

媒体诱导迁移率变化的双斑块 SIRS 传染病模型研究*

桑瑞, 张龙[†], 吴浩

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆应用数学重点实验室, 新疆 乌鲁木齐 830017)

摘要: 建立了一类具有媒体报道的双斑块迁移 SIRS 传染病模型, 研究媒体报道作用下易感者与感染者迁移速率的改变对斑块内疾病状态的影响. 首先, 定义无迁移下的斑块基本再生数 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$, 并推导系统的基本再生数 \mathcal{R}_0 , 得到当 $\mathcal{R}_1 < 1$ 且 $\mathcal{R}_2 < 1$ 时, 系统的无病平衡点是全局渐近稳定的, 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 疾病是一致持续的. 最后, 通过数值模拟验证结果的有效性.

关键词: 双斑块; 媒体报道; 基本再生数; 一致持续性

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2022.03.02.0001

中图分类号: O175 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2023)01-0049-08

引文格式: 桑瑞, 张龙, 吴浩. 媒体诱导迁移率变化的双斑块 SIRS 传染病模型研究[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2023, 40(1): 49-56+60.

英文引文格式: SANG Rui, ZHANG Long, WU Hao. Media-induced migration changes in a two-patch SIRS epidemic model[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2023, 40(1): 49-56+60.

Media-Induced Migration Changes in a Two-Patch SIRS Epidemic Model

SANG Rui, ZHANG Long, WU Hao

(School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University,

The Key Laboratory of Applied Mathematics of Xinjiang, Urumqi Xinjiang 830017, China)

Abstract: A type of two-patch dispersing SIRS epidemic model with media coverage is proposed to study the impact of induced migration rate of susceptible and infected persons by media coverage on the disease. Firstly, the number of non-migratory patch basic reproduction number $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ is defined and the basic reproduction number \mathcal{R}_0 of the disease is derived, by which we find that the disease-free equilibrium is globally asymptotically stable if $\mathcal{R}_1 < 1$ and $\mathcal{R}_2 < 1$. However, the disease is uniform persistence if $\mathcal{R}_0 > 1$. Finally, some numerical examples are given to verify the validity of the results.

Key words: two-patch; media coverage; basic reproduction number; uniform persistence

0 引言

人类的迁移在传染病的空间传播中起着至关重要的作用, 个体在不同斑块间的分散移动, 不仅影响疾病在斑块内的局部传播, 而且会对疾病的空间传播产生全局影响^[1] (这里的一个斑块是指一个地理位置, 它可以是一个城市、一个地区或一个国家).

当前, 互联网技术的发展和人们对于敏感性信息的关注, 使得大众媒体对人们生活的影响越来越深. 特别是媒体报道在疾病的传播和控制方面成为一种不可或缺的工具^[2-4]. 例如, 2009 年 H1N1 流感在墨西哥中部的暴发^[5], 以及新型冠状病毒肺炎疫情的肆虐^[6], 媒体都在第一时间向大众传递疫情相关信息, 发挥十分重要的预警作用. 因此, 将媒体报道效应纳入到斑块传染病模型研究具有非常重要的意义.

媒体对疫情的报道能诱导个体自发的行为改变, 使其主动减少出行, 进而对迁移率产生抑制^[7-9]. 基于这点, Yang 等^[10]提出了一类具有媒体报道效应的双斑块迁移 SIS 传染病模型. 其中, 媒体报道对斑块迁移率的抑制作

* 收稿日期: 2022-03-02

基金项目: 国家自然科学基金“多毒株-斑块间-体内外耦合传播动力学模型研究及应用”(12261087), “马尔可夫转换下的混杂生态动力学模型研究及应用”(11861065); 新疆应用数学重点实验室开放课题“生态稳定与传染病防控动力学研究”(2021D04014); 新疆维吾尔自治区自然科学基金“具有空间扩散及多毒株耦合传播的传染病模型研究及应用”(2022D01E41); 新疆维吾尔自治区高校科研项目“多系统随机切换下的生态动力学模型研究及应用”(XJEDU2021I002).

作者简介: 桑瑞 (1995-), 女, 硕士生, 从事传染病动力学的研究, E-mail: 280435749@qq.com.

† 通讯作者: 张龙 (1978-), 男, 教授, 主要从事传染病动力学的研究, E-mail: longzhang_xj@sohu.com.

用随着目的地感染者数量的增加而增强. 研究发现, 媒体报道对迁出率的抑制可以使斑块内的疾病平衡点升高. 然而, 媒体报道引起的社会恐慌会导致疾病严重的斑块自身人口外流, 这无疑对疾病的控制是不利的, 因此需要采取措施来杜绝人口随意迁出造成疾病蔓延. 那么随着自身斑块感染者数量的增加, 迁移率也应该受到抑制. 因此, 我们改进了 Yang 等^[10]所建立的模型. 对于迁移率, 我们考虑媒体报道对斑块迁移率的抑制不仅受到目的地感染状况的影响, 还会受到自身斑块感染状况的影响. 基于以上考虑, 我们提出一类具有媒体报道的双斑块传染病模型, 重点研究模型的阈值动力学, 以及探索媒体报道对斑块内部疾病发展的影响.

1 模型建立与介绍

考虑具有一定程度的感染免疫力的传染病模型, 即 SIRS 模型. 此模型里, 我们设置了易感者与感染者的迁移, 而不考虑恢复者的迁移. 这是因为我们假设恢复者需要从疾病造成的创伤中恢复, 从而被限制在了自己所在的社区. 同时, 媒体报道可能对斑块之间的人口移动产生抑制. 对此我们作出以下假设:

H1: 易感者与感染者以不同的速率迁移;

H2: 由于媒体报道的作用, 人们对疾病了解后会改变自身在斑块间的迁移率.

如果 $m_{ij} \geq 0, n_{ij} \geq 0$ 分别为易感者与感染者从 j 斑块向 i 斑块在无媒体作用下的迁移速率, 那么受到媒体作用影响后的迁移速率会发生改变, 改变后的迁移速率为:

$$m_{ij} \left(1 - \frac{\sigma_i I_i + \sigma_j I_j}{\alpha_i + \alpha_j + \sigma_i I_i + \sigma_j I_j} \right), \quad n_{ij} \left(1 - \frac{\sigma_i I_i + \sigma_j I_j}{\alpha_i + \alpha_j + \sigma_i I_i + \sigma_j I_j} \right),$$

其中: $\alpha_i > 0, \alpha_j > 0$ 分别为对 i 斑块和对 j 斑块病例数量反应不敏感的人数, 即迁移不受媒体报道影响的人数, $\sigma_i \in [0, 1], \sigma_j \in [0, 1]$ 分别表示两个斑块的人们对 i 斑块和 j 斑块知情情况的百分比. 由于媒体的高效传播性, 我们假设这两个区域对其中一个区域的知情百分比是相同的. 基于以上分析, 我们建立了如下具有媒体报道效应的双斑块迁移 SIRS 传染病模型:

$$\begin{cases} \dot{S}_1(t) = b_1 - \beta_1 \frac{S_1 I_1}{N_1} - d_1 S_1 + \mu_1 R_1 - m_{21} \left(1 - \frac{\sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2} \right) S_1 + m_{12} \left(1 - \frac{\sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2} \right) S_2 \\ \dot{I}_1(t) = \beta_1 \frac{S_1 I_1}{N_1} - (\gamma_1 + d_1 + \xi_1) I_1 - n_{21} \left(1 - \frac{\sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2} \right) I_1 + n_{12} \left(1 - \frac{\sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2} \right) I_2 \\ \dot{R}_1(t) = \gamma_1 I_1 - d_1 R_1 - \mu_1 R_1 \\ \dot{S}_2(t) = b_2 - \beta_2 \frac{S_2 I_2}{N_2} - d_2 S_2 + \mu_2 R_2 + m_{21} \left(1 - \frac{\sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2} \right) S_1 - m_{12} \left(1 - \frac{\sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2} \right) S_2 \\ \dot{I}_2(t) = \beta_2 \frac{S_2 I_2}{N_2} - (\gamma_2 + d_2 + \xi_2) I_2 + n_{21} \left(1 - \frac{\sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2} \right) I_1 - n_{12} \left(1 - \frac{\sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2} \right) I_2 \\ \dot{R}_2(t) = \gamma_2 I_2 - d_2 R_2 - \mu_2 R_2 \end{cases} \quad (1)$$

初始条件为:

$$S_i(0) \geq 0, I_i(0) \geq 0, I_1(0) + I_2(0) > 0, R_i(0) \geq 0, i = 1, 2 \quad (2)$$

$S_i(t), I_i(t), R_i(t)$ 分别表示在 t 时刻 i 斑块易感个体、感染个体与恢复个体的数量, $N_i (i = 1, 2) = S_i + I_i + R_i$ 表示 i 斑块的总人口数量. 模型中的参数具体含义见表 1.

表 1 系统 (1) 的相关参数取值

| 符号 | 意义 |
|------------|--------------------------|
| b_i | i 斑块的出生率 |
| β_i | i 斑块的有效接触率 |
| γ_i | i 斑块感染者的恢复率 |
| ξ_i | i 斑块感染者的病死率 |
| d_i | i 斑块的死亡率 |
| μ_i | i 斑块恢复者的免疫丧失率 |
| m_{ij} | 易感者由 j 斑块向 i 斑块的迁移速率 |
| n_{ij} | 感染者由 j 斑块向 i 斑块的迁移速率 |

2 模型的动力学分析

定理 1 系统 (1) 在初始条件 (2) 下的解 $(S_1, I_1, R_1, S_2, I_2, R_2)$ 是非负的且最终有界.

证明 正性: 考虑具有非负初始条件 (2) 的系统 (1), 如果在 t_1 时刻, S_1 比 I_1, R_1, S_2, I_2, R_2 先变为 0, 由系统 (1) 第一个方程式得:

$$\frac{dS_1}{dt} = b_1 + \mu_1 R_1 + m_{12} \left(1 - \frac{\sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2} \right) S_2 > 0,$$

由此可见, S_1 在 t_1 处是递增的. 因此, 如果 $S_1(0) > 0$, S_1 保持恒正, 同理可证 S_2 恒正. 如果在 t_2 时刻, I_1 比 S_1, R_1, S_2, I_2, R_2 先变为 0, 由系统 (1) 第二个方程式得:

$$\frac{dI_1}{dt} = n_{12} \left(1 - \frac{\sigma_2 I_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \sigma_2 I_2} \right) S_2 > 0,$$

从而 I_1 在 t_2 处是递增的. 因此, 如果 $I_1(0) > 0$, I_1 保持恒正, 同理可证 I_2 恒正. 用同样的方法可以证明 R_1 与 R_2 的正性.

有界性: 令 $N = N_1 + N_2$ 表示总人口数. 将系统 (1) 中方程左右两边分别相加得:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= b_1 + b_2 - d_1 N_1 - d_2 N_2 - \xi_1 I_1 - \xi_2 I_2 \\ &\leq b_1 + b_2 - d_1 N_1 - d_2 N_2 \\ &\leq b_1 + b_2 - \min\{d_1, d_2\} N, \end{aligned}$$

由比较原理可得 $N(t) \leq b_1 + b_2 / \min\{d_1, d_2\}$. 进一步, 得到下面集合:

$$\Gamma = \left\{ (S_1, I_1, R_1, S_2, I_2, R_2) \in \mathbb{R}_+^6 : N(t) \leq \frac{b_1 + b_2}{\min\{d_1, d_2\}} \right\}$$

为系统 (1) 的正不变集. 因此, 系统 (1) 的解 $(S_1(t), I_1(t), R_1(t), S_2(t), I_2(t), R_2(t))$ 是最终有界的.

接下来, 我们计算系统 (1) 的无病平衡点并推导疾病的基本再生数.

将 $I_i = 0, R_i = 0, i = 1, 2$ 带入系统 (1) 的第一个方程与第四个方程, 并令方程右端等于 0, 得:

$$\begin{cases} b_1 - d_1 S_1 - m_{21} S_1 + m_{12} S_2 = 0, \\ b_2 - d_2 S_2 - m_{12} S_2 + m_{21} S_1 = 0, \end{cases}$$

计算得:

$$S_1^0 = \frac{b_1 d_2 + m_{12} (b_1 + b_2)}{d_1 d_2 + d_1 m_{12} + d_2 m_{21}}, \quad S_2^0 = \frac{b_2 d_1 + m_{21} (b_1 + b_2)}{d_1 d_2 + d_1 m_{12} + d_2 m_{21}}.$$

即无病平衡点为:

$$E_0 = (S_1^0, I_1^0, R_1^0, S_2^0, I_2^0, R_2^0) = \left(\frac{b_1 d_2 + m_{12} (b_1 + b_2)}{d_1 d_2 + d_1 m_{12} + d_2 m_{21}}, 0, 0, \frac{b_2 d_1 + m_{21} (b_1 + b_2)}{d_1 d_2 + d_1 m_{12} + d_2 m_{21}}, 0, 0 \right).$$

在没有迁移的斑块, 我们将其斑块再生数定义为:

$$\mathcal{R}_i = \frac{\beta_i}{\gamma_i + d_i + \xi_i}, \quad i = 1, 2.$$

即在两个斑块间无扩散时, 每个斑块 i 疾病的基本再生数为 \mathcal{R}_i . 紧接着, 利用下一代矩阵法^[11]计算系统 (1) 的基本再生数, 我们可将感染者对应的变量 I_1 和 I_2 的方程写为:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \mathcal{F} - \mathcal{V},$$

其中

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \beta_1 \frac{S_1 I_1}{N_1} \\ \beta_2 \frac{S_2 I_2}{N_2} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} (\gamma_1 + d_1 + \xi_1)I_1 + n_{21} \left(1 - \frac{\sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2}\right) I_1 - n_{12} \left(1 - \frac{\sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2}\right) I_2 \\ (\gamma_2 + d_2 + \xi_2)I_2 - n_{21} \left(1 - \frac{\sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2}\right) I_1 + n_{12} \left(1 - \frac{\sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \sigma_1 I_1 + \sigma_2 I_2}\right) I_2 \end{pmatrix}.$$

在无病平衡点 E_0 处计算 $F = D\mathcal{F}, V = D\mathcal{V}$ 得:

$$F = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \gamma_1 + d_1 + \xi_1 + n_{21} & -n_{12} \\ -n_{21} & \gamma_2 + d_2 + \xi_2 + n_{12} \end{pmatrix},$$

那么

$$FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_1 v_{22}}{\det(V)} & \frac{\beta_1 n_{12}}{\det(V)} \\ \frac{\beta_2 n_{21}}{\det(V)} & \frac{\beta_2 v_{11}}{\det(V)} \end{pmatrix},$$

其中

$$v_{11} = \gamma_1 + d_1 + \xi_1 + n_{21}, \quad v_{22} = \gamma_2 + d_2 + \xi_2 + n_{12}, \\ \det(V) = (\gamma_1 + d_1 + \xi_1 + n_{21})(\gamma_2 + d_2 + \xi_2 + n_{12}) - n_{12}n_{21}.$$

因此, 基本再生数为:

$$\mathcal{R}_0 := \rho(FV^{-1}) = \frac{\beta_1 v_{22} + \beta_2 v_{11} + \sqrt{\Delta}}{2 \det(V)},$$

其中

$$\Delta = (\beta_1 v_{22} - \beta_2 v_{11})^2 + 4\beta_1 \beta_2 n_{12} n_{21}.$$

注 1 由于参数 σ_i 和 $\alpha_i (i=1,2)$ 未出现在 \mathcal{R}_0 的表达式中, 因此媒体报道效应并不会影响系统的基本再生数. 这是因为 \mathcal{R}_0 是在 $I_i=0 (i=1,2)$ 的时候计算而来的, 这时媒体报道还不能起到抑制迁移的作用.

根据文献 [11], 我们得到如下结果.

引理 1 对于系统 (1), 如果 $\mathcal{R}_0 < 1$, 则无病平衡点 E_0 局部渐近稳定; 如果 $\mathcal{R}_0 > 1$, 则无病平衡点 E_0 不稳定.

紧接着, 我们研究无病平衡点 E_0 的全局稳定性.

定理 2 当 $\mathcal{R}_i < 1 (i=1,2)$ 时, 系统 (1) 的无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的.

证明 将系统 (1) 的第二个和第五个方程相加可得:

$$\frac{dI_1}{dt} + \frac{dI_2}{dt} = \beta_1 \frac{S_1 I_1}{N_1} - (\gamma_1 + d_1 + \xi_1) I_1 + \beta_2 \frac{S_2 I_2}{N_2} - (\gamma_2 + d_2 + \xi_2) I_2 \\ \leq (\beta_1 - \gamma_1 - d_1 - \xi_1) I_1 + (\beta_2 - \gamma_2 - d_2 - \xi_2) I_2.$$

当 $\mathcal{R}_i < 1 (i=1,2)$ 时, 即

$$\beta_1 - \gamma_1 - d_1 - \xi_1 < 0, \quad \beta_2 - \gamma_2 - d_2 - \xi_2 < 0,$$

有

$$\frac{d(I_1 + I_2)}{dt} < 0,$$

从而当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 系统 (1) 的解 $(S_1(t), I_1(t), R_1(t), S_2(t), I_2(t), R_2(t))$ 收敛到无病平衡点 E_0 .

定理 2 中的条件强于 $\mathcal{R}_0 < 1$, 定理 3 可以说明.

定理 3 当 $\mathcal{R}_i < 1 (i=1,2)$ 时, 系统 (1) 的疾病基本再生数 $\mathcal{R}_0 < 1$ 成立.

证明 经过计算

$$FV^{-1} = \frac{1}{v_{11}v_{22} - n_{12}n_{21}} \begin{pmatrix} \beta_1 v_{22} & \beta_1 n_{12} \\ \beta_2 n_{21} & \beta_2 v_{11} \end{pmatrix}.$$

由盖氏圆盘定理可得:

$$\left| \lambda_1 - \frac{\beta_1 v_{22}}{v_{11}v_{22} - n_{12}n_{21}} \right| < \frac{\beta_2 n_{21}}{v_{11}v_{22} - n_{12}n_{21}} \Rightarrow |\lambda_1| < \frac{\beta_1 v_{22} + \beta_2 n_{21}}{v_{11}v_{22} - n_{12}n_{21}},$$

且

$$\left| \lambda_2 - \frac{\beta_2 v_{11}}{v_{11} v_{22} - n_{12} n_{21}} \right| < \frac{\beta_1 n_{12}}{v_{11} v_{22} - n_{12} n_{21}} \Rightarrow |\lambda_2| < \frac{\beta_2 v_{11} + \beta_1 n_{12}}{v_{11} v_{22} - n_{12} n_{21}},$$

其中: λ_1, λ_2 为矩阵 FV^{-1} 的特征值.

由定理 2 的条件:

$$v_{11} = \gamma_1 + d_1 + \xi_1 + n_{21}, \quad \beta_1 < \gamma_1 + d_1 + \xi_1,$$

$$v_{22} = \gamma_2 + d_2 + \xi_2 + n_{12}, \quad \beta_2 < \gamma_2 + d_2 + \xi_2,$$

因此,

$$\begin{aligned} \beta_1 v_{22} + \beta_2 n_{21} &< (\gamma_1 + d_1 + \xi_1)(\gamma_2 + d_2 + \xi_2 + n_{12}) + (\gamma_2 + d_2 + \xi_2)n_{21} \\ &= v_{11} v_{22} - n_{12} n_{21} \Rightarrow |\lambda_1| < 1. \end{aligned}$$

同理可证 $|\lambda_2| < 1$. 因此 $\mathcal{R}_0 := \rho(FV^{-1}) < 1$.

最后, 我们考虑 $\mathcal{R}_0 > 1$ 的情况. 如果系统 (1) 的疾病是一致持续的, 则传染病成为地方病, 有如下结果.

定理 4 对于系统 (1), 当 $\mathcal{R}_0 > 1$, 则疾病是一致持续的, 即存在一个常数 $\kappa > 0$ 使得满足初始条件 $\mathbf{x}_0 \equiv (S_1(0), S_2(0), I_1(0), I_2(0), R_1(0), R_2(0)) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}_+^2$ 的系统 (1) 的每一个解 $\varphi_t(\mathbf{x}_0) \equiv (S_1(t), S_2(t), I_1(t), I_2(t), R_1(t), R_2(t))$ 都有:

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} I_i(t) > \kappa, \quad i = 1, 2,$$

且系统 (1) 至少有一个地方病平衡点存在.

证明 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 定义

$$X = \{(S_1, S_2, I_1, I_2, R_1, R_2), S_i \geq 0, I_i \geq 0, R_i \geq 0, i = 1, 2\},$$

$$X_0 = \{(S_1, S_2, I_1, I_2, R_1, R_2) \in X, I_i > 0, i = 1, 2\},$$

$$\partial X_0 = X \setminus X_0 = \{(S_1, S_2, I_1, I_2, R_1, R_2) \in X, I_1 = I_2 = 0 \text{ 或者 } I_1 = 0, I_2 > 0 \text{ 或者 } I_1 > 0, I_2 = 0\}.$$

只要证明 ∂X_0 一致排斥 X_0 中系统 (1) 的解. 显然 ∂X_0 在 X 中是相对闭的, 即得 X 和 X_0 都是正不变的, 定理 1 表明系统 (1) 是点耗散的. 定义

$$M_\partial = \{\mathbf{x}_0 \in \partial X_0 : \varphi_t(\mathbf{x}_0) \in \partial X_0, \forall t \geq 0\},$$

且

$$D = \{\mathbf{x}_0 \in X : I_1 = I_2 = 0\}.$$

显然 $D \in M_\partial$, 另一方面, 对于所有的 $\mathbf{x}_0 \in \partial X_0 \setminus D$ 我们有 $I_1(0) + I_2(0) > 0$, 由迁移率矩阵的不可约性, 对所有 $t > 0$, 有 $\varphi_t(\mathbf{x}_0) \in X_0$, 因此 $\mathbf{x}_0 \notin M_\partial$ 且 $M_\partial \in D$, 这意味着 $M_\partial = D$.

无病平衡点 E_0 是 M_∂ 中唯一的平衡点. 令 $W^s(E_0)$ 为 E_0 的稳定流形, 现在我们来证明: 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, $W^s(E_0) \cap X_0 = \emptyset$. 令:

$$M_\varepsilon = F - V - \begin{pmatrix} \beta_1 \varepsilon & n_{12} \varepsilon \\ n_{21} \varepsilon & \beta_2 \varepsilon \end{pmatrix}.$$

由于 $s(F - V) > 0$ 当且仅当 $\mathcal{R}_0 > 1$, 则存在一个 $\varepsilon_1 > 0$ 使得 $s(M_\varepsilon) > 0$ 对于 $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$. 选择足够小的 η 使

$$S_i(0)/N_i(0) \geq 1 - \varepsilon_1, \quad \frac{\delta_1 I_1 + \delta_2 I_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + \delta_1 I_1 + \delta_2 I_2} \leq \varepsilon_1, \quad i = 1, 2,$$

且

$$\|\mathbf{x}_0 - E_0\| \leq \eta.$$

我们称

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\varphi_t(\mathbf{x}_0) - E_0\| > \eta, \quad \forall \mathbf{x}_0 \in X_0.$$

我们用反证法来证明这一主张, 假设不然, 则存在 $\mathbf{x}_0 \in X_0$ 使得 $\|\varphi_t(\mathbf{x}_0) - E_0\| \leq \eta$, 对于所有的 $t \geq 0$, 因此

$$\frac{dI_i}{dt} \geq \beta_i(1 - \varepsilon_1)I_i - (\gamma_i + d_i + \xi_i + n_{ji})I_i + n_{ij}(1 - \varepsilon_1)I_j, \quad i, j = 1, 2.$$

即对于整个系统而言, 有

$$\frac{dI}{dt} \geq M_{\varepsilon_1} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}.$$

注意 M_{ε_1} 有一个与正特征向量相关的正特征值 $s(M_{\varepsilon_1})$. 根据比较原理, $I_i(t) \rightarrow \infty$ 当 $t \rightarrow \infty, i = 1, 2$. 矛盾. 由于 E_0 在 M_θ 中是全局稳定的, 因此 E_0 是一个孤立的不变集且是无环的. 此外, 根据文献 [12] 中的定理 2.4, 我们知道系统 (1) 有一个地方病平衡点 $\bar{E} = (\bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{R}_1, \bar{R}_2) \in X_0$ 存在.

3 数值模拟

3.1 理论结果的数值验证

对于系统 (1), 我们通过两个数值例子验证理论结果的有效性. 首先, 选取初值如下:

$$(S_1(0), I_1(0), R_1(0), S_2(0), I_2(0), R_2(0)) = (1\ 100, 80, 10, 1\ 100, 60, 10).$$

选取一组参数:

$$\begin{aligned} \beta_1 = 0.11; \beta_2 = 0.09; \gamma_1 = \gamma_2 = 0.1; \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.01; d_1 = d_2 = 5 \times 10^{-4}; n_{12} = n_{21} = 0.02 \\ \mu_1 = \mu_2 = 0.5; \alpha_1 = 50; \alpha_2 = 150; \sigma_1 = \sigma_2 = 0.6; b_1 = b_2 = 3; m_{12} = m_{21} = 0.06 \end{aligned} \quad (3)$$

此时, $\mathcal{R}_0 = 0.927\ 8$, 因此, 无病平衡点 $E_0 = (5\ 339, 0, 0, 5\ 339, 0, 0)$ 是全局渐近稳定的 (见图 1(a)).

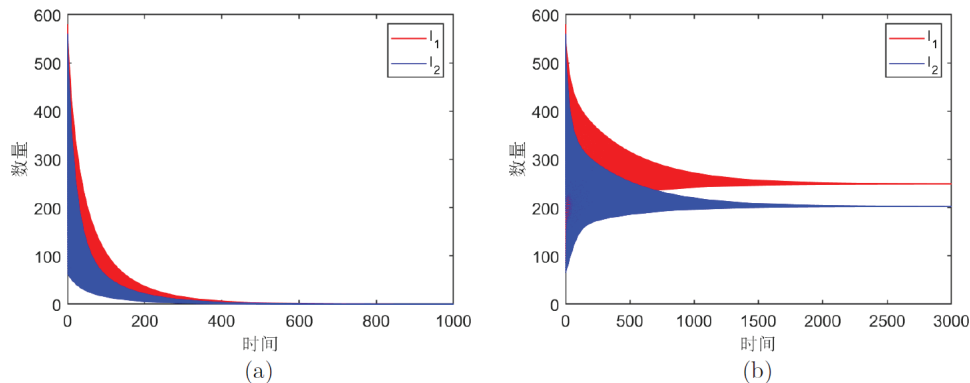


图 1 疾病的灭绝与持续性

此外, 当我们取 $\beta_1 = 0.14, \beta_2 = 0.13$, 其它参数如 (3). 此时 $\mathcal{R}_0 = 1.226\ 3$, 进一步, 由定理 4 知疾病是一致持续的, 且由图 1(b) 可知系统 (1) 具有一个地方病平衡点 $\bar{E} = (1.20 \times 10^3, 249, 50, 1.23 \times 10^3, 202, 40)$, 它是全局渐近稳定的.

3.2 媒体报道对于疾病发展的敏感性分析

接下来, 我们对 Yang 等^[10]所做的工作 (图 2(a)) 和我们工作 (图 2(b)) 中的疾病持续状态进行对比, 这时, 考虑了媒体对斑块 1 有无影响作用下的两个斑块的感染情况:

图 2(a): 当迁移率只受到对目的地感染状况和知情情况的影响, 斑块 2 向斑块 1 的人口迁移率将不受媒体报道抑制, 而斑块 1 向斑块 2 的迁移率仍然受媒体报道抑制, 对比所产生的结果就是斑块 1 的迁出不变, 迁入增加; 斑块 2 相反.

图 2(b): 媒体对斑块 1 的报道不仅抑制了斑块 1 的人口迁入, 而且也影响到斑块 1 人口的迁出. 斑块 2 同理. 最终单个斑块内迁入和迁出感染人口数的差值将决定斑块在有媒体作用下感染水平的高低. 而这个差值是正的(单个斑块内迁入的感染者人数大于迁出的)还是负的, 和几组参数值都有关系, 图 3 作了详细对比.

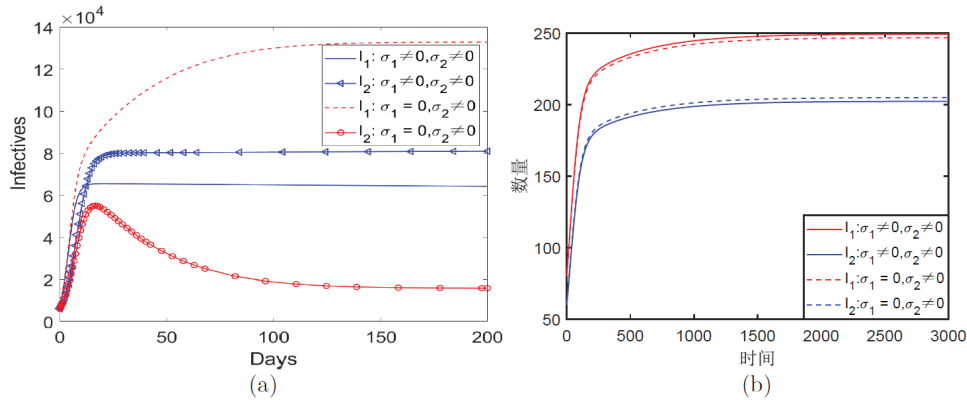


图 2 Yang 等^[10]所做工作与本文斑块 1 有无媒体报道效应对比

对于图 2(a) 和图 2(b), 他们的共同之处就是: 针对两个斑块的感染, 在有无媒体作用情况下作对比时, 一个斑块的感染水平增强, 另一个斑块的感染水平就会减弱. 不同之处在于图 2(a) 的增减效果非常显著, 而图 2(b) 则没有那么明显, 这个结果通过观察两个模型改变后的感染者迁移率

$$\left(1 - \frac{\sigma_i I_i}{\alpha_i + \sigma_i I_i}\right) m_{ij}, \quad \left(1 - \frac{\sigma_i I_i + \sigma_j I_j}{\alpha_i + \alpha_j + \sigma_i I_i + \sigma_j I_j}\right) n_{ij},$$

可以看出: 第一个, 当人们对 i 斑块知情率为 0, 媒体报道就不再影响从 j 斑块到 i 斑块人口的迁移率. 第二个, 当对 i 斑块知情率为 0, 这时从 j 斑块到 i 斑块人口的迁移率依然受媒体报道影响, 而且迁移率只受 j 斑块的感染情况影响, 这会导致 j 斑块人口的迁入和迁出都受到抑制. 为了使有无媒体作用的对比效果更加明显, 我们作了两个斑块都受媒体报道影响 ($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0$) 和两个斑块都不受媒体作用 ($\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0$) 时迁移的对比, 这时的无媒体报道感染者迁移率就变为 n_{ij} .

如图 3 所示, 我们分析在疾病持续情况下有无媒体报道的两斑块感染情况差异. 对此, 分如下四种情况:

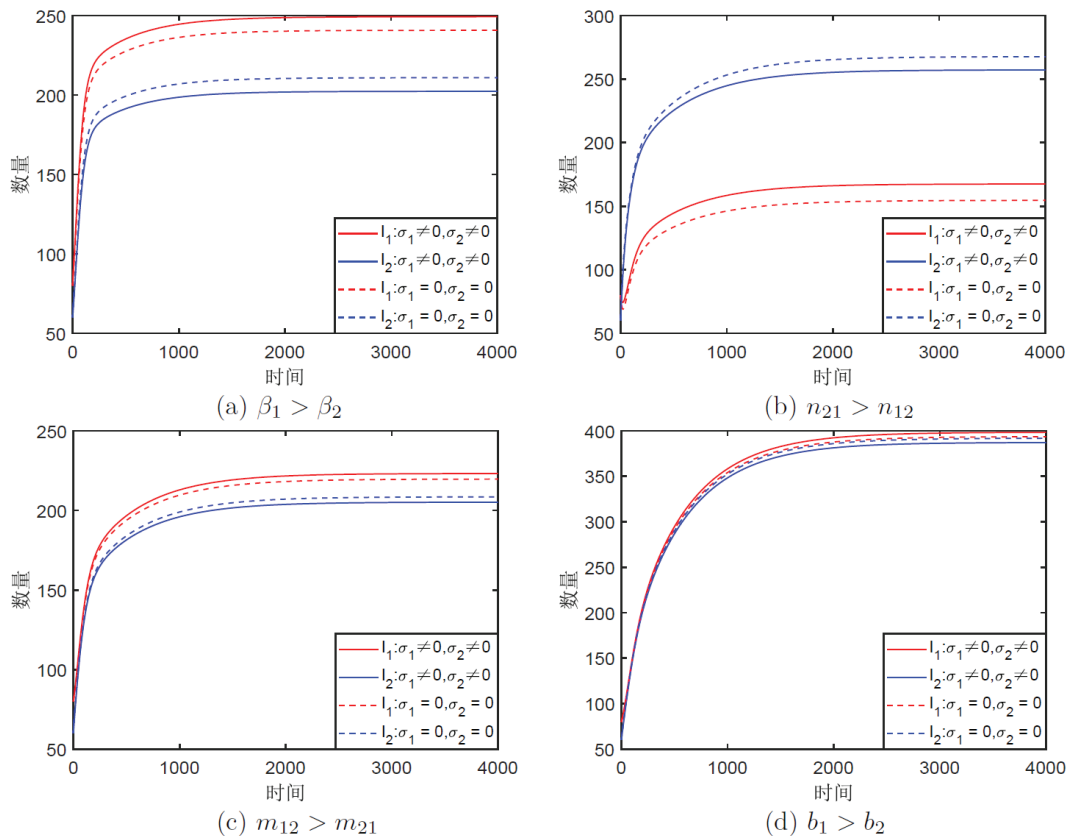


图 3 控制变量讨论媒体报道对疾病状况的影响

(a) 两个斑块感染率不同 ($\beta_1 \neq \beta_2$)

选取参数 $\beta_1 = 0.14 > \beta_2 = 0.13$, 其它参数如 (3). 由图 3(a) 可知, 斑块 1 在有媒体报道时候的疾病平衡点比没有媒体报道时候的更高, 而斑块 2 则相反. 这是因为媒体报道促使两个斑块的感染者的迁移率以相同的比例减小, 但由于斑块 1 感染率高, 斑块 1 的感染者迁移量减少更多, 导致斑块 1 在媒体报道作用下最终感染反而稳定在一个高水平, 即媒体报道对斑块 1 感染产生了一个促进作用, 斑块 2 反之.

(b) 两个斑块感染者的迁移率不同 ($n_{21} \neq n_{12}$)

取 $n_{21} = 0.04 > n_{12} = 0.02$ 和 $\beta_1 = \beta_2 = 0.13$, 其它参数如 (3). 由图 3(b) 可知, 这时依然有斑块 1 在有媒体报道作用时候的疾病平衡点比没有媒体报道作用时候的更高, 斑块 2 相反. 这是因为媒体报道使感染者从斑块 1 向斑块 2 的迁移率的减少值比从斑块 2 向斑块 1 的迁移率减少值更大. 这也使得斑块 1 的感染者增多, 即媒体对斑块 1 的感染情况表现为促进, 斑块 2 反之.

(c) 两个斑块易感者的迁移率不同 ($m_{21} \neq m_{12}$)

固定参数 $m_{12} = 0.06 > m_{21} = 0.05$ 和 $\beta_1 = \beta_2 = 0.13$, 其它参数如 (3). 由图 3(c) 可知, 斑块内有无媒体作用下的感染情况和上面的情况相似. 这是因为媒体报道使两斑块易感者的迁移速率以相同的比例减小, 斑块 2 向斑块 1 的迁移速率更大, 所以减小更多, 这样就有更多的易感者流向斑块 2. 随着斑块 2 人口增加, 在感染者的迁移率不变的情况下, 那么感染者向斑块 1 迁移人口数量增加. 所以在媒体作用下, 斑块 1 的感染会维持一个更高的平衡. 相反, 斑块 2 由于感染者向斑块 1 迁移量增加, 自身感染者随之减少, 媒体报道对斑块 2 的感染有抑制作用.

(d) 两个斑块出生率不同 ($b_1 \neq b_2$)

取 $b_1 = 8 > b_2 = 3$ 和 $\beta_1 = \beta_2 = 0.13$, 其它参数如 (3). 由图 3(d) 可知, 斑块 1 的出生率高等同于斑块 1 的感染者更多. 因此, 虽然媒体报道作用下感染者的迁移率以相同比例降低, 但由于斑块 1 感染者多于斑块 2, 媒体报道对斑块 1 感染者迁出的阻碍作用更大, 使得斑块 1 感染者增多.

通过上面四种情况的讨论, 我们不难发现: 它们的效果表现为对斑块 1 感染情况都是不利的. 如果我们把政府的治理以及个人的自觉性理解为封城, 结果正如罗名海等^[13]所描述: 封城后, 疫情防控并未在第一时间产生明显成效, 疫情在武汉持续暴发, 确诊病例并没有随之降低, 疫情发展经历了快速上升期 (2020 年 1 月 21 日至 2 月 4 日) 和高发平台期 (2020 年 2 月 5 日至 2 月 18 日), 2 月 19 日后逐步进入起伏下降期, 3 月 6 日后逐步控制疫情, 3 月 18 日实现新增确诊和疑似病例清零. 那么本文中, 媒体促使感染数量更多, 感染速率更快的斑块疫情较媒体报道前更加严重, 这有助于对该斑块进行针对治疗并减少疾病的扩散.

4 结论

本文研究了一类具有媒体报道的双斑块迁移的 SIRS 模型. 推导了疾病的基本再生数, 得到了当 $\mathcal{R}_1 < 1$ 且 $\mathcal{R}_2 < 1$ 时, 系统的无病平衡点是全局渐近稳定的; 而当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 疾病是一致持续的. 对于理论分析和数值模拟, 我们得到了如下结论:

1) 由 \mathcal{R}_0 的表达式, 我们发现媒体报道效应并不会影响系统的基本再生数 (见注 1). 这是因为刻画媒体报道效应的重要参数 σ_i 和 α_i ($i = 1, 2$) 并未包括在 \mathcal{R}_0 表达式中. 基于这点, 如果我们仅仅增强媒体报道的效果, 那么疾病是无法灭绝的. 要想使疾病灭绝, 必须在媒体报道作用后对高发病斑块内部实施有效治疗措施, 这才是媒体报道的最终意义.

2) 一般情况下, 我们会认为媒体报道降低了迁移率, 会对疾病产生一个有效的预防和控制, 使得感染平衡降低. 但是我们通过数值模拟发现: 媒体作用效果对各个斑块的影响不能简单地一概而论, 迁移率的降低也不会对每个斑块的疾病平衡点的降低都有促进作用. 这和斑块内原本的感染能力、感染速度以及斑块间迁移速率都有着密切的关系.

参考文献:

- [1] ALLEN L J S, BRAUER F, VAN DEN DRIESSCHE P, et al. Mathematical epidemiology[M]. Berlin: Springer, 2008.
- [2] BAUMAN A, SMITH B J, MAIBACH E W, et al. Evaluation of mass media campaigns for physical activity[J]. Evaluation and Program Planning, 2006, 29(3): 312-322.