac{1}{2i} t^{\frac{1}{2i}}\right) > 0, h'' = h(t) \left[\left(\sum_{i=1}^p \frac{1}{2i} t^{\frac{1}{2i}-1}\right)^2 + \sum_{i=1}^p \left(1 - \frac{1}{2i}\right) \frac{1}{2i} t^{\frac{1}{2i}-2}\right] > 0.$$

令 $\phi(r, s) = h(|s|g(r))$, 其中 $g(r) (\neq const)$ 是任意可微正函数. 则根据定理 2, 我们有局部闵可夫斯基扭积芬斯勒度量

$$F = \check{\alpha}\phi(r, s) = |\check{\nu}| \exp\left\{-\sum_{i=1}^p [|s|g(r)]^{\frac{1}{2i}}\right\},$$

且它不是黎曼度量, 即

$$\begin{aligned} (\phi^2)_s - s(\phi^2)_{ss} &= 2g(r) \{h'(t)[h(t) - th'(t)] - th''(t)\} \\ &= 2g(r)h(t) \left\{\left(-\sum_{i=1}^p \frac{1}{2i} t^{\frac{1}{2i}-1}\right) [h(t) - th'(t)] - th''(t)\right\} < 0. \end{aligned}$$

此时我们有共形平坦的非黎曼芬斯勒度量

$$\bar{F} = e^{\rho(u)} F = e^{\rho(u)} |\check{\nu}| \exp\left\{-\sum_{i=1}^p [|s|g(r)]^{\frac{1}{2i}}\right\}.$$

例 2 设可微函数

$$g(t) = \sum_{j=0}^p t^{-2j},$$

其中 p 是正整数. 则它满足

$$g(t) - tg'(t) = \sum_{j=0}^p (2j+1)t^{-2j} > 0, g''(t) = \sum_{j=0}^p 2j(2j+1)t^{-(2j+2)} > 0.$$

令 $\phi(r, s) = h(|s|g(r))$, 其中 $g(r) (\neq const)$ 是任意可微正函数. 则根据定理 2, 我们有局部闵可夫斯基扭积芬斯勒度量

$$F = \check{\alpha}\phi(r, s) = |\check{\nu}| \sum_{j=0}^p [|s|g(r)]^{-2j},$$

且它不是黎曼度量, 即

$$(\phi^2)_s - s(\phi^2)_{ss} = 2g(r) \left\{-\sum_{j=0}^p 2jt^{-2j-1} [h(t) - th'(t)] - th''(t)\right\} < 0.$$

这时我们有共形平坦的非黎曼芬斯勒度量

$$\bar{F} = e^{\rho(u)} F = e^{\rho(u)} |\check{\nu}| \sum_{j=0}^p [|s|g(r)]^{-2j}.$$

3 结论

共形几何已经有很长的发展历史,且在物理领域扮演了一个重要的角色.在芬斯勒几何中,Weyl定理表明:一个芬斯勒度量的射影性质和共形性质唯一地决定了这个度量的几何性质.因此芬斯勒度量的共形性质吸引了很多研究者的关注.本文刻画了扭积芬斯勒流形的共形平坦性,因局部闵可夫斯基度量的刻画和Berwald度量相关,所以我们先研究了Berwald型扭积芬斯勒度量;其次利用Berwald度量的结果,刻画了局部闵可夫斯基的扭积芬斯勒度量;最后,构造了两类新的非黎曼且共形平坦的芬斯勒度量.

参考文献:

- [1] BAO D, CHERN S S, SHEN Z M. An introduction to Riemann-Finsler geometry[M]. New York: Springer, 2000.
- [2] RUND H. The differential geometry of Finsler spaces[M]. Berlin: Springer, 1959.
- [3] CHEN G Z, CHENG X Y. An important class of conformally flat weak Einstein Finsler metrics[J]. International Journal of Mathematics, 2013, 24(1): 1350003.
- [4] YUAN M G, CHENG X Y. On conformally flat (α, β) -metrics with special curvature properties[J]. Acta Mathematica Sinica(English Series), 2015, 31(5): 879-892.
- [5] CHEN G Z, HE Q, SHEN Z M. On conformally flat (α, β) -metrics with constant flag curvature[J]. Publicationes Mathematicae Debrecen, 2015, 86(3/4): 387-400.
- [6] BISHOP R L, O'NEILL B. Manifolds of negative curvature[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1969, 145: 1-49.
- [7] KOZMA L, PETER R, VARGA C. Warped product of Finsler manifolds[J]. Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae, 2001, 44: 157-170.
- [8] CHEN B, SHEN Z M, ZHAO L L. Constructions of Einstein Finsler metrics by warped product[J]. International Journal of Mathematics, 2018, 29(11): 86-100.
- [9] LIU H F, MO X H. Finsler warped product metrics of Douglas type[J]. Canadian Mathematical Bulletin, 2019, 62(1): 119-130.
- [10] LIU H F, MO X H, ZHANG H Z. Finsler warped product metrics with special Riemannian curvature properties[J]. Science China Mathematics, 2020, 63(7): 1391-1408.
- [11] YANG Z, ZHANG X L. Finsler warped product metrics with relatively isotropic Landsberg curvature[J]. Canadian Mathematical Bulletin, 2021, 64(1): 182-191.
- [12] 徐晓慧, 张晓玲. 具有弱迷向 S 曲率的卷积芬斯勒度量[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2021, 38(6): 681-684+698.

责任编辑: 赵新科