点传递二部有向图的极大连通性*

陈来焕, 张曙亮, 李 宁

(河南财经政法大学 数学与信息科学学院, 河南 郑州 450046)

摘 要: 有向图 X 的连通度 $\kappa(X)$ 是删除一些点使得剩余的图不再强连通的最小点数. 若有向图 X 的连通度恰好达到最小度, 则有向图 X 是极大连通的. 证明了强连通点传递二部有向图是极大连通的, 并得出 Bi-Cayley 有向图也是极大连通的.

关键词: 原子; 连通度; 二部有向图

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316. 2023.10.06.0002

中图分类号: O157.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2024)02-0206-03

引文格式: 陈来焕, 张曙亮, 李宁. 点传递二部有向图的极大连通性[J]. 新疆大学学报(自然科学版中英文), 2024, 41(2): 206-208.

英文引文格式: CHEN Laihuan, ZHANG Shuliang, LI Ning. Maximally-connected vertex-transitive bipartite digraph[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2024, 41(2): 206-208.

Maximally-Connected Vertex-Transitive Bipartite Digraph

CHEN Laihuan, ZHANG Shuliang, LI Ning

(*College of Mathematics and Information Sciences, Henan University of Economics and Law, Zhengzhou Henan 450046, China*)

Abstract: The connectivity $\kappa(X)$ of a digraph X is the minimum cardinality of vertices the deletion of which makes the remaining digraph no longer strongly connected. If the connectivity of a digraph X is equal to the minimum degree, then X is said to be maximally vertex-connected. It is proved that a strongly connected vertex-transitive bipartite digraph is maximally vertex-connected, and the Bi-Cayley digraph is also maximally vertex-connected.

Key words: atom; connectivity; bipartite digraph

0 引 言

网络对我们的生活影响非常大, 在轨道交通网络研究中, 我们总是需要考虑站点的连通问题, 比如轨道交通检票、安全检测、屏蔽门等站点连通情况. 生活中最常见的是地铁站和高铁站的设备问题, 每次都需要根据客流量进行设置. 在地铁站, 人流量如果大的话, 就需要增加一些格挡使得通道变长以便容纳更多的行人; 在高铁站, 检票口的数量会根据人流量情况而增开或关闭. 在建设地铁和高铁之前, 需要根据历年人流量预测最大人流量, 从而设计地铁和高铁的进站口数量; 在规划地铁路线的时候, 根据人流量情况, 设置地铁站点位置以及不同线路交汇位置. 为了研究不同网络的性能, 我们会把网络中的处理器抽象成点, 处理器之间的通信线路抽象为边. 这样就可以借助图研究交通网络中的相关问题.

本文考虑的均是无环、无重弧的有向图. 令 $X=(V(X),A(X))$ 是一个有向图, $V(X)$ 中的元素称为点, $A(X)$ 中的元素称为弧. 有向图 X 的连通度 $\kappa(X)$ 是删除一些点使得剩余的图不再强连通的最小点数. 在交通网络中, 由于连通度越大的图往往更可靠, 因此连通度越大的图通常被认为是越理想的.

* 收稿日期: 2023-10-06

基金项目: 国家自然科学基金面上项目“具有竞争机制的四元数耦合神经网络的二部同步”(62073122); 河南省杰出青年科学基金项目“基于忆阻的四元数耦合神经网络的二部同步及应用研究”(222300420022); 河南省高等教育重点项目“基于忆阻的四元数神经网络的建模与应用研究”(21A120001).

作者简介: 陈来焕(1986—), 女, 博士, 讲师, 从事结构图论的研究, E-mail: clhhuel@qq.com.

传递图是一类具有良好结构性质的图. 对于一个图(有向图) X, 如果其自同构群 $Aut(X)$ 在点集 $V(X)$ 上作用传递, 则称 X 是点传递的; 如果自同构群 $Aut(X)$ 在边集 $E(X)$ (或弧集 $A(X)$) 上作用传递, 则称 X 是边传递(或弧传递)的. 图论中一个比较经典的结论是: 在连通边传递图中, 图的点连通度等于其最小度[1]; 在连通点传递图中, 图的边连通度等于其正则度[2]. 在图理论中, 传递图(传递有向图)具有很好的结构性质, 也是学者喜欢研究的一类图, 其定义为: 若自同构群在图(有向图)的顶点集上作用传递, 则该图(有向图)为点传递图(点传递有向图); 若自同构群在图(有向图)的边集(弧集)上作用传递, 则该图(有向图)为边传递图(弧传递图).

到目前为止, 已经有很多学者对图的极大连通性问题进行了研究. Tindell[2] 研究了 Cayley 有向图的极大连通性, 并刻画了有向图碎片、原子和超原子的特征. Shan 等[3]研究了 p-部一致超图的极大连通性. Harary[4] 刻画了一个图的最大连通度和最小连通度. Fàbrega 等[5]研究了有向图的极大连通性问题. Hellwig 等[6]研究了图和有向图的边连通度和点连通度, 并刻画了它们的极大连通度问题. Li 等[7]研究了笛卡儿乘积图的 g-好邻点连通度问题. Yang 等[8]研究了一一对应连接互连网络的 a-平均边连通度问题. Chen 等[9]研究了超图的连通性问题. 基于以上研究基础, 本文主要研究点传递二部有向图的极大连通性问题, 进而为下一步研究点传递二部有向图的超连通性作准备.

1 基本概念

在图 $X=(V(X),E(X))$ (有向图 $X=(V(X),A(X))$)中, 如果顶点 $V(X)$ 可划分为两个不相交的点集 (B,C), 且图 X 中的每条边(弧)都满足一个端点在 B 中, 一个端点在 C 中, 则图(有向图) X 称为二部图(二部有向图), 如果自同构群 $Aut(X)$ 在顶点集 $V(X)$ 上作用传递, 则图 X 称为点传递二部图(点传递二部有向图).

在有向图 $X=(V(X),A(X))$ 中, 对每个点 $v\in V(X)$, $N^+(v)=\{u\in V(X)|uv\in A(X)\}$ 为点 v 在 X 中的出邻点集, $N^-(v)=\{u\in V(X)|vu\in A(X)\}$ 为点 v 在 X 中的入邻点集. 对于 $F\subseteq V(X)$, $N^+(F)=\{u\in V(X)\backslash F|$ 存在点 $v\in F$ 满足 $uv\in A(X)\}$, $N^-(F)=\{u\in V(X)\backslash F|$ 存在点 $v\in F$ 满足 $vu\in A(X)\}$. 记$N^+[F]=F\cup N^+(F)$, 且 $X[F]$ 为由点集 F 导出的 X 的有向子图.

记 $d^+(v)=|N^+(v)|$ 为点 v 在 X 中的出度, $d^-(v)=|N^-(v)|$ 为点 v 在 X 中的入度, $\delta^+(X)=\min\{d^+(v)|v\in V(X)\}$ 和 $\delta^-(X)=\min\{d^-(v)|v\in V(X)\}$ 分别为有向图 X 的最小出度和最小入度, $\delta(X)=\min\{\delta^+(X),\delta^-(X)\}$ 为 X 的最小度. 对有向图 X 来说, $\kappa(X)\le\delta(X)$. 如果 $\kappa(X)=\delta(X)$, 则称 X 为极大点连通的.

令 G 是一个群, T_0, $T_1\subseteq G$, 则 Bi-Cayley 有向图 $X=BD(G;T_0,T_1)$ 的点集为 $G\times\{0,1\}$, 弧集为 $\{((g,0),(t_0g,1)),((t_1g,1),(g,0))|g\in G,t_0\in T_0,t_1\in T_1\}$. 这里未定义的概念或术语, 可参阅文献 [10].

Mader[1] 和 Watkins[11] 分别单独提出了碎片(fragment)和原子(atom)的定义. 如果点集 F 满足 $X-F$ 不强连通且 $|N^+(F)|=\kappa(X)$, 则称 F 为有向图 X 的一个正碎片, 含有最小点数的正碎片称为有向图 X 的一个正原子. 如果点集 F 满足 $X-F$ 不强连通且 $|N^-(F)|=\kappa(X)$, 则称 F 为有向图 X 的一个负碎片, 含有最小点数的负碎片称为有向图 X 的一个负原子. 正碎片和负碎片统称碎片, 正原子和负原子统称原子. 这两个参数为研究各种连通度问题提供了有力的帮助.

2 主要结论

原子对于连通度的研究有很大的帮助, 因此我们借助原子研究二部有向图的连通度问题. 关于有向图的原子, 文献 [1] 和 [12] 分别得出如下结论.

引理 1[1] $X=(V(X),A(X))$ 为非平凡强连通有向图, 且 X 不是完全对称有向图. 则:

(1) 当且仅当 X 的每一个原子只含一个顶点时, $\kappa(X)=\delta(X)$;

(2) 如果 $\kappa(X)<\delta(X)$, 则 $Y=X[F]$ 导出 X 的一个强连通子有向图, 其中 F 为 X 的一个原子.

引理 2[12] $X=(V(X),A(X))$ 为强连通点传递有向图, 则 X 的原子基数不大于 $\kappa(X)$.

在有向图 X 中, 若 $V(X)$ 的非平凡真子集 A 满足对任意的 $\sigma\in Aut(X)$, $\sigma(A)=A$ 或 $\sigma(A)\cap A=\varnothing$, 则称 A 为有向图 X 的非本原块(imprimitive block). 文献 [2] 和 [6] 得出如下结论.

引理 3[6] 如果 $X=(V(X),A(X))$ 为非完全对称的强连通有向图, 则 X 的不同正原子(或负原子)的交集为空. 因此, 若 $\kappa(X)<\delta(X)$, 则 X 的原子为非本原块.

引理 4[2] 令 $X=(V(X),A(X))$ 为强连通点传递有向图, $Y=X[F]$ 是 X 的非本原块 F 导出的子有向图, 则

Y 是点传递的.

上面的结论是研究连通度问题的几个经典结论, 尤其对研究点传递有向图很有帮助, 所以接下来我们借助这几个结论研究点传递二部有向图的连通度.

在有向图 X 中, 如果对任意的 $x \in V(X)$, 有 $d^+(x) = d^-(x) = k$, 则称 X 是 k-正则的. 接下来, 假设 X 是强连通点传递二部有向图. 令 X_1, X_2 为有向图 X 的二部划分顶点集, 则由点传递可知, $|X_1| = |X_2|$, $\delta(X) = \delta^+(X) = \delta^-(X)$.

定理 1 令 $X = (V(X), A(X))$ 为强连通点传递二部有向图, 则 $\kappa(X) = \delta(X)$.

证明 用反证法证明.

假设 $\kappa(X) < \delta(X)$, 则由引理 3 可知, X 的不同正原子(或负原子)是无交的, 且 X 的原子是非本原块. 不妨假设这里的原子是正原子. 因为 X 为点传递有向图, X 的每个点都位于某个原子中. 因此 $V(X)$ 是 X 的一些原子的无交并.

令 B 是一个原子, 则存在 $\sigma_i \in Aut(X)(i = 1, 2, \cdots, k)$ 满足 $V(X) = \cup_{i=1}^{k} \sigma_i(B)$. 由引理 1 可知, $Y = X[B]$ 为 X 的非平凡强连通子有向图. 因为 X 是二部有向图, 如果 $B \subseteq X_i(i = 1$ 或 $2)$, 则 $Y = X[B]$ 为独立集, 矛盾. 因此 $B_i = B \cap X_i \neq \varnothing(i = 1, 2)$. 因为 $Y = X[B]$ 为 X 的点传递子有向图, 所以 $|B_1| = |B_2|$. 对任意的 $1 \leq s < t \leq k$, $i = 1, 2$, $\sigma_s(B_i) \cap \sigma_t(B_i) = \varnothing$ 且 $\sigma_s(B_i)$, $\sigma_t(B_i) \subseteq X_i$, 因此 $X_i = \cup_{s=1}^{k} \sigma_s(B_i)$, 这样 $|B_i|$ 整除 $|X_i|$.

令 $F = N^+(B)$. 因为 $B = B_1 \cup B_2$, $B_i \neq \varnothing(i = 1, 2)$, 且 X 是点传递有向图, 所以 $F_i = F \cap X_i \neq \varnothing$. 因为 B 中的每个点在 F 中有 $\delta^+(X) - \delta^+(B)$ 个出邻点, 所以 $|F| = \kappa(X) \geq 2(\delta^+(X) - \delta^+(B))$. 因为 $\kappa(X) < \delta^+(X)$, 所以 $\delta^+(B) > (\delta^+(X))/2$, 这样, $|B| \geq 2\delta^+(B) > \delta^+(X) > \kappa(X)$. 由引理 2 可知, 矛盾, 因此定理得证.

因为 Bi-Cayley 有向图是半点传递有向图, 所以 Bi-Cayley 有向图也是极大连通的, 即推论 1 成立.

推论 1 G 是一个群, $T_0, T_1 \subseteq G$. $X = BD(G; T_0, T_1)$ 是 Bi-Cayley 有向图, 则 $\kappa(X) = \delta(X)$.

参考文献:

[1] MADER W. Minimale n-fach kantenzusammenhängende Graphen[J]. Mathematische Annalen, 1971, 191(1): 21-28.

[2] TINDELL R. Connectivity of Cayley digraphs[M]//DU D Z, HSU D F. Combinatorial Network Theory. Boston, MA: Springer, 1996: 41-64.

[3] SHAN E F, ZHAO J, KANG L Y. Maximally connected p-partite uniform hypergraphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2019, 264: 188-195.

[4] HARARY F. The maximum connectivity of a graph[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1962, 48(7): 1142-1146.

[5] FÀBREGA J, FIOL M A. Maximally connected digraphs[J]. Journal of Graph Theory, 1989, 13(6): 657-668.

[6] HELLWIG A, VOLKMANN L. Maximally edge-connected and vertex-connected graphs and digraphs: A survey[J]. Discrete Mathematics, 2008, 308(15): 3265-3296.

[7] LI Y K, XIE T, QIN X X. The g-good-neighbor connectivity of some Cartesian product graphs[J]. Open Journal of Discrete Mathematics, 2023, 13(1): 27-37.

[8] YANG Y Y, ZHANG M Z, MENG J X, et al. The a-average degree edge-connectivity of bijective connection networks[J]. The Computer Journal, 2023, 66(9): 2118-2122.

[9] CHEN L H, LIU F X, MENG J X. The connectivity of hypergraphs[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition), 2017, 34(1): 1-6.

[10] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. New York: Springer, 2008.

[11] WATKINS M E. Connectivity of transitive graphs[J]. Journal of Combinatorial Theory, 1970, 8(1): 23-29.

[12] HAMIDOUNE Y O. On small subset product in a group structure theory of set-addition[J]. Astérisque, 1999, 258: 281-308.

责任编辑: 赵新科