变指标 Fofana 空间及其预对偶空间*

杨 凡, 周 疆†

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

摘 要：通过引入变指标 Fofana 空间 $(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)(1<p(\cdot)<\infty,\ 1\le q,\alpha\le\infty)$ 及其预对偶空间, 研究了其空间的相关性质. 与此同时, 利用函数分层分解和实变技巧得到了分数次积分算子及其交换子在变指标 Fofana 空间上有界的充分必要条件.

关键词： Fofana 空间; 变指标; 分数次积分算子; BMO; 交换子

DOI：10.13568/j.cnki.651094.651316.2023.01.19.0001

中图分类号：O174.2 **文献标识码**：A **文章编号**：2096-7675(2023)05-0565-017

引文格式：杨凡, 周疆. 变指标 Fofana 空间及其预对偶空间[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2023, 40(5): 565-581.

英文引文格式：YANG Fan, ZHOU Jiang. Variable Fofana's spaces and their pre-dual[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2023, 40(5): 565-581.

Variable Fofana's Spaces and Their Pre-Dual

YANG Fan, ZHOU Jiang

(*School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China*)

Abstract： By introducing variable Fofana's spaces $(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)(1<p(\cdot)<\infty,\ 1\le q,\alpha\le\infty)$ and their pre-dual spaces, we discussed the properties of those spaces. Meanwhile, via applying hierarchical decomposition of function and real variable techniques, the necessary and sufficient conditions for boundedness of fractional integral operators and their commutators on variable Fofana's spaces are obtained.

Key words： Fofana's spaces; variable exponent; fractional integral operators; BMO; commutators

0 引 言

变指标 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}$ 最早可以追溯到 1931 年 Orlicz[1] 的文章. 近些年相关空间 $L^{p(\cdot)}$ 的研究主要是基于 Kováčik 和 Rákosní[2] 在 1991 年的工作, 学者们讨论了空间 $L^{p(\cdot)}$ 的基本性质, 例如: Banach 空间、自反性、可分性、一致凸性、Hölder 不等式和高维 Euclidean 空间上 $L^{p(\cdot)}\hookrightarrow L^{q(\cdot)}$ 的嵌入. 2001 年, Fan 等[3]进一步研究了文献 [2] 中的结果. 2011 年, Diening 等[4]更全面地总结了空间 $L^{p(\cdot)}$ 的性质.

1970 年, Stein[5] 证明了分数次积分算子 I_γ 在空间 L^p 上的有界性. 2007 年, Capone 等[6]将该结果推广到空间 $L^{p(\cdot)}$ 上. 1982 年, Chanillo[7] 首次引入了交换子 $[b,I_\gamma]$, 其中 $b\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 并且证明了在空间 L^p 上的有界性. 2010 年, Izuki[8] 将该结果推广到了空间 $L^{p(\cdot)}$ 上.

1926 年, 耦合空间 $(L^1,\ell^2)(\mathbb{R})$ 和 $(L^2,\ell^\infty)(\mathbb{R})$ 由 Wiener 引入[9]. 1975 年, Holland[10] 给出了 Wiener 耦合空间的一般形式 $(L^p,\ell^q)(\mathbb{R}^n)$. 2012 年, Aydin 和 Gürkanli[11] 给出了 Wiener 型加权变指标耦合空间 $(L^{p(x)},L^q_\omega)(\mathbb{R}^n)$ 和 $(L^{p(x)}_\omega,L^q_\upsilon)(\mathbb{R}^n)$, 证明了它们是 Banach 函数空间并给出了相应的 Hölder 不等式和嵌入定理.

1988 年, Fofana[12] 引入 Fofana 型耦合空间 (简称 Fofana 空间). 2019 年, Fofana 空间的预对偶空间由 Feichtinger 和 Feuto 引入[13]. 2022 年, Zhang 和 Zhou[14] 介绍了混范耦合空间及其预对偶空间, 并且刻画了分数次积分算子及其交换子的有界性.

受上述工作启发, 本文引入变指标 Fofana 空间 $(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)(1<p(\cdot)<\infty,\ 1\le q,\alpha\le\infty)$, 并且得到了该空间的相关性质. 自然地, 就考虑是否可以建立变指标 Fofana 空间的预对偶空间并且刻画分数次积分算子及其交

* 收稿日期：2023-01-19
基金项目：国家自然科学基金“基于混合范数函数空间上的算子及交换子性质研究”（12061069）.
作者简介：杨凡（1996-），女，硕士生，从事调和分析研究，E-mail: yf18209050612@163.com.
† 通讯作者：周疆（1968-），男，博士，教授，主要从事调和分析研究，E-mail: zhoujiang@xju.edu.cn.

换子的有界性.

1 预备知识

设 $1\le p,q\le\infty$, 耦合空间 $(L^p,\ell^q)(\mathbb{R}^n)$ 的范数记为 $\|f\|_{p,q}=\|\{\|f\chi_{I_k}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\}_{k\in\mathbb{Z}^n}\|_{\ell^q(\mathbb{R}^n)}$. 对任意 $r>0$,

$$
{}_r\|f\|_{p,q}=\begin{cases}\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|f\chi_{I_k^r}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q\right]^{\frac{1}{q}} & q<\infty,\\ \sup_{k\in\mathbb{Z}^n}\|f\chi_{I_k^r}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} & q=\infty,\end{cases}
$$

其中: $I_k^r=\prod_{j=1}^n[k_jr,(k_j+1)r]$, $k=(k_j)_{1\le j\le\infty}\in\mathbb{Z}^n$. 显然当 $r=1$ 时, ${}_1\|f\|_{p,q}=\|f\|_{p,q}$.

对任意 $r>0$, 存在扩张算子 $St_r^{(\alpha)}:f\mapsto r^{-\frac{n}{\alpha}}f(r^{-1}\cdot)$ 使得该算子在 $L^p(\mathbb{R}^n)(1<p<\infty)$ 上是等距的. 然而, Wiener 型耦合空间不具备这种性质. 事实上, 当 $1\le p,q\le\infty$, $p\ne q$ 时, 若 $f\in(L^p,\ell^q)(\mathbb{R}^n)$, $r>0$ 和 $\alpha>0$, 即使有

$$
St_r^{(\alpha)}(f)\in(L^p,\ell^q)(\mathbb{R}^n),
$$

依然不存在 $\alpha>0$ 使得其范数

$$
\sup_{r>0}\|St_r^{(\alpha)}(f)\|_{p,q}<\infty.
$$

为克服以上不足之处, Fofana[12] 引入了 Fofana 空间 $(L^p,\ell^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$, 定义如下:

$$
(L^p,\ell^q)^\alpha(\mathbb{R}^n):=\left\{f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n):\|f\|_{p,q,\alpha}:=\sup_{r>0}\|St_r^{(\alpha)}(f)\|_{p,q}=\sup_{r>0}r^{n(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{q})}{}_r\|f\|_{p,q}<\infty\right\}.
$$

此外还有连续型的 Fofana 空间 $(L^p,L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$, 定义如下:

$$
(L^p,L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n):=\{f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n):\|f\|_{(L^p,L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}<\infty\},1\le p,q,\alpha\le\infty,
$$

其中

$$
\|f\|_{(L^p,L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}:=\sup_{r>0}\left\||B(\cdot,r)|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\chi_{B(\cdot,r)}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)},
$$

$B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n:|y-x|<r\}$, χ_B 是可测集合 $B\subset\mathbb{R}^n$ 的特征函数, 记 $|B|$ 为球体 B 的 Lebesgue 测度.

分数次积分算子 I_γ 的定义为:

$$
I_\gamma f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\gamma}}\mathrm{d}y,\ \ 0<\gamma<n.
$$

对于局部可积函数 b, 分数次积分算子的交换子 $[b,I_\gamma]$ 的定义为:

$$
[b,I_\gamma]f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(b(x)-b(y))f(y)}{|x-y|^{n-\gamma}}\mathrm{d}y,\ \ 0<\gamma<n.
$$

有界平均震荡函数空间 $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 是指:

$$
\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n):=\left\{f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n):\|f\|_*:=\sup_B\frac{1}{|B|}\int_B|f(x)-f_B|\mathrm{d}x<\infty\right\},
$$

其中上确界取遍 $\mathbb{R}^n$ 中的所有球体, f_B 是 f 在球体 B 上的平均.

给定开集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 和可测函数 $p(\cdot):E\to[1,\infty)$, $L^{p(\cdot)}(E)$ 是指 E 上的可测函数 f 构成的集合, 使得对于某个 $\lambda>0$,

$$
\int_E\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}\mathrm{d}x<\infty,
$$

其 Luxemburg-Nakano 范数为:

$$
\|f\|_{L^{p(\cdot)}(E)}=\inf\left\{\lambda>0:\int_E\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}\mathrm{d}x\le1\right\}.
$$

满足以上条件的空间称为变指标 Lebesgue 空间. 若 $p(\cdot)=p$ 是一个常数, 则 $L^{p(\cdot)}(E)$ 与 $L^p(E)$ 等距同构. 全文用 $p(\cdot)$ 代替 p 来强调指标是一个函数而不是一个常数.

局部变指标 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(E)$ 是指:

$$L_{\rm loc}^{p(\cdot)}(E):=\{f: f\in L^{p(\cdot)}(F), \text{对所有紧子集 } F\subset E\}.$$

$\mathcal{P}(E)$ 为 $p(\cdot):E\to[1,\infty)$ 且满足 $1<p_-\le p^+<\infty$ 的可测函数集合, 其中

$$p_-=\operatorname{ess\,inf}\{p(x):x\in E\}>1,\quad p^+=\operatorname{ess\,sup}\{p(x):x\in E\}<\infty.$$

定义 $p'(x)=p(x)/(p(x)-1)$. $\mathcal{B}(E)$ 为 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(E)$ 且使得 Hardy–Littlewood 极大算子 M 在 $L^{p(\cdot)}(E)$ 上有界的可测函数 $p(\cdot)$ 的集合.

在文中, 对给定的球体 $B:=B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n:|y-x|<r\}$, 记 $|B|$ 为球体 B 的 Lebesgue 测度, χ_B 是可测集合 $B\subset\mathbb{R}^n$ 的特征函数且 $aB=B(x,ar)$, $a>0$. 符号 C 表示不依赖于主变量的正常数并且每次出现都不一定是相同的. $C'\sim C''$ 表示 C' 与 C'' 等价, 即 $C'\lesssim C''(C'\le CC'')$, $C''\lesssim C'(C''\le CC')$.

在空间 $L^{p(\cdot)}$ 中一些重要引理如下.

引理 1[15] 设开集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 和 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(E)$, 假设 $p(\cdot)$ 满足

$$|p(x)-p(y)|\le\frac{C}{-\log(|x-y|)},\quad x,y\in E,\ |x-y|\le\frac12 \tag{1}$$

和

$$|p(x)-p(y)|\le\frac{C}{\log(|x|+e)},\quad x,y\in E,\ |y|\ge|x| \tag{2}$$

则 $p(\cdot)\in\mathcal{B}(E)$.

引理 2[2] 设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(E)$. 若 $f\in L^{p(\cdot)}(E)$ 和 $g\in L^{p'(\cdot)}(E)$, 则 fg 在 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上可积且

$$\int_E|f(x)g(x)|{\rm d}x\le r_p\|f\|_{L^{p(\cdot)}(E)}\|g\|_{L^{p'(\cdot)}(E)},$$

其中 $r_p=1+1/p_--1/p^+$.

上述不等式称为空间 $L^{p(\cdot)}$ 上的广义 Hölder 不等式.

引理 3[4] 设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 满足引理 1 中的式 (1) 和式 (2), 则 $\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\sim|Q|^{(1/p_Q)}$ 对每个方体(或球体) $Q\subset\mathbb{R}^n$ 都成立. 更确切的,

$$\|\chi_Q\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\sim\begin{cases}|Q|^{\frac{1}{p(x)}} & |Q|\le 2^n \text{ 和 } x\in Q,\\ |Q|^{\frac{1}{p(\infty)}} & |Q|\ge 1,\end{cases}$$

对每个方体(或球体) $Q\subset\mathbb{R}^n$ 成立, 其中 $p(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}p(x)$ 和 p_Q 是 p 在 Q 上的平均.

引理 4[16] 假设 $p(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 则存在常数 $C>0$ 使得对所有球体 $B\in\mathbb{R}^n$, 有

$$\frac{1}{|B|}\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_B\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\le C.$$

2　变指标 Fofana 空间 $(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$

在本节中, 我们介绍变指标 Fofana 空间 $(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 的定义及其性质.

设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $1\le q\le\infty$, 耦合空间 $(L^{p(\cdot)},L^q)(\mathbb{R}^n)$ 的定义为:

$$(L^{p(\cdot)},L^q)(\mathbb{R}^n)=\Big\{f\in L_{\rm loc}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n):\|f\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)(\mathbb{R}^n)}=\big\|\|f\chi_{B(\cdot,1)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\big\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}<\infty\Big\}.$$

定义 1 设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $1\le q,\alpha\le\infty$. 若 $f\in L_{\rm loc}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, 则

$$(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n):=\{f:\|f\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}<\infty\},$$

其中

$$\|f\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}=\sup_{r>0}\Big\||B(\cdot,r)|^{\frac1\alpha-\frac{1}{p(\cdot)}-\frac1q}\|f\chi_{B(\cdot,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\Big\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

命题 1 $(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 的一些性质:

(i) 当 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $1\le q,\alpha\le\infty$ 时, 若 $p(\cdot)\le\alpha\le q$, 则 $(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow(L^{p(\cdot)},L^q)(\mathbb{R}^n)$.

(ii) 若 $1\le\alpha\le\infty$, 当 $p(\cdot)=\alpha$, $q=\infty$ 时, $(L^{p(\cdot)},\ L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 就是经典的 $L^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 空间.

证明 由直接计算可得:

(i) 当 $p(\cdot)\le\alpha\le q$ 时,

$$\begin{aligned}\|f\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)(\mathbb{R}^n)}&\sim\left\||B(\cdot,1)|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|f\chi_{B(\cdot,1)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\&\lesssim\sup_{r>0}\left\||B(\cdot,r)|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|f\chi_{B(\cdot,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\&=\|f\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}<\infty.\end{aligned}$$

因此, $(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow(L^{p(\cdot)},L^q)(\mathbb{R}^n)$ 并且 $\|f\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)(\mathbb{R}^n)}\lesssim\|f\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}$.

(ii) 当 $p(\cdot)=\alpha$, $q=\infty$ 时, 结果显然可得.

命题 2 设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $1\le q,\alpha\le\infty$, 则 $(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 是 Banach 空间.

证明 首先证明三角不等式. 对于 $f,g\in(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$, 可得

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}&=\sup_{r>0}\left\||B|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|(f+g)\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\&\le\sup_{r>0}\left\||B|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|f\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\&\quad+\sup_{r>0}\left\||B|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|g\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\&=\|f\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}+\|g\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

正则性和齐次性是显然的. 因此, 证明了 $(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 是具备范数 $\|\cdot\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}$ 的空间.

其次证明完备性. 不失一般性, 取 Cauchy 列 $\{f_j\}_{j=1}^\infty\subset(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 满足

$$\|f_{j+1}-f_j\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}<2^{-j}.$$

记 $g=|f_1|+\sum_{j=1}^\infty|f_{j+1}-f_j|$, 则

$$\|g\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}\le\|f_1\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}+\sum_{j=1}^\infty\|f_{j+1}-f_j\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}<\infty,$$

对于几乎处处 $x\in\mathbb{R}^n$,

$$|g(x)|=|f_1(x)|+\sum_{j=1}^\infty|f_{j+1}(x)-f_j(x)|<\infty.$$

因此, 若 $f=f_1+\sum_{j=1}^\infty(f_{j+1}-f_j)=\lim\limits_{j\to\infty}f_j$, 则 $|f|\le|g|\in(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$. 记 $f_J=f_1+\sum_{j=1}^{J-1}(f_{j+1}-f_j)$, 则有

$$\begin{aligned}\|f-f_J\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}&=\|\sum_{j=1}^\infty(f_{j+1}-f_j)-\sum_{j=1}^{J-1}(f_{j+1}-f_j)\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}\\&\le\sum_{j=J}^\infty\|f_{j+1}-f_j\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}\\&\le2\cdot2^{-J}\end{aligned}$$

和

$$\lim_{J\to\infty}\|f-f_J\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}=0.$$

故证明了 $(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 是 Banach 空间.

引理 5 设 $f\in L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\lim_{r\to0}\frac{\|f\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}=|f(x)|\quad\text{对于几乎处处 }x\in\mathbb{R}^n.$$

证明 假设 $1<p(\cdot)\le p^+<\infty$. 由引理 4 可得

$$\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\lesssim\|\chi_B\|^{-1}_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}|B|.$$

利用广义 Hölder 不等式,

$$\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)|\mathrm{d}y\lesssim\frac{1}{|B|}\|f\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_B\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\lesssim\frac{\|f\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}.$$

由引理 3 可得

$$\frac{\|f\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}\sim\frac{1}{|B|^{\frac{1}{p(\cdot)}}}\|f\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\lesssim\frac{1}{|B|^{\frac{1}{p^+}}}\|f\chi_B\|_{L^{p^+}(\mathbb{R}^n)}=\left(\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)|^{p^+}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p^+}}.$$

因此,

$$\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)|\mathrm{d}y\lesssim\frac{\|f\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}\lesssim\left(\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)|^{p^+}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p^+}}.$$

由 Lebesgue 微分定理可知

$$\lim_{r\to0}\|\chi_B\|^{-1}_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|f\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}=|f(x)|\quad\text{对于几乎处处 } x\in\mathbb{R}^n.$$

命题 3 设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $1\le q,\alpha\le\infty$, $(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 是非平凡的当且仅当 $p(\cdot)\le\alpha\le q$.
证明 假设 $(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 是平凡的. 利用反证法, 由引理 5 可得

$$\lim_{r\to0}\frac{\|f\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}=|f(x)|\quad\text{对于几乎处处 } x\in\mathbb{R}^n.$$

因此, 假设 $\alpha>q$, $f\neq0$, 则

$$\lim_{r\to0}|B|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{q}}\frac{\|f\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}=\infty.$$

故证明了 $\alpha\le q$.

假设 $\alpha<p(\cdot)$, 可知 $\alpha<p_-$. 只需证明对任意的球体 $B(x_0,r_0)$ 有 $\|\chi_{B(x_0,r_0)}\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}=\infty$, 则说明 $(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 是平凡的, 故可得到 $\alpha\ge p(\cdot)$. 接下来证明以上假设, 若 $x\in B(x_0,r/2)$ 和 $2r_0<r$, 则对任意的 $y\in B(x_0,r_0)$, 有

$$|x-y|\le|x_0-x|+|x_0-y|\le\frac{r}{2}+r_0<r,$$

即 $B(x_0,r_0)\subset B(x,r)$. 因此,

$$\begin{aligned}\|\chi_{B(x_0,r_0)}\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}&\sim\sup_{r>0}\left\|r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p(\cdot)}-\frac{n}{q}}\|\chi_{B(x_0,r_0)}\chi_{B(\cdot,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\&\gtrsim\sup_{r>2r_0}r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p_-}-\frac{n}{q}}\left\|\chi_{B(x_0,\frac{r}{2})}\|\chi_{B(x_0,r_0)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\&\gtrsim\sup_{r>2r_0}r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p_-}-\frac{n}{q}}\cdot r^{\frac{n}{q}}\\&\ge\lim_{r\to+\infty}r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p_-}}=+\infty.\end{aligned}$$

另一方面, 若 $p(\cdot)\le\alpha\le q$, 很容易得到 $\chi_{B(0,1)}\in(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$. 显然的,

$$\|\chi_{B(0,1)}\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}\sim\sup_{r>0}\left\|r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p(\cdot)}-\frac{n}{q}}\|\chi_{B(0,1)}\chi_{B(\cdot,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

若 $r>1$, 由 $1/\alpha-1/p(\cdot)\le 1/\alpha-1/p_+\le 0$, 可得

$$\begin{aligned}
&\sup_{r>1}\left\|r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p(\cdot)}-\frac{n}{q}}\|\chi_{B(0,1)}\chi_{B(\cdot,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\
\le&\sup_{r>1}r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p_+}-\frac{n}{q}}\left\|\|\chi_{B(0,1)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\cdot\chi_{B(0,r+1)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\
\lesssim&\sup_{r>1}r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p_+}-\frac{n}{q}}(r+1)^{\frac{n}{q}}\\
\lesssim&\sup_{r>1}r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p_+}}<\infty.
\end{aligned}$$

对于 $r\le 1$, 由 $1/\alpha-1/q\ge 0$ 和引理 3 可得

$$\begin{aligned}
&\sup_{r\le 1}\left\|r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p(\cdot)}-\frac{n}{q}}\|\chi_{B(0,1)}\chi_{B(\cdot,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\
\lesssim&\sup_{r>1}\left\|r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{q}}\cdot|B|^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\cdot\|\chi_{B(\cdot,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\cdot\chi_{B(0,r+1)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\
\lesssim&\sup_{r>1}r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{q}}\|\chi_{B(0,r+1)}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\
\lesssim&\sup_{r>0}r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{q}}\cdot(r+1)^{\frac{n}{q}}<\infty.
\end{aligned}$$

命题得证.

3 变指标 Fofana 空间的预对偶空间

设 $Q_{r,k}=r[k+[0,1)^n]$ $(k\in\mathbb{Z}^n)$ 和 $\|\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}\|_{\ell^q(\mathbb{R}^n)}:=\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$.

命题 4 设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $1\le q,\alpha\le\infty$ 和 $p(\cdot)\le\alpha\le q$. 定义“离散”变指标 Fofana 空间.

$$(L^{p(\cdot)},\ell^q)(\mathbb{R}^n):=\left\{f\in L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n):\|f\|_{p(\cdot),q,}:=\left\|\{\|f\chi_{Q_{1,k}}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\}_{k\in\mathbb{Z}^n}\right\|_{\ell^q(\mathbb{R}^n)}\right\},$$
$$(L^{p(\cdot)},\ell^q)^\alpha(\mathbb{R}^n):=\left\{f\in L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n):\|f\|_{p(\cdot),q,\alpha}:=\sup_{r>0}r^{\frac{n}{\alpha}-N_{r,p}}{}_r\|f\|_{p(\cdot),q}<\infty\right\},$$

其中 ${}_r\|f\|_{p(\cdot),q}=\|\{\|f\chi_{Q_{r,k}}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\}_{k\in\mathbb{Z}^n}\|_{\ell^q(\mathbb{R}^n)}$ 和

$$N_{r,p}=\begin{cases}\frac{n}{p_-} & r>1,\\ \frac{n}{p^+} & r\le 1.\end{cases}$$

因此,

$$\|f\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)(\mathbb{R}^n)}\sim\|f\|_{p(\cdot),q,},\ \|f\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}\sim\|f\|_{p(\cdot),q,\alpha},$$

其中正等价常数不依赖于函数 f.

在证明命题 4 之前, 以下两个引理是必要的.

引理 6 设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $1\le q,\alpha\le\infty$ 和 $p(\cdot)\le\alpha\le q$. 对任意的常数 $\rho\in(0,\infty)$, 有

$$\left\|\|f\chi_{B(\cdot,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\sim\left\|\|f\chi_{B(\cdot,\rho r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)},$$

其中正等价常数不依赖于函数 f.

证明 首先, 当 $\rho>1$ 时, 有

$$\left\|\|f\chi_{B(\cdot,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\le\left\|\|f\chi_{B(\cdot,\rho r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

其次, 证明反向不等式. 取 $N\in\mathbb{N}$ 和 $\{x_1,x_2,\cdots,x_N\}$, 使得

$$B(0,\rho r)\subset\bigcup_{j=1}^N B(x_j,r),$$

其中 N 不依赖 r 并且 $N\sim 1$. 因此, 对任意的 $x\in\mathbb{R}^n$, 有

$$\|f\chi_{B(x,\rho r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\le\left\|f\sum_{j=1}^{N}\chi_{B(x+x_j,r)}\right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\le\sum_{j=1}^{N}\left\|f\chi_{B(x+x_j,r)}\right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

根据 Lebesgue 测度的平移不变性和 $N\sim 1$, 可知

$$\left\|\|f\chi_{B(\cdot,\rho r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\le\sum_{j=1}^{N}\left\|\|f\chi_{B(\cdot+x_j,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\lesssim\left\|\|f\chi_{B(\cdot,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

当 $\rho\in(0,1)$ 时, 只需要替换 r 为 r/ρ, 即可得证.

引理 7 设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $1\le q,\alpha\le\infty$ 和 $p(\cdot)\le\alpha\le q$, 则有

$$r^{\frac{n}{\alpha}-N_{p,r}}\left\|\left\{\|f\chi_{Q_{r,k}}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\}_{k\in\mathbb{Z}^n}\right\|_{\ell^q(\mathbb{R}^n)}\sim\left\|r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p(\cdot)}-\frac{n}{q}}\|f\chi_{B(\cdot,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)},$$

其中正等价常数不依赖于函数 f.

证明 根据引理 6, 只需证明

$$\left\|r^{\frac{n}{\alpha}-N_{p,r}}\left\{\|f\chi_{Q_{r,k}}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\}_{k\in\mathbb{Z}^n}\right\|_{\ell^q(\mathbb{R}^n)}\sim\left\|r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p(\cdot)}-\frac{n}{q}}\|f\chi_{B(\cdot,2\sqrt{n}r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

对于任意给定 $x\in\mathbb{R}^n$, 令 $A_x:=\{k\in\mathbb{Z}^n:Q_{r,k}\cap B(x,2\sqrt{n}r)\ne\emptyset\}$, 则 A_x 的基数是有限的并且 $x\in B(rk,4\sqrt{n}r)(k\in A_x)$. 因此,

$$\|f\chi_{B(x,2\sqrt{n}r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\le\left\|\sum_{k\in A_x}f\chi_{Q_{r,k}}\right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\le\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|f\chi_{Q_{r,k}}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\chi_{B(rk,4\sqrt{n}r)}(x).$$

两边同时乘以 $r^{(n/\alpha-n/p(\cdot)-n/q)}$, 再对 x 取 L^q-范数, 有

$$\left\|r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p(\cdot)}-\frac{n}{q}}\|f\chi_{B(\cdot,2\sqrt{n}r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\le\left\|r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p(\cdot)}-\frac{n}{q}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|f\chi_{Q_{r,k}}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\chi_{B(rk,4\sqrt{n}r)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

利用与引理 6 相似的估计, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 和 $\{k_1,k_2,\cdots,k_N\}$, 使得

$$B(0,4\sqrt{n}r)\subset\bigcup_{j=1}^{N}Q_{r,k_j},$$

其中 N 不依赖于 r 并且 $N\sim 1$. 根据 Lebesgue 测度的平移不变性, 有

$$\begin{aligned}\left\|r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p(\cdot)}-\frac{n}{q}}\|f\chi_{B(\cdot,2\sqrt{n}r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}&\le\left\|r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p(\cdot)}-\frac{n}{q}}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\|f\chi_{Q_{r,k}}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\chi_{Q_{r,k_j+k}}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\&\lesssim r^{\frac{n}{\alpha}-N_{p,r}}\left\|\left\{\|f\chi_{Q_{r,k}}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\}_{k\in\mathbb{Z}^n}\right\|_{\ell^q(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

上式中最后一个不等式的估计具体如下:

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p(\cdot)}-\frac{n}{q}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}C_k\chi_{rk+(0,r]^n}(x)\right|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}&\lesssim r^{\frac{n}{\alpha}-N_{p,r}-\frac{n}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}C_k\chi_{Q_{r,k}}(x)\right|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\\&\lesssim r^{\frac{n}{\alpha}-N_{p,r}-\frac{n}{q}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\int_{Q_{r,k}}|C_k|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\\&\lesssim r^{\frac{n}{\alpha}-N_{p,r}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|C_k|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

其中 $C_k=\left\|f\chi_{Q_{r,k}}\right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$, $Q_{r,k}=rk+[0,r)^n(k\in\mathbb{Z}^n)$.

因此, 证明了

$$\left\|r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p(\cdot)}-\frac{n}{q}}\|f\chi_{B(\cdot,2\sqrt{n}r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\lesssim r^{\frac{n}{\alpha}-N_{p,r}}\left\|\left\{\left\|f\chi_{Q_{r,k}}\right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\}_{k\in\mathbb{Z}^n}\right\|_{\ell^q(\mathbb{R}^n)}.$$

接下来证明反向不等式. 显然可得

$$r^{\frac{n}{q}}\left\|\left\{\left\|f\chi_{Q_{r,k}}\right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\}_{k\in\mathbb{Z}^n}\right\|_{\ell^q(\mathbb{R}^n)}=\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left\|f\chi_{Q_{r,k}}\right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\chi_{Q_{r,k}}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

根据 $Q_{r,k}\subset B(x,2\sqrt{n}r)$, 其中 $x\in Q_{r,k}$, 有

$$\begin{aligned}r^{\frac{n}{\alpha}-N_{p,r}}\left\|\left\{\left\|f\chi_{Q_{r,k}}\right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\}_{k\in\mathbb{Z}^n}\right\|_{\ell^q(\mathbb{R}^n)}&=\left\|r^{\frac{n}{\alpha}-N_{p,r}-\frac{n}{q}}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left\|f\chi_{Q_{r,k}}\right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\chi_{Q_{r,k}}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\&\lesssim\left\|r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p(\cdot)}-\frac{n}{q}}\left\|f\chi_{B(\cdot,2\sqrt{n}r)}\right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

引理得证.

命题 4 的证明: 根据引理 7 可知

$$\sup_{r>0}\left\|r^{\frac{n}{\alpha}-N_{p,r}}\left\{\|f\chi_{Q_{r,k}}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\}_{k\in\mathbb{Z}^n}\right\|_{\ell^q(\mathbb{R}^n)}\sim\sup_{r>0}\left\||B(\cdot,r)|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|f\chi_{B(\cdot,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

当 $r=1$ 时, 可得

$$\left\|\left\{\|f\chi_{Q_{1,k}}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\}_{k\in\mathbb{Z}^n}\right\|_{\ell^q(\mathbb{R}^n)}\sim\left\|\|f\chi_{B(\cdot,1)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

下面给出“离散”变指标 Fofana 空间 $(L^{p(\cdot)},\ell^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 的预对偶空间.

定义 2 设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $1\le q$, $\alpha\le\infty$ 和 $p(\cdot)\le\alpha\le q$. 空间 $\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')$ 定义为 $L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 中所有满足以下条件元素的集合. 存在 $\mathbb{C}\times(0,\infty)\times(L^{p(\cdot)'},\ell^{q'})(\mathbb{R}^n)$ 中的元素序列 $\{(c_j,r_j,f_j)\}_{j\ge1}$ 使得

$$f:=\sum_{j\ge1}c_jSt^{(\alpha')}_{r_j}(f_j),\quad f\in L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)\tag{3}$$

$$\|f_j\|_{p(\cdot)',q'}\le1,\quad j\ge1\tag{4}$$

$$\sum_{j\ge1}|c_j|<\infty\tag{5}$$

称 $\mathbb{C}\times(0,\infty)\times(L^{p(\cdot)'},\ell^{q'})(\mathbb{R}^n)$ 中满足式 (3)~(5) 的元素序列 $\{(c_j,r_j,f_j)\}_{j\ge1}$ 为 f 的块分解. 对于 $\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')$ 中任意元素 f

$$\|f\|_{\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')}:=\inf\left\{\sum_{j\ge1}|c_j|:f:=\sum_{j\ge1}c_jSt^{(\alpha')}_{r_j}(f_j)\right\},$$

其中下确界取遍 f 的所有块分解.

接下来讨论扩张算子 $St^{(\alpha)}_r:f\mapsto r^{-\frac{n}{\alpha}}f(r^{-1}\cdot)$ 的性质. 由直接计算可得以下命题.

命题 5 设 $f\in L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $0<\alpha<\infty$ 和 $0<r<\infty$, 则有

(i) $St^{(\alpha)}_r$ 是 $L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 的自身映射.

(ii) $f=St^{(\alpha)}_1(f)$.

(iii) $St^{(\alpha)}_{r_1}\circ St^{(\alpha)}_{r_2}=St^{(\alpha)}_{r_2}St^{(\alpha)}_{r_2}=St^{(\alpha)}_{r_1r_2}$.

(iv) $\sup_{r>0}\|St^{(\alpha)}_r(f)\|_{p(\cdot),q}=\|f\|_{p(\cdot),q,\alpha}$, 其中 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $1\le q,\alpha\le\infty$ 和 $p(\cdot)\le\alpha\le q$.

根据命题 5 和定义 2 可以得到以下结果.

命题 6 设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $1\le q,\alpha\le\infty$ 和 $p(\cdot)\le\alpha\le q$, 则 $(L^{p(\cdot)'},\ell^{q'})(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')$ 的稠密子集.

证明 首先证明 $(L^{p(\cdot)'},\ell^{q'})(\mathbb{R}^n)$ 连续嵌入到 $\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')$. 假设对于任意 $0\neq f\in(L^{p(\cdot)'},\ell^{q'})(\mathbb{R}^n)$, 可得

$$f=\|f\|_{p(\cdot)',q'}St_1^{\alpha}(\|f\|_{p(\cdot)',q'}^{-1}f) \tag{6}$$

和

$$\left\|\|f\|_{p(\cdot)',q'}^{-1}f\right\|_{p(\cdot)',q'}=1.$$

因此, $f\in\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')$ 满足

$$\|f\|_{\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')}\leq\|f\|_{p(\cdot)',q'} \tag{7}$$

接下来证明 $(L^{p(\cdot)'},\ell^{q'})(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')$ 中的稠密性. 若 $\{(c_j,r_j,f_j)\}_{j\geq1}$ 是 $f\in\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')$ 的块分解, 则取序列

$$\left\{\sum_{j=1}^{J}c_jSt_{r_j}^{(\alpha')}(f_j)\right\}_{J\geq1}\subset(L^{p(\cdot)'},\ell^{q'})(\mathbb{R}^n),$$

可得

$$\left\|f-\sum_{j=1}^{J}c_jSt_{r_j}^{(\alpha')}(f_j)\right\|_{\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')}=\left\|\sum_{j=J+1}^{\infty}c_jSt_{r_j}^{(\alpha')}(f_j)\right\|_{\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')}\leq\sum_{j=J+1}^{\infty}|c_j|\to0\ \ (J\to\infty).$$

因此, $(L^{p(\cdot)'},\ell^{q'})(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')$ 的稠密子集.

定理 1 (i) 设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n),1\leq q,\alpha\leq\infty$ 和 $p(\cdot)\leq\alpha\leq q$. 若 $g\in(L^{p(\cdot)},\ell^q)^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ 和 $f\in\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')$, 则有 $fg\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\lesssim\|g\|_{p(\cdot),q,\alpha}\|f\|_{\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')} \tag{8}$$

(ii) 设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $1\leq q,\alpha\leq\infty$ 和 $p(\cdot)\leq\alpha\leq q$. 算子 $T:g\mapsto T_g$ 定义为

$$<T_g,f>=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(x)\mathrm{d}x,\ \ g\in(L^{p(\cdot)},\ell^q)^{\alpha}(\mathbb{R}^n)\text{ 和 }f\in\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha'),$$

使得 $(L^{p(\cdot)},\ell^q)^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ 与 $\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')^*$ 是等距同构的.

接下来证明定理 1, 证明方法参阅文献 [9]. 首先证明以下引理.

引理 8 (i) 设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $1<q<\infty$. 对于 $0<r<\infty$, 有

$$\|fg\|_1\lesssim_r\|f\|_{p(\cdot),q}\cdot_r\|g\|_{p(\cdot)',q'},\quad f,g\in L_{\mathrm{loc}}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \tag{9}$$

(ii) 设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $1<q<\infty$. $(L^{p(\cdot)},\ell^q)(\mathbb{R}^n)$ 的对偶空间是 $(L^{p(\cdot)'},\ell^{q'})(\mathbb{R}^n)$.

证明 (i) 对于 $0<r<\infty$, 由 Hölder 不等式, 有

$$\|fg\|_1\lesssim_r\|f\|_{p(\cdot),q}\cdot_r\|g\|_{p(\cdot)',q'},\ \ f,g\in L_{\mathrm{loc}}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n).$$

(ii) 根据文献 [10] 的定理 2 和文献 [2] 的定理 2.6, 可得 $(L^{p(\cdot)},\ell^q)(\mathbb{R}^n)$ 的对偶空间是 $(L^{p(\cdot)'},\ell^{q'})(\mathbb{R}^n)$. 令 $q=\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 若 $(L^{p(\cdot)},\ell^{\bar{q}})(\mathbb{R}^n)$ 的对偶空间是 $(L^{p(\cdot)'},\ell^{\bar{q}'})(\mathbb{R}^n)$, 其中 $\bar{q}=(q_1,q_2,\cdots,q_{n-1})$, 则

$$\begin{aligned}(L^{p(\cdot)},\ell^q)^*&=\left(\prod(L^{p(\cdot)},\ell^{\bar{q}}),\ell^{q_n}\right)^*=\left(\prod(L^{p(\cdot)},\ell^{\bar{q}})^*,(\ell^{q_n})^*\right)\\&=\left(\prod(L^{p(\cdot)'},\ell^{\bar{q}'}),\ell^{q_n'}\right)=(L^{p(\cdot)'},\ell^{q'}).\end{aligned}$$

因此, $(L^{p(\cdot)'},\ell^{q'})(\mathbb{R}^n)$ 与 $(L^{p(\cdot)},\ell^q)(\mathbb{R}^n)$ 的对偶空间等距同构. $(L^{p'(\cdot)},\ell^{q'})(\mathbb{R}^n)$ 中有一个特殊的元素 $\phi(T)$ 使得

$$T(f)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\phi(T)(x)\mathrm{d}x,\ \ f\in(L^{p(\cdot)},\ell^q)(\mathbb{R}^n),$$

并且

$$\|\phi(T)\|_{p(\cdot)',q'}=\|T\| \tag{10}$$

其中 $\|T\|:=\sup\left\{|T(f)|:f\in L^{p(\cdot)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)\text{ 且 }\|f\|_{p(\cdot),q}\le 1\right\}$.

定理 1 的证明: 首先证明 (i). 令 $\{(c_j,r_j,f_j)\}_{j\ge1}$ 是 f 的块分解. 对任意的 $j\ge1$, 由命题 6 和式 (9) 可得

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n} St^{(\alpha')}_{r_j}(f_j)(x)g(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} St^{(\alpha)}_{r_j^{-1}}(g)(x)f_j(x)\mathrm{d}x\right|\\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n}\left|St^{(\alpha)}_{r_j^{-1}}(g)(x)f_j(x)\right|\mathrm{d}x\\ &\lesssim \|f_j\|_{p(\cdot)',q'}\left\|St^{(\alpha)}_{r_j^{-1}}(g)\right\|_{p(\cdot),q}\\ &\lesssim \left\|St^{(\alpha)}_{r_j^{-1}}(g)\right\|_{p(\cdot),q}\\ &\lesssim \|g\|_{p(\cdot),q,\alpha}.\end{aligned}$$

因此,

$$\sum_{j\ge1}\int_{\mathbb{R}^n}\left|c_jSt^{(\alpha')}_{r_j}(f_j)(x)g(x)\right|\mathrm{d}x\lesssim\|g\|_{p(\cdot),q,\alpha}\sum_{j\ge1}|c_j|.$$

上式意味着 $fg=g\sum_{j\ge1}c_jSt^{(\alpha')}_{r_j}(f_j)\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 并且

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\lesssim\|g\|_{p(\cdot),q,\alpha}\sum_{j\ge1}|c_j|.$$

对 f 的所有块分解取下确界, 可得

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\lesssim\|g\|_{p(\cdot),q,\alpha}\|f\|_{\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')}.$$

其次证明 (ii). 由 (i) 可知 $T_g\in\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')^*$.

对任意的 $a_1,a_2\in\mathbb{R}$, $g_1,g_2\in(L^{p(\cdot)},\ell^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$, 显然可得

$$T(a_1g_1+a_2g_2)=a_1T_{g_1}+a_2T_{g_2}$$

和

$$\|T_g\|=\sup_{\|f\|_{\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')}\le1}|T_g(f)|\le\|g\|_{p(\cdot),q,\alpha},$$

即 T 是线性的并且是从 $(L^{p(\cdot)},\ell^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathcal{H}(p(\cdot)',p(\cdot)',\alpha')^*$ 的有界映射, 满足 $\|T\|\le1$. 对任意的 $g_1,g_2\in(L^{p(\cdot)},\ell^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)\subset(L^{p(\cdot)},\ell^q)(\mathbb{R}^n)$, 若 $T_{g_1}=T_{g_2}$, 则对任意 $f\in(L^{p(\cdot)'},\ell^{q'})(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')$, 有 $T_{g_1}(f)=T_{g_2}(f)$.

故 $g_1=g_2$, 也就是说 T 是单射.

接下来证明 T 是满射. 设 T 是 $\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')^*$ 中的元素, 根据命题 6 可知, $(L^{p(\cdot)'},\ell^{q'})(\mathbb{R}^n)$ 中元素 T 的限制 $T_0\in\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')^*$, 故有 $1/p(\cdot)'\le1/\alpha'\le1/q'$.

$(L^{p(\cdot)},\ell^q)(\mathbb{R}^n)$ 中有元素 g, 使得对任意 $f\in(L^{p(\cdot)'},\ell^{q'})(\mathbb{R}^n)$ 有

$$T(f)=T_0(f)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(x)\mathrm{d}x\tag{11}$$

因此, 对于 $f\in(L^{p(\cdot)'},\ell^{q'})(\mathbb{R}^n)$ 和 $r>0$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n}St^{(\alpha)}_r(g)(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}g(x)St^{(\alpha')}_{r^{-1}}(f)(x)\mathrm{d}x=T\left[St^{(\alpha')}_{r^{-1}}(f)\right].$$

根据假设 $T\in\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')^*$, 有 $St^{(\alpha')}_{r^{-1}}(f)\in\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')$ 再利用式 (7), 可得

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}St^{(\alpha)}_r(g)(x)f(x)\mathrm{d}x\right|\le\|T\|\|St^{(\alpha')}_{r^{-1}}(f)\|_{\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')}=\|T\|\|f\|_{\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')}\le\|T\|\cdot\|f\|_{p(\cdot)',q'}.$$

由式 (10), 可得 $St_r^{(\alpha)}(g)\in(L^{p(\cdot)},\ell^q)(\mathbb{R}^n)$ 且 $\|St_r^{(\alpha)}(g)\|_{p(\cdot),q}\le\|T\|$.
则对任意 $g\in(L^{p(\cdot)},\ell^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$, 由命题 5 可知

$$\|g\|_{p(\cdot),q,\alpha}\le\|T\|.$$

根据式 (11) 和命题 6 , 可得

$$T(f)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)g(x)\mathrm{d}x,\ \ f\in\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha').$$

故 T 是满射且 $\|g\|_{p(\cdot),q,\alpha}\le\|T\|$.
引理 9 设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $1\le q,\ \alpha\le\infty$, $p(\cdot)\le\alpha\le q$ 和 $\chi_{B(x_0,r_0)}$ 是在球体 $B(x_0,r_0)$ 上的特征函数, 则

$$\|\chi_{B(x_0,r_0)}\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}\lesssim r_0^{n/\alpha+C_p}\ 和\ \|\chi_{B(x_0,r_0)}\|_{\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')}\lesssim r_0^{n/\alpha'}.$$

$$C_p=\begin{cases}\frac{n}{p_-}-\frac{n}{p^+} & r>r_0\ge 1,\\ 0 & r>1>r_0,\ r<r_0,\\ \frac{n}{p^+}-\frac{n}{p_-} & 1\ge r>r_0.\end{cases}$$

证明 由计算可得

$$\|\chi_{B(x_0,r_0)}\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}\sim\sup_{r>0}\left\|r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p(\cdot)}-\frac{n}{q}}\|\chi_{B(x_0,r_0)}\chi_{B(x,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

若 $r>r_0$, $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. 当 $r>r_0\ge 1$ 时, 则由 $n/\alpha-n/p(\cdot)\le 0$, 可知

$$\begin{aligned}&\sup_{r>r_0}\left\|r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p(\cdot)}-\frac{n}{q}}\|\chi_{B(x_0,r_0)}\chi_{B(\cdot,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\ &\lesssim\sup_{r>r_0}r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p^+}-\frac{n}{q}}\left\|\|\chi_{B(x_0,r_0)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\cdot\chi_{B(x_0,r+r_0)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\ &\lesssim r_0^{\frac{n}{p_-}}\sup_{r>r_0}r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p^+}}(1+\frac{r_0}{r})^{\frac{n}{q}}\\ &\lesssim r_0^{\frac{n}{\alpha}+C_p}.\end{aligned}$$

当 $r>1>r_0$ 时, 则由 $n/\alpha-n/p(\cdot)\le 0$, 可知

$$\begin{aligned}&\sup_{r>r_0}\left\|r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p(\cdot)}-\frac{n}{q}}\|\chi_{B(x_0,r_0)}\chi_{B(\cdot,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\ &\lesssim\sup_{r>r_0}r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p^+}-\frac{n}{q}}\left\|\|\chi_{B(x_0,r_0)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\cdot\chi_{B(x_0,r+r_0)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\ &\lesssim r_0^{\frac{n}{p^+}}\sup_{r>r_0}r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p^+}}(1+\frac{r_0}{r})^{\frac{n}{q}}\\ &\lesssim r_0^{\frac{n}{\alpha}+C_p}.\end{aligned}$$

当 $1\ge r>r_0$ 时, 则由 $n/\alpha-n/p(\cdot)\le 0$, 可知

$$\begin{aligned}&\sup_{r>r_0}\left\|r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p(\cdot)}-\frac{n}{q}}\|\chi_{B(x_0,r_0)}\chi_{B(\cdot,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\ &\lesssim\sup_{r>r_0}r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p_-}-\frac{n}{q}}\left\|\|\chi_{B(x_0,r_0)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\cdot\chi_{B(x_0,r+r_0)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\ &\lesssim r_0^{\frac{1}{p^+}}\sup_{r>r_0}r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{p_-}}(1+\frac{r_0}{r})^{\frac{n}{q}}\\ &\lesssim r_0^{\frac{n}{\alpha}+C_p}.\end{aligned}$$

若 $r\le r_0$, $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, 由 $1/\alpha-1/q\ge 0$, 有

$$\begin{aligned}&\sup_{r\le r_0} r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{q}}\left\|\frac{1}{\|\chi_{B(\cdot,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}\|\chi_{B(x_0,r_0)}\chi_{B(\cdot,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\ &\lesssim \sup_{r\le r_0} r^{\frac{n}{\alpha}-\frac{n}{q}}\left\|\frac{1}{\|\chi_{B(\cdot,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}\cdot\|\chi_{B(\cdot,r)}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\chi_{B(x_0,r+r_0)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\ &=\sup_{0<r\le r_0} r^{\frac{n}{\alpha}}(1+\frac{r_0}{r})^{\frac{n}{q}}\\ &\lesssim r_0^{\frac{n}{\alpha}+C_p}.\end{aligned}$$

故 $\|\chi_{B(x_0,r_0)}\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}\lesssim r_0^{n/\alpha+C_p}$.

接下来证明 $\|\chi_{B(x_0,r_0)}\|_{\mathcal{H}(p(\cdot),q',\alpha')}\lesssim r_0^{n/\alpha'}$. 根据与式 (6) 相似的估计, 有

$$\chi_{B(x_0,r_0)}=r^{\frac{n}{\alpha'}}\|\chi_{B(x_0/r,r_0/r)}\|_{p(\cdot)',q'}\cdot St_r^{\alpha'}(\|\chi_{B(x_0/r,r_0/r)}\|^{-1}_{p(\cdot)',q'}\chi_{B(x_0/r,r_0/r)}).$$

因此,

$$\left\|\|\chi_{B(x_0/r,r_0/r)}\|^{-1}_{p(\cdot)',q'}\chi_{B(x_0/r,r_0/r)}\right\|_{p(\cdot)',q'}\le 1.$$

根据定义 2 和命题 4,

$$\begin{aligned}\|\chi_{B(x_0,r_0)}\|_{\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')}&\lesssim\sup_{r>0} r^{\frac{n}{\alpha'}}\|\chi_{B(x_0/r,r_0/r)}\|_{p(\cdot)',q'}\\ &\lesssim\sup_{r>0} r^{\frac{n}{\alpha'}}\left\|\|\chi_{B(x_0/r,r_0/r)}\chi_{B(\cdot,1)}\|_{L^{p(\cdot)'}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

利用与 $\|\chi_{B(x_0,r_0)}\|_{(L^{p(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}\lesssim r_0^{n/\alpha+C_p}$ 证明相似的估计, 取 $r_0/r>1$ 和 $r_0/r\le 1$, 有

$$\|\chi_{B(x_0,r_0)}\|_{\mathcal{H}(p(\cdot)',q',\alpha')}\lesssim\sup_{r>0} r^{\frac{n}{\alpha'}}\left\|\|\chi_{B(x_0/r,r_0/r)}\chi_{B(\cdot,1)}\|_{L^{p(\cdot)'}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}\lesssim r_0^{n/\alpha'}.$$

引理得证.

4 变指标 Fofana 空间中分数次积分算子及其交换子有界性的刻画

引理 10 设 $b\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. 对任意的球体 $B\in\mathbb{R}^n$ 和任意的正整数 $j\in\mathbb{Z}^+$, 有

$$|b_{2^{j+1}B}-b_B|\lesssim(j+1)\|b\|_*.$$

证明

$$\begin{aligned}|b_{2^{j+1}B}-b_B|&\lesssim\sum_{k=0}^{j}|b_{2^{k+1}B}-b_{2^kB}|\\ &\lesssim\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{|2^kB|}\int_{2^kB}|b(y)-b_{2^{k+1}B}|\mathrm{d}y\\ &\lesssim\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{|2^kB|}\|(b-b_{2^{k+1}B})\chi_{2^{k+1}B}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_{2^{k+1}B}\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\ &\lesssim\|b\|_*\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{|2^kB|}\|\chi_{2^{k+1}B}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_{2^{k+1}B}\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\ &\lesssim(j+1)\|b\|_*.\end{aligned}$$

引理 11[17] 设 $p(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, k 是一个正整数, 球体 $B\in\mathbb{R}^n$, 则对所有的 $b\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ 和所有的 $j,i\in\mathbb{Z}(j>i)$,

$$\frac{1}{C}\|b\|_*^k\le\sup_B\frac{1}{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}\|(b-b_B)^k\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\le C\|b\|_*^k,$$

$$\|(b-b_{B_i})^k\chi_{B_j}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\le C(j-i)^k\|b\|_*^k\|\chi_{B_j}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)},$$

其中 $B_i=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\le 2^i\}$ 和 $B_j=\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\le 2^j\}$.

引理 12[6] 给定开集 $\Omega\in\mathbb{R}^n$, $0<\alpha<n$, $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\Omega)$ 满足引理 1 的条件 (1) 和 (2), 定义 $q(\cdot):\Omega\to[1,\infty)$ 满足 $1/p(\cdot)-1/q(\cdot)=\alpha/n$, 则分数次积分算子 I_α 是从 $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ 到 $L^{q(\cdot)}(\Omega)$ 的有界算子.

引理 13[8] 假设 $p_1(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 满足引理 1 的条件 (1) 和 (2), $0<\alpha<n/{p_1}^+$, 定义变指标 $p_2(\cdot)$ 满足 $1/p_1(\cdot)-1/p_2(\cdot)=\alpha/n$. 若 $f\in L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 和 $b\in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, 则有

$$\|[b,I_\alpha]f\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\lesssim\|b\|_*\|f\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

定理 2 设 $p_1(\cdot),p_2(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 满足引理 1 的条件 (1) 和 (2), $0<\gamma<n/p_1^+$, $1\le q,\alpha\le\infty$ 和 $p_1(\cdot)<\alpha<q<\infty$, $p_2(\cdot)<\beta<q<\infty$. 假设 $n/p_1(\cdot)-n/p_2(\cdot)=\gamma$, 则分数次积分算子 I_γ 是从 $(L^{p_1(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 到 $(L^{p_2(\cdot)},L^q)^\beta(\mathbb{R}^n)$ 的有界算子当且仅当 $\gamma=n/\alpha-n/\beta$.

注 1 条件 $\gamma=n/\alpha-n/\beta$ 对于分数次积分算子 I_γ 有界是必要的. 令 $\delta_t f(x)=f(tx)(t>0)$, 则

$$I_\gamma(\delta_t f)=t^{-\gamma}\delta_t I_\gamma(f).$$

$$\|\delta_{t^{-1}}f\|_{(L^{p_2(\cdot)},L^q)^\beta(\mathbb{R}^n)}=t^{\frac{n}{\beta}-\frac{1}{q}}\|f\|_{(L^{p_2(\cdot)},L^q)^\beta(\mathbb{R}^n)}.$$

$$\|\delta_t f\|_{(L^{p_1(\cdot)},L^s)^\alpha(\mathbb{R}^n)}=t^{-\frac{n}{\alpha}+\frac{1}{s}}\|f\|_{(L^{p_1(\cdot)},L^s)^\alpha(\mathbb{R}^n)}.$$

因此利用 I_γ 是从 $(L^{p_1(\cdot)},L^s)^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 到 $(L^{p_2(\cdot)},L^q)^\beta(\mathbb{R}^n)$ 的有界算子, 可知

$$\begin{aligned}\|I_\gamma f\|_{(L^{p_2(\cdot)},L^q)^\beta(\mathbb{R}^n)}&=t^\gamma\|\delta_{t^{-1}}I_\gamma(\delta_t f)\|_{(L^{p_2(\cdot)},L^q)^\beta(\mathbb{R}^n)}\\&=t^{\gamma+\frac{n}{\beta}-\frac{1}{q}}\|I_\gamma(\delta_t f)\|_{(L^{p_2(\cdot)},L^q)^\beta(\mathbb{R}^n)}\\&\lesssim t^{\gamma+\frac{n}{\beta}-\frac{1}{q}}\|\delta_t f\|_{(L^{p_1(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}\\&=t^{\gamma+\frac{n}{\beta}-\frac{1}{q}-\frac{n}{\alpha}+\frac{1}{q}}\|f\|_{(L^{p_1(\cdot)},L^s)^\alpha(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

故 $\gamma=n/\alpha-n/\beta$.

定理 2 的证明: 通过注 1, 只需证明若 $\gamma=n/\alpha-n/\beta$, 则 I_γ 在变指标 Fofana 空间上有界. 设 $p_1(\cdot),p_2(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $p_1(\cdot)<\alpha<q<\infty$, $p_2(\cdot)<\beta<q<\infty$, $0<\gamma<n/p_1^+$, $n/p_1(\cdot)-n/p_2(\cdot)=\gamma, n/\alpha-n/\beta=\gamma$ 和 $f\in(L^{p_1(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$. 固定 $x\in\mathbb{R}^n$, $r>0$, 记 $B=B(x,r),2B=B(x,2r)$. 分解 $f=f_1+f_2$, 其中 $f_1=f\chi_{2B}$, $f_2=f-f_1$. 计算得

$$\begin{aligned}|B|^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{p_2(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|I_\gamma f\chi_B\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}&\le|B|^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{p_2(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|I_\gamma f_1\chi_B\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}+|B|^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{p_2(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|I_\gamma f_2\chi_B\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\&:=I_1+I_2.\end{aligned}$$

首先估计 I_1. 因为分数次积分算子 I_γ 是从 $L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 的有界算子并且 $n/p_1(\cdot)-n/p_2(\cdot)=\gamma$, $n/\alpha-n/\beta=\gamma$, 因此可得 $1/\beta-1/p_2(\cdot)-1/q=1/\alpha-1/p_1(\cdot)-1/q$. 再利用 $-1<1/\alpha-1/p_{1_-}-1/q<1/\alpha-1/p_1(\cdot)-1/q<0$, 则有

$$\begin{aligned}I_1&\lesssim|B|^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{p_2(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|I_\gamma f_1\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\&\lesssim|2B|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p_1(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|f\chi_{2B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\left(\frac{|B|}{|2B|}\right)^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p_{1_-}}-\frac{1}{q}}\\&\lesssim|2B|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p_1(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|f\chi_{2B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

接下来估计 I_2, 当 $y\in B(x,r)$, $z\in B(x,2r)^c$ 时, 显然 $|y-z|\approx|x-z|$, 将 $\mathbb{R}^n$ 分解为几何递增的同心球序列, 利用广义 Hölder 不等式, 可得

$$\begin{aligned}|I_\gamma f_2(y)|&\lesssim\int_{(2B)^c}\frac{|f(z)|}{|y-z|^{n-\gamma}}\mathrm{d}z\lesssim\sum_{j=1}^\infty\int_{2^{j+1}B\backslash 2^jB}\frac{|f(z)|}{|x-z|^{n-\gamma}}\mathrm{d}z\\&\lesssim\sum_{j=1}^\infty|2^{j+1}B|^{\frac{\gamma}{n}-1}\int_{2^{j+1}B}|f(z)|\mathrm{d}z\lesssim\sum_{j=1}^\infty|2^{j+1}B|^{\frac{\gamma}{n}-1}\|f\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

因为 $n/p_1(\cdot)-n/p_2(\cdot)=\gamma$, $n/\alpha-n/\beta=\gamma$, 由此可得 $1/\beta-1/p_2(\cdot)-1/q=1/\alpha-1/p_1(\cdot)-1/q$. 根据以上估计, 由引理 3 和 $1/\beta-1/q>0$, 可知

$$\begin{aligned}
I_2 &\lesssim |B|^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{p_2(\cdot)}-\frac{1}{q}}\sum_{j=1}^{\infty}|2^{j+1}B|^{\frac{\gamma}{n}-1}\|f\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_B\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\
&\lesssim \sum_{j=1}^{\infty}|2^{j+1}B|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p_1(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|f\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\frac{\|\chi_B\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}\frac{|B|^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{p_2(\cdot)}-\frac{1}{q}}}{|2^{j+1}B|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p_1(\cdot)}-\frac{1}{q}}}\\
&\lesssim \sum_{j=1}^{\infty}|2^{j+1}B|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p_1(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|f\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\times\frac{\|\chi_B\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}\frac{\|\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_B\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}\times\left(\frac{|B|}{|2^{j+1}B|}\right)^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{q}}\\
&\lesssim \sum_{j=1}^{\infty}|2^{j+1}B|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p_1(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|f\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\times\left(\frac{1}{2^{(j+1)n}}\right)^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

两边同时取 L^q -范数并利用 Minkowski 不等式, 可得

$$\begin{aligned}
&\left\||B|^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{p_2(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|I_\gamma f\chi_B\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\
&\le \|I_1\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}+\|I_2\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\
&\lesssim\left(\left\||2B|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p_1(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|f\chi_{2B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}+\sum_{j=1}^{\infty}\left\||2^{j+1}B|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p_1(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|f\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\left(\frac{1}{2^{(j+1)n}}\right)^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

故两边同时对 $r>0$ 取上确界, 定理得证.

定理 3 设 $p_1(\cdot),p_2(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 满足引理 1 的条件 (1) 和 (2), $0<\gamma<n/p_1^+$, $1\le q,\alpha\le\infty$, $p_1(\cdot)<\alpha<q<\infty$ 和 $p_2(\cdot)<\beta<q<\infty$. 假设 $n/p_1(\cdot)-n/p_2(\cdot)=\gamma$ 和 $n/\alpha-n/\beta=\gamma$, 则下列条件等价:

(i) $b\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$;

(ii) 线性交换子 $[b,I_\gamma]$ 是从 $(L^{p_1(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 到 $(L^{p_2(\cdot)},L^q)^\beta(\mathbb{R}^n)$ 的有界算子.

证明 设 $p_1(\cdot),p_2(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $p_1(\cdot)<\alpha<q<\infty$, $p_2(\cdot)<\beta<q<\infty$, $0<\gamma<n/p_1^+$, $n/p_1(\cdot)-n/p_2(\cdot)=\gamma$, $n/\alpha-n/\beta=\gamma$, $f\in(L^{p_1(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 和 $b\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. 固定 $x\in\mathbb{R}^n$, $r>0$, 记 $B=B(x,r)$, $2B=B(x,2r)$. 分解 $f=f_1+f_2$, 其中 $f_1=f\chi_{2B}$, $f_2=f-f_1$. 计算可得

$$\begin{aligned}
|B|^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{p_2(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|[b,I_\gamma]f\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}&\le|B|^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{p_2(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|[b,I_\gamma]f_1\chi_B\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}+|B|^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{p_2(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|[b,I_\gamma]f_2\chi_B\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\
&:=J_1+J_2.
\end{aligned}$$

首先估计 J_1. 因为交换子 $[b,I_\gamma]$ 是从 $L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$的有界算子并且 $n/p_1(\cdot)-n/p_2(\cdot)=\gamma$, $n/\alpha-n/\beta=\gamma$, 由此可得 $1/\beta-1/p_2(\cdot)-1/q=1/\alpha-1/p_1(\cdot)-1/q$. 再利用 $-1<1/\alpha-1/p_{1\_}-1/q<1/\alpha-1/p_1(\cdot)-1/q<0$, 可得

$$\begin{aligned}
J_1&\le|B|^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{p_2(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|[b,I_\gamma]f_1\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\
&\lesssim\|b\|_*|2B|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p_1(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|f\chi_{2B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\times\left(\frac{|B|}{|2B|}\right)^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p_{1_}}-\frac{1}{q}}\\
&\lesssim\|b\|_*|2B|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p_1(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|f\chi_{2B}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

接下来估计 J_2.

$$\begin{aligned}
|[b,I_\gamma]f_2(x)|&=\big|(b(y)-b_B)I_\gamma f_2(y)+I_\gamma\big((b-b_B)f_2(y)\big)\big|\\
&\le\big|(b(y)-b_B)I_\gamma f_2(y)\big|+\big|I_\gamma\big((b-b_B)f_2(y)\big)\big|.
\end{aligned}$$

当 $y\in B(x,r)$, $z\in B(x,2r)^c$ 时, 显然 $|y-z|\approx|x-z|$, 将 $\mathbb{R}^n$ 分解为几何递增的同心球序列, 利用广义 Hölder

不等式, 可得

$$\begin{aligned}|(b(y)-b_B)I_\gamma f_2(y)|&\lesssim|(b(y)-b_B)|\int_{2B^c}\frac{|f(z)|}{|x-z|^{n-\gamma}}\mathrm{d}z\\&\lesssim|(b(y)-b_B)|\sum_{j=1}^{\infty}|2^{j+1}B|^{\frac{\gamma}{n}-1}\int_{2^{j+1}B\backslash 2^jB}|f(z)|\mathrm{d}z\\&\lesssim|(b(y)-b_B)|\sum_{j=1}^{\infty}|2^{j+1}B|^{\frac{\gamma}{n}-1}\|f\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.\\|I_\gamma((b(y)-b_B)f_2)(y)|&\lesssim\int_{2B^c}\frac{|f(z)||(b(y)-b_B)|}{|x-z|^{n-\gamma}}\mathrm{d}z\\&\lesssim\sum_{j=1}^{\infty}|2^{j+1}B|^{\frac{\gamma}{n}-1}\int_{2^{j+1}B\backslash 2^jB}|f(z)||(b(y)-b_B)|\mathrm{d}z\\&\lesssim\sum_{j=1}^{\infty}|2^{j+1}B|^{\frac{\gamma}{n}-1}\|f\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|(b(y)-b_B)\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

根据以上估计, 利用引理 10、引理 11 和 $-1<1/\beta-1/p_2(\cdot)-1/q=1/\alpha-1/p_1(\cdot)-1/q<0$, $1/\beta-1/q>0$, 可得

$$\begin{aligned}J_2&\lesssim|B|^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{p_2(\cdot)}-\frac{1}{q}}\sum_{j=1}^{\infty}|2^{j+1}B|^{\frac{\gamma}{n}-1}\|f\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\&\quad\times\left(\|(b-b_B)\chi_B\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}+\|(b-b_B)\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_B\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right)\\&\lesssim|B|^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{p_2(\cdot)}-\frac{1}{q}}\sum_{j=1}^{\infty}|2^{j+1}B|^{\frac{\gamma}{n}-1}\|f\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\&\quad\times\left(\|b\|_*\|\chi_B\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}+\|(b-b_{2^{j+1}B})\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_B\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right.\\&\quad\left.+\|(b_B-b_{2^{j+1}B})\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_B\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right)\\&\lesssim|B|^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{p_2(\cdot)}-\frac{1}{q}}\sum_{j=1}^{\infty}|2^{j+1}B|^{\frac{\gamma}{n}-1}\|f\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\&\quad\times\left(\|b\|_*\|\chi_B\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}+(j+1)\|b\|_*\|\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_B\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right)\\&\lesssim\|b\|_*|B|^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{p_2(\cdot)}-\frac{1}{q}}\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)|2^{j+1}B|^{\frac{\gamma}{n}-1}\|f\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_B\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\\&\lesssim\|b\|_*\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)|2^{j+1}B|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p_1(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|f\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\frac{\|\chi_B\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}\frac{|B|^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{p_2(\cdot)}-\frac{1}{q}}}{|2^{j+1}B|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p_1(\cdot)}-\frac{1}{q}}}\\&\lesssim\|b\|_*\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)|2^{j+1}B|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p_1(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|f\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\times\left(\frac{|B|}{|2^{j+1}B|}\right)^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{q}}\\&\lesssim\|b\|_*\sum_{j=1}^{\infty}|2^{j+1}B|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p_1(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|f\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\times\left(\frac{(j+1)}{2^{(j+1)n(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{q})}}\right).\end{aligned}$$

两边同时取 L^q -范数再利用 Minkowski 不等式, 可知

$$\begin{aligned}&\left\||B|^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{p_2(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|[b,I_\gamma]f\chi_B\|_{L^{p_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\\&\le\|J_1\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}+\|J_2\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\lesssim\|b\|_*\left(\left\||2B|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p_1(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|f\chi_{2B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\right.\\&\quad\left.+\sum_{j=1}^{\infty}\left\||2^{j+1}B|^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p_1(\cdot)}-\frac{1}{q}}\|f\chi_{2^{j+1}B}\|_{L^{p_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\left(\frac{(j+1)}{2^{(j+1)n(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{q})}}\right)\right).\end{aligned}$$

故两边同时对 $r>0$ 取上确界, 可得 J_2 的估计.

假设 $[b,I_\gamma]$ 是从 $(L^{p_1(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)$ 到 $(L^{p_2(\cdot)},L^q)^\beta(\mathbb{R}^n)$ 的有界算子. 利用 Janson[18] 的方法. 取 $0\neq z_0\in\mathbb{R}^n$ 使得 $0\notin B(z_0,2)$. 则有 $x\in B(z_0,2)$, $|x|^{n-\gamma}\in C^\infty(B(z_0,2))$. 因此, $|x|^{n-\gamma}$ 可以记为绝对收敛的 Fourier 级数:

$$|x|^{n-\gamma}\chi_{B(z_0,2)}(x)=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}a_m e^{2im\cdot x}\chi_{B(z_0,2)}(x),$$

其中 $\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}|a_m|<\infty$.

对任意的 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 和 $t>0$, 记 $B=B(x_0,t)$ 和 $B_{z_0}=B(x_0+z_0t,t)$, 则

$$\frac{1}{|B|}\int_B|b(x)-b_{B_{z_0}}|\mathrm{d}x=\frac{1}{|B|}\frac{1}{|B_{z_0}|}\int_B\int_{B_{z_0}}s(x)(b(x)-b(y))\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

其中 $s(x)=\overline{\operatorname{sgn}(\int_{\mathrm{B}_{z_0}}(b(x)-b(y))\mathrm{d}y)}$.

若 $x\in B$, $y\in B_{z_0}$, 则 $(y-x)/t\in B(z_0,2)$. 因此,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B|}\int_B|b(x)-b_{B_{z_0}}|\mathrm{d}x\\
&=t^{-n-\gamma}\int_B\int_{B_{z_0}}s(x)(b(x)-b(y))|x-y|^{\gamma-n}\left(\frac{|x-y|}{t}\right)^{n-\gamma}\chi_B(x)\chi_{B_{z_0}}(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\
&=t^{-n-\gamma}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}a_m\int_B\int_{B_{z_0}}s(x)(b(x)-b(y))|x-y|^{\gamma-n}e^{-2im\cdot\frac{y}{t}}\chi_{B_{z_0}}(y)\mathrm{d}ye^{2im\cdot\frac{x}{t}}\chi_B(x)\mathrm{d}x\\
&\leq t^{-n-\gamma}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}|a_m|\int_B|[b,I_\gamma](e^{-2im\cdot\frac{\cdot}{t}}\chi_{B_{z_0}})(x)s(x)(e^{2im\cdot\frac{\cdot}{t}}\chi_B)(x)|\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

由式 (8) 和命题 4, 可知

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B|}\int_B|b(x)-b_{B_{z_0}}|\mathrm{d}x\lesssim{}& t^{-n-\gamma}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}|a_m|\left\|[b,I_\gamma](e^{-2im\cdot\frac{\cdot}{t}}\chi_{B_{z_0}})\right\|_{(L^{p_2(\cdot)},L^q)^\beta(\mathbb{R}^n)}\\
&\times\left\|s\cdot e^{-2im\cdot\frac{\cdot}{t}}\chi_B\right\|_{\mathcal{H}(p_2(\cdot)',q',\beta')}.
\end{aligned}$$

由引理 9 计算可得

$$\left\|s\cdot e^{-2im\cdot\frac{\cdot}{t}}\chi_B\right\|_{\mathcal{H}(p_2(\cdot)',q',\beta')}\lesssim t^{\frac{n}{\beta'}}.$$

因此,

$$\frac{1}{|B|}\int_B|b(x)-b_{B_{z_0}}|\mathrm{d}x\lesssim t^{-n-\gamma+n/\beta'}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}|a_m|\left\|[b,I_\gamma](e^{-2im\cdot\frac{\cdot}{t}}\chi_{B_{z_0}})\right\|_{(L^{p_2(\cdot)},L^q)^\beta(\mathbb{R}^n)}.$$

根据假设和引理 9, 可得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B|}\int_B|b(x)-b_{B_{z_0}}|\mathrm{d}x\\
&\lesssim t^{-n-\gamma+n/\beta'}\|[b,I_\gamma]\|_{(L^{p_1(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)\to(L^{p_2(\cdot)},L^q)^\beta(\mathbb{R}^n)}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}|a_m|\left\|e^{-2im\cdot\frac{\cdot}{t}}\chi_{B_{z_0}}\right\|_{(L^{p_1(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)}\\
&\lesssim t^{-n-\gamma+n/\beta'+n/\alpha+C_p}\|[b,I_\gamma]\|_{(L^{p_1(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)\to(L^{p_2(\cdot)},L^q)^\beta(\mathbb{R}^n)}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}|a_m|\\
&\lesssim\|[b,I_\gamma]\|_{(L^{p_1(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)\to(L^{p_2(\cdot)},L^q)^\beta(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|B|}\int_B|b(x)-b(y)|\mathrm{d}x&\leq\frac{2}{|B|}\int_B|b(x)-b_{B_{z_0}}|\mathrm{d}x\\
&\lesssim\|[b,I_\gamma]\|_{(L^{p_1(\cdot)},L^q)^\alpha(\mathbb{R}^n)\to(L^{p_2(\cdot)},L^q)^\beta(\mathbb{R}^n)}<\infty.
\end{aligned}$$

即证得 $b\in\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

5 结论与展望

本文在经典的 Fofana 空间及其预对偶空间的基础上, 引入了变指标 Fofana 空间及其预对偶空间. 研究了空间的相关性质并且得到了分数次积分算子有界的充分必要条件, 利用预对偶空间的相关性质得到了交换子有界的充分必要条件.

进一步可以考虑对空间进行加权或者其它算子在此空间中的有界性, 例如: 具有粗糙核的奇异积分算子及其交换子、齐次分数次积分算子及其交换子、θ 型-奇异积分算子及其交换子等.

参考文献：

[1] ORLICZ W. Über konjugierte exponentenfolgen[J]. Studia Mathematica, 1931, 3: 200-212.

[2] KOVÁČIK O, RÁKOSNÍ J. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$[J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 1991, 41(4): 592-618.

[3] FAN X L, ZHAO D. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2001, 263(2): 424-446.

[4] DIENING L, HARJULEHTO P, HÄSTÖ P, et al. Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents[M]. Berlin: Springer-verlag, 2011.

[5] STEIN E M. Singular integrals and differentiability properties of functions[M]. Princeton: Princeton University Press, 1970.

[6] CAPONE C, CRUZ-URIBE D, FIORENZA A. The fractional maximal operator and fractional integrals on variable L^p spaces[J]. Revista Matemática Iberoamericana, 2007, 23(3): 743-770.

[7] CHANILLO S. A note on commutators[J]. Indiana University Mathematics Journal, 1982, 31(1): 7-16.

[8] IZUKI M. Commutators of fractional integrals on Lebesgue and Herz spaces with variable exponent[J]. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 2010, 59(3): 461-472.

[9] WIENER N. On the representation of functions by trigonometrical integrals[J]. Mathematische Ztschrift, 1926, 24(1): 575-616.

[10] HOLLAND F. Harmonic analysis on amalgams of L^p and l^q[J]. Journal of the London Mathematical Society, 1975, 3: 295-305.

[11] AYDIN Í, GÜRKANLI A T. Weighted variable exponent amalgam spaces $W(L^{p(x)}, L^q_w)$[J]. Glasnik Matematicki, 2012, 47(1): 165-174.

[12] FOFANA I. Étude d'une classe d'espace de fonctions contenant les espaces de Lorentz[J]. Arkiv för Matematik, 1988, 1(2): 29-50.

[13] FEICHTINGER H J, FEUTO J. Pre-dual of Fofana's spaces[J]. Mathematics, 2019, 7(6): 528-538.

[14] ZHANG H K, ZHOU J. Mixed-norm amalgam spaces and their predual[J]. Symmetry, 2022, 14(1): 74-100.

[15] CRUZ-URIBE D, FIORENZA A, MARTELL J M, et al. The boundedness of classical operators on variable L^p spaces[J]. Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica, 2006, 31(1): 239-264.

[16] IZUKI M. Boundedness of sublinear operators on Herz spaces with variable exponent and application to wavelet characterization[J]. Analysis Mathematica, 2010, 36(1): 33-50.

[17] IZUKI M. Boundedness of commutators on Herz spaces with variable exponent[J]. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 2010, 59(2): 199-213.

[18] JANSON S. Mean oscillation and commutators of singular integral operators[J]. Arkiv for Matematik, 1978, 16: 263-270.

责任编辑：赵新科