

# 双圈图补图的距离谱半径\*

李远菁, 李丹<sup>†</sup>, 刘康

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

**摘要:** 设图  $G$  是一个简单连通图, 点  $v_i$  和  $v_j$  之间最短路径的长度称为点  $v_i$  和  $v_j$  在图  $G$  中的距离, 记作  $d_G(v_i, v_j)$ . 图  $G$  的距离矩阵为  $D(G) = (d_G(v_i, v_j))_{n \times n}$ . 距离矩阵  $D(G)$  特征值的模的最大值称为图  $G$  的距离谱半径. 在  $n$  阶双圈图补图中刻画了距离谱半径最大的极图.

**关键词:** 双圈图; 补图; 距离谱半径

**DOI:** 10.13568/j.cnki.651094.651316.2022.05.19.0003

**中图分类号:** O157.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2023)02-0184-07

**引文格式:** 李远菁, 李丹, 刘康. 双圈图补图的距离谱半径[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2023, 40(2): 184-190+221.

**英文引文格式:** LI Yuanjing, LI Dan, LIU Kang. The distance spectral radius of the complements of bicyclic graphs[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2023, 40(2): 184-190+221.

## The Distance Spectral Radius of the Complements of Bicyclic Graphs

LI Yuanjing, LI Dan, LIU Kang

(School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China)

**Abstract:** Let  $G$  be a simple connected graph. The distance between vertices  $v_i$  and  $v_j$  in the graph  $G$ , denoted by  $d_G(v_i, v_j)$ , is the length of the shortest path from  $v_i$  to  $v_j$ , and  $D(G) = (d_G(v_i, v_j))_{n \times n}$  is the distance matrix of  $G$ . The distance spectral radius of  $G$  is defined as the maximum module of eigenvalues of distance matrix  $D(G)$ . We characterize the extremal graph among the complements of bicyclic graphs with  $n$ -order which maximizes the distance spectral radius.

**Key words:** bicyclic graphs; complements of graphs; distance spectral radius

### 0 引言

设  $G = (V(G), E(G))$  是一个简单连通图, 其中  $V(G)$  是图  $G$  的顶点集,  $E(G)$  是图  $G$  的边集. 图  $G$  的顶点数定义为  $n = |V(G)|$ , 边数定义为  $m = |E(G)|$ . 图  $G$  的补图为  $G^c = (V(G^c), E(G^c))$ , 其中  $V(G^c) = V(G)$ ,  $E(G^c) = \{v_i v_j | v_i v_j \notin E(G), \forall v_i, v_j \in V(G)\}$ . 设  $v_i, v_j \in V(G)$ , 若  $v_i v_j \in E(G)$ , 则  $v_i, v_j$  在图  $G$  中相邻, 记作  $v_i \sim v_j$ ; 否则  $v_i, v_j$  在图  $G$  中不相邻, 记作  $v_i \not\sim v_j$ . 图  $G$  中与点  $v$  相邻的顶点集称为点  $v$  在图  $G$  中的邻集, 记作  $N_G(v)$ .  $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$  称为点  $v$  在图  $G$  中的闭邻集.  $d_G(v) = |N_G(v)|$  称为点  $v$  在图  $G$  中的度. 点  $v_i$  和  $v_j$  之间最短路径的长度称为点  $v_i$  和点  $v_j$  在图  $G$  中的距离, 记作  $d_G(v_i, v_j)$ . 图  $G$  中任意两点之间距离的最大值称为图  $G$  的直径, 记作  $\text{diam}(G)$ . 图  $G$  的邻接矩阵为  $A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$ , 其中当  $v_i \sim v_j$  时,  $a_{ij} = 1$ , 否则  $a_{ij} = 0$ . 图  $G$  的距离矩阵为  $D(G) = (d_G(v_i, v_j))_{n \times n}$ . 图  $G$  的距离特征多项式为  $P_G(\lambda) = |\lambda I_n - D(G)|$ . 距离矩阵  $D(G)$  的特征值集合称为图  $G$  的距离谱, 记  $\lambda_1(D(G)) \geq \lambda_2(D(G)) \geq \dots \geq \lambda_n(D(G))$  是图  $G$  的距离谱的一个排序. 矩

\* 收稿日期: 2022-05-19

基金项目: 国家自然科学基金“关于图的距离矩阵的相关特征值的研究”(11901498).

作者简介: 李远菁(1997-), 女, 硕士生, 从事图谱理论的研究.

<sup>†</sup> 通讯作者: 李丹(1988-), 女, 博士, 副教授, 主要从事图谱理论的研究, E-mail: ldxjedu@163.com.

阵  $M$  特征值的模的最大值称为矩阵  $M$  的谱半径. 显然, 图  $G$  的距离矩阵  $D(G)$  是非负不可约的,  $D(G)$  的最大特征值就是图  $G$  的距离谱半径, 记作  $\rho(G)$ .

若连通图  $G$  的边数与点数有如下关系:  $m = n + 1$ , 则称图  $G$  是一个双圈图. 本文用  $\mathbb{B}_n$  表示  $n$  阶双圈图的集合.  $C_n, P_n, K_{1,n-1}$  和  $T_{p,q}$  ( $p+q = n-2$ ) 分别表示  $n$  阶的圈、路、星和双星. 设  $h, l, k$  是任意非负整数且  $h \geq k \geq 3$ ,  $C_h$  和  $C_k$  分别是包含点  $u$  和点  $v$  的两个点不相交的圈,  $P_{l+1}$  是  $u, v$  之间的一条路, 图  $D_{h,l,k}$  是由圈  $C_h, C_k$  和路  $P_{l+1}$  组成的图. 设  $P, P'$  是顶点  $u, v$  之间的两条不同的路, 若  $V(P \cap P') = \{u, v\}$ , 则称  $P, P'$  是连接  $u, v$  的两条内部点不相交的路. 设  $h', l', k'$  是任意正整数, 图  $\theta_{h',l',k'}$  是由连接  $u, v$  的三条内部点不相交的路  $P_{h'+1} = uu_1 \cdots u_{h'-1}v, P_{l'+1} = uu'_1 \cdots u'_{l'-1}v$  和  $P_{k'+1} = uu''_1 \cdots u''_{k'-1}v$  组成的图. 本文用  $\mathbb{D}_n$  表示将图  $D_{h,l,k}$  的点上粘上一些悬挂树的  $n$  阶图集合,  $\Theta_n$  是将图  $\theta_{h',l',k'}$  的点上粘上一些悬挂树的  $n$  阶图集合. 显然,  $\mathbb{B}_n = \mathbb{D}_n \cup \Theta_n$ . 设  $p, q$  是任意正整数, 图  $\theta_{2,1,2}u(p,q)$  是在图  $\theta_{2,1,2}$  的  $u$  点上粘接双星树  $T_{p-1,q}$  得到的图, 且  $d_{T_{p-1,q}}(u) = p, d_{T_{p-1,q}}(u') = q + 1$ . 图  $\theta_{2,1,2}uv(p,q)$  是在图  $\theta_{2,1,2}$  的  $u$  点上粘接星  $K_{1,p}$ , 且在  $v$  点上粘接星  $K_{1,q}$  得到的图, 且  $d_{K_{1,p}}(u) = p, d_{K_{1,q}}(v) = q$ . 设  $n \geq 6$  是任意正整数, 图  $\theta_{3,1,2}u(n-5)$  是在图  $\theta_{3,1,2}$  的  $u$  点上粘接星  $K_{1,n-5}$  得到的图, 且  $d_{K_{1,n-5}}(u) = n - 5$ .

近年来, 对于图的距离谱研究受到了广泛关注. Indulal<sup>[1]</sup> 给出了距离谱半径的一些下界, 并刻画出发达到这些界的极图; Ilic<sup>[2]</sup> 证明了一种使距离谱半径减小的图变换, 并在给定匹配数的  $n$  阶树中刻画了距离谱半径达到最小的极图; 在有  $r$  个悬挂点的  $n$  阶连通图中, Bose 等<sup>[3]</sup> 刻画了距离谱半径的极小图; Lin 等<sup>[4]</sup> 刻画了最小距离特征值为  $-2$  的所有连通图, 并给出了只有三个不同距离特征值且距离谱半径不是整数的所有直径为 2 的连通图; 在有完美匹配的单圈图中, Zhang<sup>[5]</sup> 确定了距离谱半径分别达到最大和最小的极图; Li<sup>[6]</sup> 刻画出了最小距离特征值在区间  $[-(1+\sqrt{17})/2, \alpha - 1) \cup [\alpha - 1, -1 - \sqrt{2})$  的所有连通图, 其中  $\alpha$  是  $x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$  的最小根, 并证明了最小距离特征值大于等于  $-(1+\sqrt{17})/2$  的连通图是由它们的距离谱确定的.

相对图的距离谱研究, 图的补图的距离谱研究很少. 在  $n$  阶树的补图中, Lin 等<sup>[7]</sup> 刻画了距离谱半径分别达到最大和最小的极图, 并且刻画了最小距离特征值分别达到最大和最小的极图; Qin 等<sup>[8]</sup> 在  $n$  阶单圈图的补图中刻画了距离谱半径达到最大的极图, 且给出了直径为 3 的单圈图的补图的最小距离特征值达到最大的极图.

本文主要研究  $n$  阶双圈图的补图的距离矩阵, 在  $\mathbb{B}_n$  中不考虑图  $D_{3,0,3}, D_{3,0,3}u(n-5), \theta_{2,1,2}, \theta_{2,2,2}$  和  $\theta_{2,1,2}u(n-4)$ . 设  $G$  是一个  $n$  阶连通图且  $G^c$  连通, 若  $\text{diam}(G) \geq 4$ , 则  $D(G^c) = J_n - I_n + A(G)$ , 否则  $D(G^c) \geq J_n - I_n + A(G)$ . 令  $S = \{G \mid G \in \mathbb{B}_n, n \geq 7, \text{diam}(G) = 3 \text{ 且 } D(G^c) > J_n - I_n + A(G)\}$ , 则  $S$  中共有 21 类图, 见图 1.

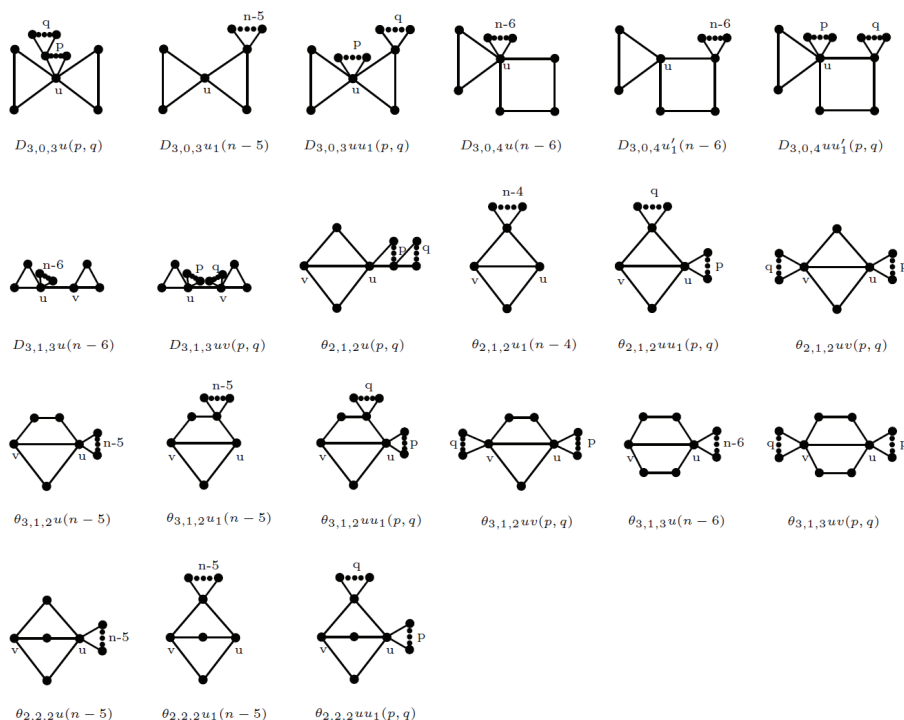


图 1  $S$  中的 21 类图

### 1 预备知识

引理 1<sup>[9]</sup> 若  $M$  是  $n$  阶非负不可约矩阵且  $n \geq 2$ , 那么以下命题成立:

- (1) 矩阵  $M$  的谱半径  $\rho(M) \geq 0$  且  $\rho(M)$  是矩阵  $M$  的单根;
- (2) 矩阵  $M$  有属于特征值  $\rho(M)$  的正特征向量;
- (3) 矩阵  $M$  的所有非负特征向量都属于特征值  $\rho(M)$ .

引理 2<sup>[10]</sup> 设  $M = (m_{ij})$  是一个  $n$  阶非负矩阵,  $\rho(M)$  是矩阵  $M$  的谱半径,  $R_i(M)$  表示矩阵  $M$  第  $i$  行的行和. 则

$$\min\{R_i(M) | 1 \leq i \leq n\} \leq \rho(M) \leq \max\{R_i(M) | 1 \leq i \leq n\}.$$

如果  $M$  是不可约矩阵, 那么等号成立当且仅当  $R_1(M) = R_2(M) = \dots = R_n(M)$ .

在本节中, 将给出两种图变换来帮助完成本文.

引理 3<sup>[8]</sup> (图变换 1) 设图  $G$  是一个连通图,  $uv$  是图  $G$  的一条非悬挂割边. 设图  $G_1$  是通过收缩图  $G$  的边  $uv$  为一点  $u$  并使点  $u$  与点  $v$  连接成悬挂边得到的图, 如图 2 所示, 则  $\rho(G_1^c) > \rho(G^c)$ .

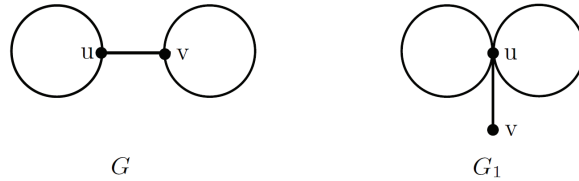


图 2 图  $G$  和图  $G_1$

引理 4 (图变换 2) 设图  $G \in \mathbb{B}_n \setminus S$  且  $n \geq 7$ , 点  $u', v'$  是图  $G$  圈上的两点. 设  $X$  是属于  $\rho(G^c)$  的 Perron 向量. 设  $S_1 = \{v_i | i = 1, 2, \dots, s\} \subset N_G(v') \setminus N_G[u']$ . 若  $S_1 \neq \emptyset$ , 构造图  $G_1 = G - \sum_{1 \leq i \leq s} v'v_i + \sum_{1 \leq i \leq s} u'v_i$ . 若图  $G_1^c$  是连通的且  $x_{u'} \geq x_{v'}$ , 则  $\rho(G_1^c) > \rho(G^c)$ .

证明 注意到图  $G_1$  仍然是双圈图以及  $D(G^c) = J_n - I_n + A(G)$ . 若图  $G_1^c$  连通, 则  $D(G_1^c) \geq J_n - I_n + A(G_1)$ . 对任意  $z \in S_1$ , 有

$$\begin{aligned} \rho(G_1^c) - \rho(G^c) &\geq X^T D(G_1^c) X - X^T D(G^c) X \\ &\geq X^T A(G_1) X - X^T A(G) X \\ &= 2(x_{u'} - x_{v'}) \sum_{z \in S_1} x_z \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

若  $\rho(G_1^c) = \rho(G^c)$ , 则  $X$  也是属于  $\rho(G_1^c)$  的 Perron 向量. 由点  $u'$  的特征等式可得

$$\begin{aligned} 0 &= \rho(G_1^c)x_{u'} - \rho(G^c)x_{u'} \\ &= ((D(G_1^c) - D(G^c))X)_{u'} \\ &\geq ((A(G_1) - A(G))X)_{u'} \\ &= \sum_{z \in S_1} x_z \\ &> 0, \end{aligned}$$

产生矛盾. 因此, 当  $x_{u'} \geq x_{v'}$  时,  $\rho(G_1^c) > \rho(G^c)$ .

### 2 主要结果

引理 5 设图  $G \in \mathbb{D}_n \setminus (\mathbb{D}_n \cap S)$ ,  $X$  是属于  $\rho(G^c)$  的 Perron 向量. 对于任意的正整数  $n \geq 7$ , 必然存在  $G' \in \Theta_n$ , 若图  $G'^c$  是连通图, 则  $\rho(G'^c) > \rho(G^c)$ .

**证明** 设  $C_h, C_k$  是图  $G$  中分别包含点  $u, v$  的两个点不相交的圈,  $P_{l+1}$  是连接  $u, v$  的路. 设  $u' \in V(C_h), v' \in V(C_k)$  且  $u' \neq u, v' \neq v, u'' \in N_{C_h}(u') \setminus \{u\}$  和  $v'' \in N_{C_k}(v') \setminus \{v\}$ . 若  $x_{u'} \geq x_{v'}$ , 则将  $C_k$  上的边  $v'v''$  去掉, 并添加新边  $u'v''$ , 可得新图  $G_1 \in \Theta_n$ . 由引理 4 可知  $\rho(G_1^c) > \rho(G^c)$ . 若  $x_{u'} < x_{v'}$ , 则将  $C_h$  上的边  $u'u''$  去掉, 并添加新边  $v'u''$ , 可得新图  $G_2 \in \Theta_n$ . 由引理 4 可知  $\rho(G_2^c) > \rho(G^c)$ . 因此, 必然存在图  $G' \in \Theta_n$ , 使得  $\rho(G'^c) > \rho(G^c)$ .

**引理 6** 设图  $G \in \Theta_n \setminus (\Theta_n \cap S)$ . 对于任意的正整数  $n \geq 7$ , 必然存在图  $G'' \in S$ , 使得  $\rho(G''^c) > \rho(G^c)$ .

**证明** 设图  $G$  中连接  $u, v$  的三条内部点不相交的路为  $P_{h+1} = uu_1 \cdots u_{h-1}v, P_{k+1} = uu'_1 \cdots u'_{k-1}v$  和  $P_{l+1} = uu''_1 \cdots u''_{l-1}v$ . 不失一般性, 假设  $h \geq k \geq l \geq 1, k \geq 2$ .

**情形 1**  $h = k = 2, l = 1$ . (1) 假设  $\{u, v, u_1, u'_1\}$  中只有一个点粘有悬挂树  $T$ . 若  $u \in V(T)$  或  $v \in V(T)$ . 不妨设  $u \in V(T)$ , 因为图  $G \in \Theta_n \setminus (\Theta_n \cap S)$ , 所以  $T$  不是星和双星. 对  $T$  的非悬挂割边反复进行图变换 1, 最终可得图  $\theta_{2,1,2}u(p, q) \in S$ . 由引理 3 可知  $\rho(\theta_{2,1,2}^c u(p, q)) > \rho(G^c)$ . 若  $u_1 \in V(T)$  或  $u'_1 \in V(T)$ . 不妨设  $u_1 \in V(T)$ , 因为图  $G \in \Theta_n \setminus (\Theta_n \cap S)$ , 所以  $T$  非星. 对  $T$  的非悬挂割边反复进行图变换 1, 最终可得图  $\theta_{2,1,2}u_1(n-4) \in S$ . 由引理 3 可知  $\rho(\theta_{2,1,2}^c u_1(n-4)) > \rho(G^c)$ . (2) 假设  $\{u, v, u_1, u'_1\}$  中至少有两个点粘有悬挂树. 若图  $G$  中存在非星悬挂树, 则对悬挂树的非悬挂割边反复进行图变换 1, 可将悬挂树变换成星, 得到的新图记为  $G_1$ . 由引理 3 可知  $\rho(G_1^c) > \rho(G^c)$ . 若图  $G_1 \in S$ , 则结论成立. 否则, 若图  $G_1$  上的点  $u, v$  都粘有悬挂星, 通过比较点  $u, v$  对应于  $\rho(G_1^c)$  的 Perron 向量中分量的大小, 运用图变换 2, 将分量较小的点连接的悬挂边去掉并使分量较大的点与这些悬挂点相邻, 记此时的图为  $G_2$ . 由引理 4 可知  $\rho(G_2^c) > \rho(G_1^c)$ . 若图  $G_2 \in S$ , 则结论成立. 否则, 图  $G_2$  上的点  $u, u'_1$  都粘有悬挂星, 通过比较点  $u, u'_1$  对应于  $\rho(G_2^c)$  的 Perron 向量中分量的大小, 运用图变换 2, 可得图  $\theta_{2,1,2}uu_1(p, q) \in S$  或图  $\theta_{2,1,2}u_1u'_1(p, q) \notin S$ . 由引理 4 可知  $\rho(\theta_{2,1,2}^c uu_1(p, q)) > \rho(G_2^c)$  和  $\rho(\theta_{2,1,2}^c u_1u'_1(p, q)) > \rho(G_2^c)$ . 对图  $\theta_{2,1,2}u_1u'_1(p, q)$  上的点  $u_1, u'_1$  运用图变换 2, 通过比较点  $u_1, u'_1$  对应于  $\rho(\theta_{2,1,2}^c u_1u'_1(p, q))$  的 Perron 向量中分量的大小, 可得图  $\theta_{2,1,2}u_1(n-4) \in S$ . 由引理 4 可知  $\rho(\theta_{2,1,2}^c u_1(n-4)) > \rho(\theta_{2,1,2}^c u_1u'_1(p, q))$ . 综上可知结论成立. 若图  $G_1$  上的点  $u, v$  只有一个点粘有悬挂星, 不妨假设点  $u, u'_1$  都粘有悬挂星, 对点  $u, u'_1$  运用图变换 2, 最终可得图  $\theta_{2,1,2}u_1(n-4) \in S$  或图  $\theta_{2,1,2}uu_1(p, q) \in S$ . 由引理 4 可知  $\rho(\theta_{2,1,2}^c u_1(n-4)) > \rho(G_1^c)$  和  $\rho(\theta_{2,1,2}^c uu_1(p, q)) > \rho(G_1^c)$ . 结论仍然成立. 若图  $G_1$  上的点  $u, v$  都不粘有悬挂星, 则图  $G_1 \cong \theta_{2,1,2}u_1u'_1(p, q)$ . 由上面分析可得结论仍然成立.

**情形 2**  $h = k = l = 2$ . (1) 假设  $\{u, u_1, u'_1, u''_1, v\}$  中只有一个点粘有悬挂树  $T$ . 因为图  $G \in \Theta_n \setminus (\Theta_n \cap S)$ , 所以  $T$  非星. 对  $T$  的非悬挂割边反复进行图变换 1, 最终可得图  $\theta_{2,2,2}u(n-5) \in S$  或图  $\theta_{2,2,2}u_1(n-5) \in S$ . 由引理 3 可知  $\rho(\theta_{2,2,2}^c u(n-5)) > \rho(G^c)$  和  $\rho(\theta_{2,2,2}^c u_1(n-5)) > \rho(G^c)$ , 结论成立. (2) 假设  $\{u, u_1, u'_1, u''_1, v\}$  中至少有两个点粘有悬挂树. 对图  $G$  进行与情形 1 中 (2) 类似的图变换, 最终可得图  $\theta_{2,2,2}u(n-5) \in S$  或图  $\theta_{2,2,2}u_1(n-5) \in S$  或图  $\theta_{2,2,2}uu_1(p, q) \in S$ . 由引理 4 可知结论成立.

**情形 3**  $h = 3, k = 2, l = 1$ . (1) 假设  $\{u, v, u_1, u_2, u'_1\}$  中只有一个点粘有悬挂树  $T$ . 若  $T$  是星, 因为图  $G \in \Theta_n \setminus (\Theta_n \cap S)$ , 显然图  $G \cong \theta_{3,1,2}u'_1(n-5)$ . 对图  $\theta_{3,1,2}u'_1(n-5)$  圈上的任意两点运用图变换 2, 通过比较这两点对应于  $\rho(\theta_{3,1,2}^c u'_1(n-5))$  的 Perron 向量中分量的大小, 将分量较小的点连接的邻边去掉并使分量较大的点与这些邻点相连, 可得图  $\theta_{3,1,2}u(n-5) \in S$  或图  $\theta_{2,1,2}uu_1(p, q) \in S$  或图  $D_{3,0,3}u_1(n-5) \in S$  或图  $\theta_{2,1,2}u_1u'_1(n-5, 1) \notin S$  (由情形 1 可知  $\rho(\theta_{2,1,2}^c u_1(n-4)) > \rho(\theta_{2,1,2}^c u_1u'_1(n-5, 1))$ ). 由引理 4 可知结论成立. 若  $T$  非星, 对  $T$  的非悬挂割边反复进行图变换 1, 最终可得图  $\theta_{3,1,2}u(n-5) \in S$  或图  $\theta_{3,1,2}u_1(n-5) \in S$  或图  $\theta_{3,1,2}u'_1(n-5) \notin S$ . 由引理 3 可知结论成立. (2) 假设  $\{u, v, u_1, u_2, u'_1\}$  中至少有两个点粘有悬挂树. 对图  $G$  进行与情形 1 中 (2) 类似的图变换, 最终可得图  $\theta_{3,1,2}u(n-5) \in S$  或图  $\theta_{3,1,2}u_1(n-5) \in S$  或图  $\theta_{3,1,2}uu_1(p, q) \in S$  或图  $\theta_{3,1,2}uv(p, q) \in S$  或图  $\theta_{3,1,2}u'_1(n-5) \notin S$  ((1)中的图). 由引理 4 可知结论成立.

**情形 4**  $h = k = 3, l = 1$ . (1) 假设  $\{u, v, u_1, u_2, u'_1, u'_2\}$  中只有一个点粘有悬挂树  $T$ . 若  $T$  是星, 因为图  $G \in \Theta_n \setminus (\Theta_n \cap S)$ , 显然图  $G \cong \theta_{3,1,3}u_1(n-6)$ . 对图  $\theta_{3,1,3}u_1(n-6)$  圈上的任意两点运用图变换 2, 通过比较这两点对应于  $\rho(\theta_{3,1,3}^c u_1(n-6))$  的 Perron 向量中分量的大小, 将分量较小的点连接的邻边去掉并使分量较大的点与这些邻点相连, 可得图  $D_{3,0,3}uu_1(p, q) \in S$  或图  $\theta_{3,1,2}u(n-5) \in S$  或图  $\theta_{3,1,3}u(n-6) \in S$  或图  $\theta_{2,2,2}uu_1(p, q) \in S$  或图  $\theta_{3,1,2}u_1(n-5) \in S$  或图  $\theta_{3,1,2}uu_1(p, q) \in S$  或图  $\theta_{3,1,2}u'_1(n-5) \notin S$  (情形 3 中的图) 或图  $\theta_{3,1,2}uu_2(p, q) \notin S$  (情形 3 中的图) 或图  $\theta_{3,1,2}uu'_1(p, q) \notin S$  (情形 3 中的图) 或图  $\theta_{2,2,2}u_1u'_1(p, q) \notin S$  (情形 2 中的图) 或图  $\theta_{3,1,2}u_1u'_1(p, q) \notin S$  (情形 3 中的图). 由情形 2 和 3 的分析可知结论成立. 若  $T$  非星, 对  $T$  的非悬挂割边反复进行图变换 1, 最终可得

图  $\theta_{3,1,3}u(n-6) \in S$  或图  $\theta_{3,1,3}u_1(n-6) \notin S$ . 由引理 3 可知结论成立. (2) 假设  $\{u, v, u_1, u_2, u'_1, u'_2\}$  中至少有两个点粘有悬挂树. 对图  $G$  进行与情形 1 中 (2) 类似的图变换, 最终可得图  $\theta_{3,1,3}u(n-6) \in S$  或图  $\theta_{3,1,3}uv(p, q) \in S$  或图  $\theta_{3,1,3}u_1(n-6) \notin S$  ((1)中的图). 由引理 4 可知结论成立.

**情形 5**  $h \geq 4, k \geq 2, l = 1$ . 对图  $G$  圈上的任意两点运用图变换 2, 通过比较这两点对应于  $\rho(G^c)$  的 Perron 向量中分量的大小, 将分量较小的点连接的邻边去掉并使分量较大的点与这些邻点相连, 不断进行上述的图变换, 最终可得图  $G_3 \in \Theta_{2,1,2}$  (情形 1 中的图) 或图  $G_4 \in \Theta_{2,2,2}$  (情形 2 中的图) 或图  $G_5 \in \Theta_{3,1,2}$  (情形 3 中的图) 或图  $G_6 \in \Theta_{3,1,3}$  (情形 4 中的图). 由引理 4 可知结论成立.

**情形 6**  $h \geq 3, k \geq 2, l = 2$ . 不断对图  $G$  进行与情形 5 类似的图变换, 最终可得图  $G_7 \in \Theta_{2,1,2}$  (情形 1 中的图) 或图  $G_8 \in \Theta_{2,2,2}$  (情形 2 中的图) 或图  $G_9 \in \Theta_{3,1,2}$  (情形 3 中的图) 或图  $G_{10} \in \Theta_{3,1,3}$  (情形 4 中的图). 由引理 4 可知结论成立.

**情形 7**  $h \geq k \geq l \geq 3$ . 不断对图  $G$  进行与情形 5 类似的图变换, 最终可得图  $G_{11} \in \Theta_{2,1,2}$  (情形 1 中的图) 或图  $G_{12} \in \Theta_{2,2,2}$  (情形 2 中的图) 或图  $G_{13} \in \Theta_{3,1,2}$  (情形 3 中的图) 或图  $G_{14} \in \Theta_{3,1,3}$  (情形 4 中的图). 由引理 4 可知结论成立.

综上所述, 必然存在图  $G'' \in S$ , 使得  $\rho(G''^c) > \rho(G^c)$ .

**引理 7** 对于任意正整数  $n \geq 6, p, q$ . 则  $\rho(\theta_{2,1,2}^c uv(p, q)) > \rho(\theta_{2,1,2}^c u(p, q))$ .

**证明** 令  $S_2 = N_{\theta_{2,1,2}^c u(p, q)}(u') \setminus \{u\}$ . 设  $X$  是属于  $\rho(\theta_{2,1,2}^c u(p, q))$  的 Perron 向量, 若  $x_v \geq x_{u'}$ , 则

$$\begin{aligned} \rho(\theta_{2,1,2}^c uv(p, q)) - \rho(\theta_{2,1,2}^c u(p, q)) &\geq X^T D(\theta_{2,1,2}^c uv(p, q))X - X^T D(\theta_{2,1,2}^c u(p, q))X \\ &= 2x_v \sum_{z \in S_2} x_z + 2x_v x_u - 2x_{u'} \sum_{z \in S_2} x_z - 2x_{u'} x_u \\ &= 2(x_v - x_{u'}) \left( \sum_{z \in S_2} x_z + x_u \right) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

若  $\rho(\theta_{2,1,2}^c uv(p, q)) = \rho(\theta_{2,1,2}^c u(p, q))$ , 则  $X$  也是属于特征值  $\rho(\theta_{2,1,2}^c uv(p, q))$  的 Perron 向量. 由点  $v$  的特征等式可得

$$\begin{aligned} 0 &= \rho(\theta_{2,1,2}^c uv(p, q))x_v - \rho(\theta_{2,1,2}^c u(p, q))x_v \\ &= ((D(\theta_{2,1,2}^c uv(p, q)) - D(\theta_{2,1,2}^c u(p, q)))X)_v \\ &= \sum_{z \in S_2} x_z + x_u \\ &> 0, \end{aligned}$$

产生矛盾. 因此, 当  $x_v \geq x_{u'}$  时,  $\rho(\theta_{2,1,2}^c uv(p, q)) > \rho(\theta_{2,1,2}^c u(p, q))$ . 当  $x_v < x_{u'}$  时, 同理可得  $\rho(\theta_{2,1,2}^c uv(p, q)) > \rho(\theta_{2,1,2}^c u(p, q))$ .

**引理 8** 对于任意正整数  $n, p, q$ , 其中  $n \geq 6$  且  $p+q=n-4$ . 则  $\rho(\theta_{2,1,2}^c uv(n-5, 1)) \geq \rho(\theta_{2,1,2}^c uv(p, q))$ , 等号成立当且仅当  $q=1$ .

**证明** 设  $X$  是属于  $\rho(\theta_{2,1,2}^c uv(p, q))$  的 Perron 向量, 不失一般性, 设  $x_u \geq x_v$ . 令  $w \in N_{\theta_{2,1,2}^c uv(p, q)}(v) \setminus \{u, u_1, u'_1\}$  且  $S_3 = N_{\theta_{2,1,2}^c uv(p, q)}(v) \setminus \{u, u_1, u'_1, w\}$ . 若  $q \neq 1$ , 则

$$\begin{aligned} \rho(\theta_{2,1,2}^c uv(n-5, 1)) - \rho(\theta_{2,1,2}^c uv(p, q)) &\geq X^T D(\theta_{2,1,2}^c uv(n-5, 1))X - X^T D(\theta_{2,1,2}^c uv(p, q))X \\ &= 2(x_u - x_v) \sum_{z \in S_3} x_z \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

若  $\rho(\theta_{2,1,2}^c uv(n-5, 1)) = \rho(\theta_{2,1,2}^c uv(p, q))$ , 则  $X$  也是属于特征值  $\rho(\theta_{2,1,2}^c uv(n-5, 1))$  的 Perron 向量. 由点  $u$  的特

征等式可得

$$\begin{aligned} 0 &= \rho(\theta_{2,1,2}^c uv(n-5, 1))x_u - \rho(\theta_{2,1,2}^c uv(p, q))x_u \\ &= ((D(\theta_{2,1,2}^c uv(n-5, 1)) - D(\theta_{2,1,2}^c uv(p, q)))X)_u \\ &= \sum_{z \in S_3} x_z \\ &> 0, \end{aligned}$$

产生矛盾. 因此,  $\rho(\theta_{2,1,2}^c uv(n-5, 1)) \geq \rho(\theta_{2,1,2}^c uv(p, q))$ , 等号成立当且仅当  $q = 1$ .

注 1 设  $n \geq 8$ ,  $p, q$  为任意正整数, 与引理 7 和引理 8 的方法类似, 可得

$$\begin{aligned} \rho(D_{3,1,3}^c u(n-6)) &> \rho(D_{3,1,3}^c uv(p, q)), \\ \rho(\theta_{3,1,2}^c u(n-5)) &> \rho(\theta_{3,1,2}^c uv(p, q)), \\ \rho(\theta_{3,1,3}^c u(n-6)) &> \rho(\theta_{3,1,3}^c uv(p, q)), \\ \min\{\rho(D_{3,0,3}^c uu_1(n-6, 1)), \rho(D_{3,0,3}^c u_1(n-5))\} &\geq \rho(D_{3,0,3}^c uu_1(p, q)), \\ \min\{\rho(D_{3,0,4}^c u(n-6)), \rho(D_{3,0,4}^c u'_1(n-6))\} &> \rho(D_{3,0,4}^c uu'_1(p, q)), \\ \min\{\rho(\theta_{2,1,2}^c uu_1(n-5, 1)), \rho(\theta_{2,1,2}^c u_1(n-4))\} &\geq \rho(\theta_{2,1,2}^c uu_1(p, q)), \\ \min\{\rho(\theta_{3,1,2}^c u(n-5)), \rho(\theta_{3,1,2}^c u_1(n-5))\} &> \rho(\theta_{3,1,2}^c uu_1(p, q)), \\ \min\{\rho(\theta_{2,2,2}^c u(n-5)), \rho(\theta_{2,2,2}^c u_1(n-5))\} &> \rho(\theta_{2,2,2}^c uu_1(p, q)). \end{aligned}$$

定理 1 设图  $G \in \mathbb{B}_n$  且  $n \geq 8$ . 若图  $G^c$  连通, 则  $\rho(\theta_{2,2,2}^c u(n-5)) \geq \rho(G^c)$ , 等号成立当且仅当  $G \cong \theta_{2,2,2}^c u(n-5)$ .

证明 由引理 5 和 6 可知, 要确定  $\mathbb{B}_n^c$  中距离谱半径达到最大的极图只需要考虑  $S$  中的图的补图. 由引理 7, 引理 8 和注 1 可知只需要考虑以下几类图:  $D_{3,0,3}^c uu_1(n-6, 1)$ ,  $D_{3,0,3}^c u_1(n-5)$ ,  $D_{3,0,4}^c u(n-6)$ ,  $D_{3,0,4}^c u'_1(n-6)$ ,  $D_{3,1,3}^c u(n-6)$ ,  $\theta_{2,1,2}^c u_1(n-4)$ ,  $\theta_{2,1,2}^c uv(n-5, 1)$ ,  $\theta_{2,1,2}^c uu_1(n-5, 1)$ ,  $\theta_{3,1,2}^c u(n-5)$ ,  $\theta_{3,1,2}^c u_1(n-5)$ ,  $\theta_{2,2,2}^c u(n-5)$ ,  $\theta_{2,2,2}^c u_1(n-5)$  以及  $\theta_{3,1,3}^c u(n-6)$ . 它们对应的距离特征多项式如下:

$$\begin{aligned} P_{D_{3,0,3}^c uu_1(n-6,1)}(\lambda) &= (\lambda+1)^{n-7}(\lambda+2)\varphi_1(\lambda), \\ P_{D_{3,0,3}^c u_1(n-5)}(\lambda) &= (\lambda+1)^{n-6}(\lambda+2)\varphi_2(\lambda), \\ P_{D_{3,0,4}^c u(n-6)}(\lambda) &= (\lambda+1)^{n-6}(\lambda+2)\varphi_3(\lambda), \\ P_{D_{3,0,4}^c u'_1(n-6)}(\lambda) &= (\lambda+1)^{n-7}(\lambda+2)\varphi_4(\lambda), \\ P_{D_{3,1,3}^c u(n-6)}(\lambda) &= (\lambda+1)^{n-7}(\lambda+2)^2\varphi_5(\lambda), \\ P_{\theta_{2,1,2}^c u_1(n-4)}(\lambda) &= (\lambda+1)^{n-5}(\lambda+2)\varphi_6(\lambda), \\ P_{\theta_{2,1,2}^c uv(n-5,1)}(\lambda) &= (\lambda+1)^{n-5}\varphi_7(\lambda), \\ P_{\theta_{2,1,2}^c uu_1(n-5,1)}(\lambda) &= (\lambda+1)^{n-6}\varphi_8(\lambda), \\ P_{\theta_{3,1,2}^c u(n-5)}(\lambda) &= (\lambda+1)^{n-6}\varphi_9(\lambda), \\ P_{\theta_{3,1,2}^c u_1(n-5)}(\lambda) &= (\lambda+1)^{n-6}\varphi_{10}(\lambda), \\ P_{\theta_{2,2,2}^c u(n-5)}(\lambda) &= (\lambda+1)^{n-4}\varphi_{11}(\lambda), \\ P_{\theta_{2,2,2}^c u_1(n-5)}(\lambda) &= (\lambda+1)^{n-4}\varphi_{12}(\lambda), \\ P_{\theta_{3,1,3}^c u(n-6)}(\lambda) &= (\lambda+1)^{n-7}\lambda(\lambda+2)\varphi_{13}(\lambda), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi_1(\lambda) &= \lambda^6 + (-n+5)\lambda^5 + (-7n+3)\lambda^4 - (11n+41)\lambda^3 - (n+89)\lambda^2 + (3n-37)\lambda + 6, \\ \varphi_2(\lambda) &= \lambda^5 + (-n+4)\lambda^4 - (6n+1)\lambda^3 - (3n+52)\lambda^2 + (11n-91)\lambda + 4n-18, \\ \varphi_3(\lambda) &= \lambda^5 + (-n+4)\lambda^4 - (6n+6)\lambda^3 - (4n+46)\lambda^2 + (3n-43)\lambda + 6, \\ \varphi_4(\lambda) &= \lambda^6 + (-n+5)\lambda^5 + (-7n+3)\lambda^4 + (-57-7n)\lambda^3 + (-157+13n)\lambda^2 + (-101+15n)\lambda + 6, \\ \varphi_5(\lambda) &= \lambda^5 + (-n+3)\lambda^4 - (3+5n)\lambda^3 + (n-39)\lambda^2 + (6n-28)\lambda + 12, \\ \varphi_6(\lambda) &= \lambda^4 + (3-n)\lambda^3 + (-9-5n)\lambda^2 + (-53+n)\lambda + 6n-46, \\ \varphi_7(\lambda) &= \lambda^5 + (-n+5)\lambda^4 + (-7n+2)\lambda^3 - (10n+52)\lambda^2 + (4n-124)\lambda + 6n-64, \\ \varphi_8(\lambda) &= \lambda^6 + (-n+6)\lambda^5 + (-8n+7)\lambda^4 - (17n+44)\lambda^3 - (6n+152)\lambda^2 + (8n-146)\lambda + 3n-35, \\ \varphi_9(\lambda) &= \lambda^6 + (-n+6)\lambda^5 + (2-8n)\lambda^4 - (16n+64)\lambda^3 - (5n+169)\lambda^2 + (8n-148)\lambda + 3n-35, \\ \varphi_{10}(\lambda) &= \lambda^6 + (-n+6)\lambda^5 + (7-8n)\lambda^4 + (-46-15n)\lambda^3 + (-175+5n)\lambda^2 + (-204+26n)\lambda + 12n-72, \\ \varphi_{11}(\lambda) &= \lambda^4 + (4-n)\lambda^3 + (-12-6n)\lambda^2 + (-64-2n)\lambda + 6n-64, \\ \varphi_{12}(\lambda) &= \lambda^4 + (4-n)\lambda^3 + (-7-6n)\lambda^2 + (-58-n)\lambda + 8n-68, \\ \varphi_{13}(\lambda) &= \lambda^5 + (-n+5)\lambda^4 + (-7n+3)\lambda^3 + (-9n-41)\lambda^2 + (4n-106)\lambda + 6n-60. \end{aligned}$$

**断言 1**  $\rho(\theta_{2,2,2}^c u(n-5)) > \rho(\theta_{2,1,2}^c u_1(n-4))$ . 设  $P_{\theta_{2,2,2}^c u(n-5)}(\lambda) - P_{\theta_{2,1,2}^c u_1(n-4)}(\lambda) = (\lambda+1)^{n-5} f_1(\lambda)$ , 其中

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= -5\lambda^3 + (n-5)\lambda^2 + (-4n+24)\lambda - 6n+28, \\ f_1'(\lambda) &= -15\lambda^2 + (2n-10)\lambda - 4n+24, \\ f_1''(\lambda) &= -30\lambda + 2n-10. \end{aligned}$$

令  $\rho_1 = \rho(\theta_{2,1,2}^c u_1(n-4))$ . 由于  $D(\theta_{2,1,2}^c u_1(n-4))$  的最小行和不少于  $n$ , 由引理 2 可得  $\rho_1 \geq n$ . 当  $\lambda \geq n$  时,  $f_1''(\lambda) \leq f_1''(n) = -28n-10 < 0$ , 即  $f_1'(\lambda)$  随  $\lambda$  严格单调递减. 由  $f_1'(\lambda)$  的单调性可知,  $f_1'(\lambda) \leq f_1'(n) = -13n^2-14n+24 < 0$ , 即  $f_1(\lambda)$  随  $\lambda$  严格单调递减. 由  $f_1(\lambda)$  的单调性可知,  $f_1(\lambda) \leq f_1(n) = -4n^3-9n^2+18n+28 < 0$ . 因此,  $f_1(\rho_1) < 0$ . 由  $P_{\theta_{2,2,2}^c u(n-5)}(\rho_1) < 0$ . 由  $P_{\theta_{2,2,2}^c u(n-5)}(\lambda)$  的图像可知,  $\rho(\theta_{2,2,2}^c u(n-5)) > \rho(\theta_{2,1,2}^c u_1(n-4))$ .

**断言 2**  $\rho(\theta_{2,1,2}^c u_1(n-4)) > \rho(\theta_{3,1,2}^c u(n-5))$ . 设  $P_{\theta_{2,1,2}^c u_1(n-4)}(\lambda) - P_{\theta_{3,1,2}^c u(n-5)}(\lambda) = (\lambda+1)^{n-6} f_2(\lambda)$ , 其中

$$\begin{aligned} f_2(\lambda) &= -10\lambda^3 + (4n-54)\lambda^2 + (12n-96)\lambda + 9n-57, \\ f_2'(\lambda) &= -30\lambda^2 + (8n-108)\lambda + 12n-96, \\ f_2''(\lambda) &= -60\lambda + 8n-108. \end{aligned}$$

令  $\rho_2 = \rho(\theta_{3,1,2}^c u(n-5))$ . 由于  $D(\theta_{3,1,2}^c u(n-5))$  的最小行和不少于  $n$ , 由引理 2 可得  $\rho_2 \geq n$ . 当  $\lambda \geq n$  时,  $f_2''(\lambda) \leq f_2''(n) = -52n-108 < 0$ , 即  $f_2'(\lambda)$  随  $\lambda$  严格单调递减. 由  $f_2'(\lambda)$  的单调性可知,  $f_2'(\lambda) \leq f_2'(n) = -22n^2-96n-9 < 0$ , 即  $f_2(\lambda)$  随  $\lambda$  严格单调递减. 由  $f_2(\lambda)$  的单调性可知,  $f_2(\lambda) \leq f_2(n) = -6n^3-42n^2-87n-57 < 0$ . 因此,  $P_{\theta_{2,1,2}^c u_1(n-4)}(\rho_2) - P_{\theta_{3,1,2}^c u(n-5)}(\rho_2) < 0$ , 即  $P_{\theta_{2,1,2}^c u_1(n-4)}(\rho_2) < 0$ . 由  $P_{\theta_{2,1,2}^c u_1(n-4)}(\lambda)$  的图像可知,  $\rho(\theta_{2,1,2}^c u_1(n-4)) > \rho(\theta_{3,1,2}^c u(n-5))$ .

与断言 1 和断言 2 的方法类似, 通过不断比较最终可得  $\rho(\theta_{2,2,2}^c u(n-5)) \geq \rho(G^c)$ , 等号成立当且仅当  $G \cong \theta_{2,2,2}^c u(n-5)$ .

**定理 2** 设图  $G \in \mathbb{B}_n$  且图  $G^c$  连通. 对于任意正整数  $n \geq 5$ , 有以下命题成立:

- (1) 当  $n=5$  时,  $\rho(G^c) \leq \rho(\theta_{3,1,2}^c)$ , 等号成立当且仅当  $G \cong \theta_{3,1,2}$ ;
- (2) 当  $n \geq 6$  时,  $\rho(G^c) \leq \rho(\theta_{2,2,2}^c u(n-5))$ , 等号成立当且仅当  $G \cong \theta_{2,2,2}^c u(n-5)$ .

(下转第 221 页)