

带有 Chaplygin 压力的耦合 Aw-Rascle 模型 黎曼解的极限*

翁莎莎^{1,2}, 潘丽君^{1,2†}, 吕顺^{1,2}

(1. 南京航空航天大学 数学学院, 江苏 南京 211106;

2. 工业和信息化部 飞行器数学建模和高性能计算重点实验室(NUAA), 江苏 南京 211106)

摘要: 研究了带有 Chaplygin 压力的耦合 Aw-Rascle (CAR) 交通模型的黎曼问题. 通过令耦合模型两侧压力同时消失, 得到上述黎曼解的极限, 并证明了该极限具有相同初值的无压气体动力 (Pressureless Gas Dynamics, PGD) 模型的黎曼解. 更进一步, 证得极限后的 delta 激波解的权重和速度与 PGD 模型的 delta 激波解的权重和速度完全一致. 此外, 由解的渐近行为, 可以观察到稀疏接触间断到接触间断的转化.

关键词: 耦合 Aw-Rascle 模型; 无压气体动力模型; Chaplygin 压力; delta 激波; 极限解

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2023.05.24.0002

中图分类号: O175.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2023)06-0683-08

引文格式: 翁莎莎, 潘丽君, 吕顺. 带有 Chaplygin 压力的耦合 Aw-Rascle 模型黎曼解的极限[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2023, 40(6): 683-690.

英文引文格式: WENG Shasha, PAN Lijun, LYU Shun. The limits of the Riemann solutions to the coupled Aw-Rascle model with the Chaplygin pressure[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2023, 40(6): 683-690.

The Limits of the Riemann Solutions to the Coupled Aw-Rascle Model with the Chaplygin Pressure

WENG Shasha^{1,2}, PAN Lijun^{1,2}, LYU Shun^{1,2}

(1. School of Mathematics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu 211106, China;

2. Key Laboratory of Mathematical Modelling and High Performance Computing of Air Vehicles(NUAA),

Ministry of Industry and Information Technology, Nanjing Jiangsu 211106, China)

Abstract: This paper considers the Riemann problem of the coupled Aw-Rascle (CAR) model with Chaplygin pressure. By letting the pressures on both sides of the CAR model vanish, the limits of the above Riemann solutions are obtained. Moreover, it is proved that the limits are the Riemann solutions to the pressureless gas dynamics (PGD) model with the same initial value. The weight and velocity of the delta shock after the limit are completely consistent with the weight and velocity of the delta shock to the PGD model. Furthermore, from the asymptotic behavior of the solutions, the transition from the rarefactive contact discontinuity to the contact discontinuity can be observed.

Key words: coupled Aw-Rascle model; pressureless gas dynamics (PGD) model; Chaplygin pressure; delta shock; limiting solution

0 引言

考虑 CAR 交通模型^[1]

* 收稿日期: 2023-05-24

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金“非线性双守恒律中的高维燃烧问题”(NZ2014107).

作者简介: 翁莎莎 (1998-), 女, 硕士生, 从事偏微分方程及其理论的研究, E-mail: wengshasha@nuaa.edu.cn.

† 通讯作者: 潘丽君 (1981-), 女, 博士, 副教授, 从事偏微分方程及其理论的研究, E-mail: 98010149@163.com.

$$x < 0: \begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho uv)_x = 0 \\ u = v + \eta p(\rho) \end{cases} \quad x > 0: \begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho uv)_x = 0 \\ u = v + \mu p(\rho) \end{cases} \quad (1)$$

和

$$x < 0: \begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho uv)_x = 0 \\ u = v + \mu p(\rho) \end{cases} \quad x > 0: \begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho uv)_x = 0 \\ u = v + \eta p(\rho) \end{cases} \quad (2)$$

其中: $\rho \geq 0$ 和 $v \geq 0$ 分别表示车辆的密度和速度, 变量 u 表示相对速度. 压力项 $p(\rho)$ 是关于 ρ 的函数, 用来模拟驾驶员对前方交通状况的应急反应. 系数 η 和 μ 是 $p(\rho)$ 的比例系数且 $\eta > \mu > 0$. 由于密度 ρ 随着系数的减小而增大, CAR 模型 (1) 和 (2) 可以用来表示司机的注意力暂时分散, 它们常用来描述司机在驾驶过程中短暂走神的交通现象. 更多关于耦合模型的相关结果见文献 [2-4].

2011 年, Herty 等^[1]研究了初值为

$$(v, \rho)(x, 0) = \begin{cases} (v_-, \rho_-), x < 0 \\ (v_+, \rho_+), x > 0 \end{cases} \quad (3)$$

的黎曼问题, 其中常数 $v_-, \rho_-, v_+, \rho_+ \geq 0$, 压力项满足

$$\begin{aligned} \forall \rho: \rho p''(\rho) + 2p'(\rho) > 0, \\ \rho = 0: p(\rho) \sim \rho^\gamma, \gamma > 0. \end{aligned}$$

他们证明了解的存在性, 但解不唯一也不稳定. 潘丽君等构造了具有 Chaplygin 压力的 CAR 模型 (1) 和 (2) 的黎曼解, 并证明了解的存在唯一性, 其中 Chaplygin 压力满足

$$p(\rho) = -\frac{1}{\rho} \quad (4)$$

潘丽君等认为 Chaplygin 压力具有负压, delta 激波会出现在上述黎曼问题的解中. 更多关于 Chaplygin 压力在交通流模型及其它模型中的应用见文献 [5-10].

当 $\mu = \eta$ 时, CAR 模型转变成经典的 Aw-Rascle (AR) 模型^[11]

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho uv)_x = 0 \\ u = v + \eta p(\rho) \end{cases} \quad (5)$$

当 $\mu = \eta = 0$ 时, 即两侧压力均消失, CAR 模型转变成无压气体动力 (PGD) 模型

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0 \\ (\rho v)_t + (\rho v^2)_x = 0 \end{cases} \quad (6)$$

2010 年, Shen 等^[12]讨论了压力项为 $p(\rho) = \rho^\gamma$ 的 AR 模型 (5)、(3) 的极限, 发现当 $\eta \rightarrow 0$, AR 模型的 delta 激波解不收敛到 PGD 模型 (6)、(3) 的 delta 激波解, 不同之处在于 delta 激波解的权重和速度. 2013 年, Pan 等^[13]研究了 AR 模型 (5)、(4)、(3) 的极限, 证明了当 $\eta \rightarrow 0$ 时, AR 模型的 delta 激波解收敛到 PGD 模型 (6)、(3) 的 delta 激波解. 很自然地, 我们想知道: 当 $\mu \rightarrow 0^+$ 且 $\eta \rightarrow 0^+$ 时, CAR 模型 (1)、(4) 和 (2)、(4) 的黎曼解是否

相应地都收敛于具有相同初值的 PGD 模型 (6) 的黎曼解? 特别是出现 delta 激波解时, 其极限后的权重和速度是否能与 PGD 模型的 delta 激波解的权重和速度保持一致?

本文研究带有 Chaplygin 压力的耦合 Aw-Rascle 模型两侧压力同时消失时黎曼解的极限. 由于耦合模型相变两侧的压力系数不同, 导致相变两侧模型存在差异, 用经典的方法研究耦合模型比较困难. 因此耦合模型的结果很少, 关于耦合模型压力消失时渐近性的理论结果更是几乎没有, 具有 Chaplygin 压力的非耦合模型压力消失时的理论结果见文献 [14-15]. 我们讨论当 $\mu \rightarrow 0^+$ 且 $\eta \rightarrow 0^+$ 时, CAR 模型 (1) 和 (2) 的极限, 发现 CAR 模型 (1)、(3)、(4) 和 (2)、(3)、(4) 的黎曼解相应地都收敛于 PGD 模型 (6)、(3) 的黎曼解. 与文献 [7] 的结果不同的是, 极限后的 delta 激波解的权重和速度与 PGD 模型的 delta 激波解的权重和速度完全一致.

1 黎曼解

1.1 CAR 模型 (1) 和 (2) 的黎曼解

AR 模型 (5) 的特征值和对应的右特征向量为

$$\lambda_1(\eta, v, \rho) = v - \frac{\eta}{\rho}, \quad \lambda_2(\eta, v, \rho) = v \tag{7}$$

$$r_1 = (-\eta\rho^{-2}, 1)^T, \quad r_2 = (0, 1)^T \tag{8}$$

因为

$$\nabla \lambda_1 \cdot r_1 = \nabla \lambda_2 \cdot r_2 = 0,$$

所以系统严格双曲且完全线性退化. 可以得到 (5) 的自相似解 $(v, \rho)(x, t) = (v, \rho)(\xi)(\xi = x/t)$, 计算可得常状态解或者稀疏接触间断 R 为

$$R(v_-, \rho_-) : \begin{cases} \xi = \lambda_1 = v - \eta/\rho \\ v - \eta/\rho = v_- - (\eta/\rho_-) \\ \rho < \rho_-, v > v_- \end{cases} \tag{9}$$

对于间断解 $\xi = \sigma$, Rankine-Hugoniot 条件

$$\begin{cases} -\sigma[\rho] + [\rho v] = 0 \\ -\sigma[\rho v - \eta] + [\rho v^2 - \eta v] = 0 \end{cases} \tag{10}$$

其中: $[\rho] = \rho_+ - \rho_-$, $[\rho v] = \rho_+ v_+ - \rho_- v_-$, 其它记号类似. 求解方程 (10) 可以得到接触间断 J 和压缩接触间断 S 分别为

$$J(v_-, \rho_-) : \tau = v = v_- \tag{11}$$

$$S(v_-, \rho_-) : \begin{cases} \sigma = v - \eta/\rho \\ v - \eta/\rho = v_- - (\eta/\rho_-) \\ \rho > \rho_-, v < v_- \end{cases} \tag{12}$$

根据右状态 (v_+, ρ_+) 的值, 潘丽君等得到 CAR 模型 (1)、(3)、(4) 的黎曼解为

- (i) $(v_+, \rho_+) \in I = \{(v, \rho) \mid v < v_- - (\eta/\rho_-)\} : PTS_\delta$;
- (ii) $(v_+, \rho_+) \in II = \{(v, \rho) \mid v_- - (\eta/\rho_-) < v < v_-\} : S + PTJ$;
- (iii) $(v_+, \rho_+) \in III = \{(v, \rho) \mid v > v_-\} : R + PTJ$.

其中: “+” 意味着 “随后”, PTS_δ 和 PTJ 分别表示相变与 delta 激波重合和相变与接触间断 J 重合. 相变是指属于不同相的不连续分离状态, 即具有质的差异^[16], 记作 PT . CAR 模型 (2)、(3)、(4) 的黎曼解为

- (i) $(v_+, \rho_+) \in I = \{(v, \rho) \mid v < v_- - (\mu/\rho_-)\} : PTS_\delta$;
- (ii) $(v_+, \rho_+) \in II = \{(v, \rho) \mid v_- - (\mu/\rho_-) < v < v_-\} : S + PTJ$;
- (iii) $(v_+, \rho_+) \in III = \{(v, \rho) \mid v > v_-\} : R + PTJ$.

1.2 PGD 模型 (6) 的黎曼解

PGD 模型 (6) 的特征值和对应的右特征向量为

$$\tilde{\lambda}_1(v, \rho) = \tilde{\lambda}_2(v, \rho) = v, \quad \tilde{r} = (0, 1)^T \tag{13}$$

因为

$$\nabla \tilde{\lambda}_1 \cdot \tilde{r} = \nabla \tilde{\lambda}_2 \cdot \tilde{r} = 0,$$

所以系统线性退化. 类似上一小节的讨论, 我们可以得到 PGD 模型 (6)、(3) 的黎曼解为

- (i) $(v_+, \rho_+) \in I = \{(v, \rho) \mid v < v_-\} : S_\delta;$
- (ii) $(v_+, \rho_+) \in II = \{(v, \rho) \mid v > v_-\} : J_1 + J_2;$
- (iii) $(v_+, \rho_+) \in III = \{(v, \rho) \mid v = v_-\} : J.$

2 两侧压力消失时黎曼解的极限

本节我们分别讨论 CAR 模型 (1) 和 (2) 两侧压力同时消失时黎曼解的极限, 并研究该极限与具有相同初值的 PGD 模型的黎曼解的关系. 根据 v_+ 与 v_- 的大小关系, 我们将分为以下三种情形讨论: (1) $v_+ > v_-$; (2) $v_+ < v_-$; (3) $v_+ = v_-$. 首先介绍潘丽君等给出的 CAR 模型的弱解定义.

定义 1 若对任意 $\phi \in C_0^{+\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, (v, ρ) 都满足

$$\begin{cases} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho \phi_t + \rho v \phi_x) dx dt + \int_{-\infty}^0 \rho_- \phi(x, 0) dx + \int_0^{+\infty} \rho_+ \phi(x, 0) dx = 0 \\ \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho u \phi_t + \rho u v \phi_x) dx dt + \int_{-\infty}^0 (\rho_- v_- - \eta) \phi(x, 0) dx + \int_0^{+\infty} (\rho_+ v_+ - \mu) \phi(x, 0) dx = 0 \end{cases} \tag{14}$$

则 (v, ρ) 是黎曼问题 (1)、(4)、(3) 的弱解.

命题 1 当 $v_+ > v_-$ 时, 令 $\mu \rightarrow 0^+$ 且 $\eta \rightarrow 0^+$, CAR 模型 (1)、(3)、(4) 和 (2)、(3)、(4) 的黎曼解都收敛到 PGD 模型 (6)、(3) 的黎曼解 (如图 1 所示)

$$(v_-, \rho_-) + J_1 + Vacuum + J_2 + (v_+, \rho_+) \tag{15}$$

其中: 接触间断 J_1 和 J_2 的速度 σ_1 、 σ_2 分别满足 $\sigma_1 = v_-$ 和 $\sigma_2 = v_+$.

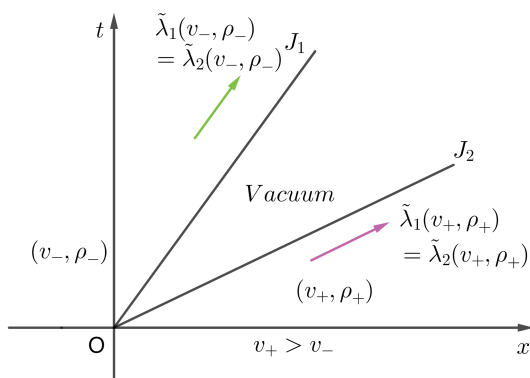


图 1 PGD 模型 (6) 的黎曼解

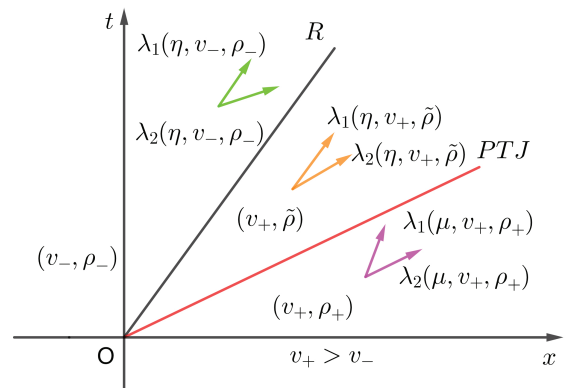


图 2 CAR 模型 (1) 的黎曼解

证明 当 $v_+ > v_-$ 时, CAR 模型 (1)、(3)、(4) 的黎曼解为 (如图 2 所示)

$$(v_-, \rho_-) + R + (v_+, \tilde{\rho}) + PTJ + (v_+, \rho_+) \tag{16}$$

其中: $\tilde{\rho}$, R 的速度 $\tilde{\xi}$ 和 PTJ 的速度 $\tilde{\sigma}$ 分别满足

$$\tilde{\rho} = \frac{\eta}{v_+ - (v_- - (\eta/\rho_-))} \tag{17}$$

和

$$\tilde{\xi} = v_- - \frac{\eta}{\rho_-}, \quad \tilde{\sigma} = v_+ \tag{18}$$

令 $\mu \rightarrow 0^+$ 且 $\eta \rightarrow 0^+$, 可以得到

$$\lim_{\substack{\mu \rightarrow 0^+ \\ \eta \rightarrow 0^+}} \tilde{\rho} = 0, \quad \lim_{\substack{\mu \rightarrow 0^+ \\ \eta \rightarrow 0^+}} \tilde{\xi} = v_- = \sigma_1, \quad \lim_{\substack{\mu \rightarrow 0^+ \\ \eta \rightarrow 0^+}} \tilde{\sigma} = v_+ = \sigma_2 \tag{19}$$

式 (19) 说明 CAR 模型 (1) 两侧压力同时消失时出现真空状态. 下面证明稀疏接触间断 R 转变成接触间断 J_1 . R 满足熵条件

$$\lambda_1(\eta, v_-, \rho_-) = \lambda_1(\mu, v_+, \tilde{\rho}) = \tilde{\xi} < \lambda_2(\eta, v_-, \rho_-) < \lambda_2(\mu, v_+, \tilde{\rho}) \tag{20}$$

令 $\mu \rightarrow 0^+$ 且 $\eta \rightarrow 0^+$, 熵条件 (20) 变为

$$\tilde{\lambda}_1(v_-, \rho_-) = \sigma_1 = \tilde{\lambda}_2(v_-, \rho_-) \tag{21}$$

而式 (21) 正是 J_1 满足的熵条件. 进一步, (1) 两侧压力同时消失时, 相变也消失. 因此, 当 $v_+ > v_-$ 时, CAR 模型 (1)、(3)、(4) 的黎曼解 (16) 收敛到 PGD 模型 (6)、(3) 的黎曼解 (15).

当 $v_+ > v_-$ 时, CAR 模型 (2)、(3)、(4) 的黎曼解为

$$(v_-, \rho_-) + R + (v_+, \tilde{\rho}) + PTJ + (v_+, \rho_+) \tag{22}$$

其中 $\tilde{\rho} = \mu / (v_+ - (v_- - (\mu / \rho_-)))$. 类似上面讨论, 可以证明式 (20) 也收敛到 PGD 模型 (6)、(3) 的黎曼解 (15).

注 1 由命题 1 的证明过程, 可以观察到稀疏接触间断到接触间断的转化.

引理 1 当 $v_+ < v_-$ 时, 则存在 η_0 使得当 $0 < \eta < \eta_0$ 时有 $v_+ < v_- - (\eta / \rho_-)$ 成立.

证明 由于 $v_+ < v_-$, 取 $\eta_0 = \rho_-(v_- - v_+)$, 当 $0 < \eta < \eta_0$ 时, 则 $v_+ < v_- - (\eta / \rho_-)$.

命题 2 当 $v_+ < v_-$ 时, 令 $\mu \rightarrow 0^+$ 且 $\eta \rightarrow 0^+$, CAR 模型 (1)、(3)、(4) 和 (2)、(3)、(4) 的黎曼解都收敛到 PGD 模型 (6)、(3) 的黎曼解 (如图 3 所示)

$$(v_-, \rho_-) + S_\delta + (v_+, \rho_+) \tag{23}$$

S_δ 的位置 $x(t)$ 、速度 $v_\delta(t)$ 和权重 $\omega(t)$ 满足

当 $[\rho] \neq 0$ 时,

$$\begin{cases} x(t) = [(\sqrt{\rho_-}v_- + \sqrt{\rho_+}v_+) / (\sqrt{\rho_-} + \sqrt{\rho_+})]t \\ v_\delta(t) = (\sqrt{\rho_-}v_- + \sqrt{\rho_+}v_+) / (\sqrt{\rho_-} + \sqrt{\rho_+}) \\ \omega(t) = \sqrt{\rho_+\rho_-}(v_- - v_+)t \end{cases} \tag{24}$$

当 $[\rho] = 0$ 时,

$$(x(t), v_\delta(t), \omega(t)) = \left(\frac{v_+ + v_-}{2}t, \frac{v_+ + v_-}{2}, \rho_-(v_- - v_+)t\right) \tag{25}$$

证明 由于 $v_+ < v_-$, 根据引理 1 可知当 $0 < \eta < \rho_-(v_- - v_+)$, 则 $v_+ < v_- - (\eta / \rho_-)$. 由于 $v_+ < v_- - (\eta / \rho_-)$, CAR 模型 (1)、(3)、(4) 的黎曼解为 (如图 4 所示)

$$(v_-, \rho_-) + PTS_\delta + (v_+, \rho_+) \tag{26}$$

PTS_δ 的位置 $\tilde{x}(t)$ 、速度 $\tilde{v}_\delta(t)$ 和权重 $\tilde{\omega}(t)$ 满足

当 $[\rho] \neq 0$ 时,

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = \left\{ \frac{2[\rho v] + \eta - \mu + \sqrt{4\rho_+\rho_-[v]^2 + 4(\eta\rho_+ - \mu\rho_-)[v] + (\eta - \mu)^2}}{2[\rho]} \right\} t \\ \tilde{v}_\delta(t) = \left\{ \frac{2[\rho v] + \eta - \mu + \sqrt{4\rho_+\rho_-[v]^2 + 4(\eta\rho_+ - \mu\rho_-)[v] + (\eta - \mu)^2}}{2[\rho]} \right\} \\ \tilde{\omega}(t) = \left\{ \frac{\eta - \mu + \sqrt{4\rho_+\rho_-[v]^2 + 4(\eta\rho_+ - \mu\rho_-)[v] + (\eta - \mu)^2}}{2} \right\} t \end{cases} \tag{27}$$

当 $[\rho] = 0$ 时,

$$(\tilde{x}(t), \tilde{v}_\delta(t), \tilde{\omega}(t)) = \left(\frac{[\rho v^2] - \mu v_+ + \eta v_-}{2[\rho v] + \eta - \mu}t, \frac{[\rho v^2] - \mu v_+ + \eta v_-}{2[\rho v] + \eta - \mu}, -[\rho v]t\right) \tag{28}$$

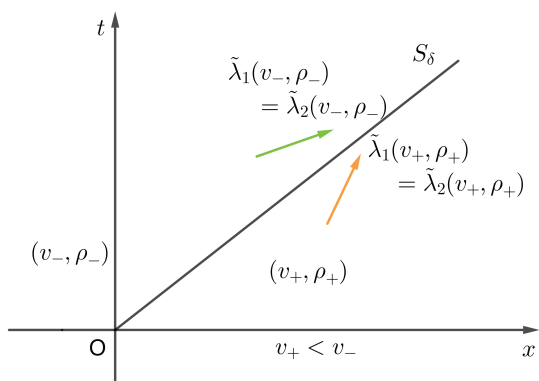


图 3 PGD 模型 (6) 的黎曼解

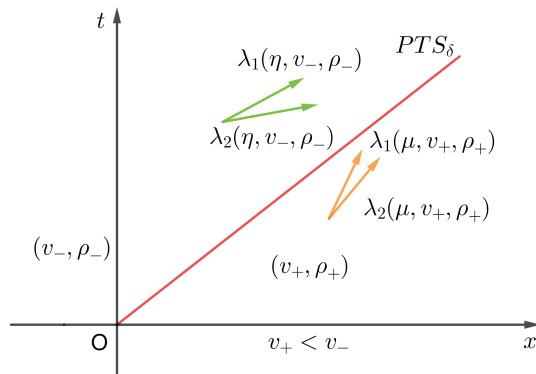


图 4 CAR 模型 (1) 的黎曼解

不失一般性, 我们只讨论 $[\rho] \neq 0$ 情形, $[\rho] = 0$ 情形类似可证. 令 $\mu \rightarrow 0^+$ 且 $\eta \rightarrow 0^+$, 不难计算得到:

$$\lim_{\substack{\mu \rightarrow 0^+ \\ \eta \rightarrow 0^+}} (\tilde{x}(t), \tilde{v}_\delta(t), \tilde{\omega}(t)) = (x(t), v_\delta(t), \omega(t)).$$

将黎曼解 (26) 和 (27) 代入式 (14) 的第一个方程, 可以得到

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\mu \rightarrow 0^+ \\ \eta \rightarrow 0^+}} \left(\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho\phi_t + \rho v\phi_x) dx dt + \int_{-\infty}^0 \rho_- \phi(x, 0) dx + \int_0^{+\infty} \rho_+ \phi(x, 0) dx \right) \\ &= \lim_{\substack{\mu \rightarrow 0^+ \\ \eta \rightarrow 0^+}} \left(\left(\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{\tilde{x}(t)} + \int_0^{+\infty} \int_{\tilde{x}(t)}^{+\infty} \right) ((\rho\phi)_t + (\rho v\phi)_x) dx dt - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\rho_t + (\rho v)_x) dx dt \right. \\ &+ \int_0^{+\infty} (\tilde{\omega}(\tilde{x}(t), t)\phi_t(\tilde{x}(t), t) + \tilde{\omega}(\tilde{x}(t), t)\tilde{v}_\delta\phi_x(\tilde{x}(t), t)) dt + \int_{-\infty}^0 \rho_- \phi(x, 0) dx + \int_0^{+\infty} \rho_+ \phi(x, 0) dx \\ &= \lim_{\substack{\mu \rightarrow 0^+ \\ \eta \rightarrow 0^+}} \left(- \int_{-\infty}^0 \rho_- \phi(x, 0) dx + \int_0^{+\infty} \phi(\tilde{x}(t), t)(\rho_- v_- - \rho_- \tilde{v}_\delta(t)) dt - \int_0^{+\infty} \rho_+ \phi(x, 0) dx \right. \\ &- \int_0^{+\infty} \phi(\tilde{x}(t), t)(\rho_+ v_+ - \rho_+ \tilde{v}_\delta(t)) dt + \int_0^{+\infty} \tilde{\omega}(\tilde{x}(t), t) \frac{d\phi(\tilde{x}(t), t)}{dt} dt + \int_{-\infty}^0 \rho_- \phi(x, 0) dx + \int_0^{+\infty} \rho_+ \phi(x, 0) dx \\ &= \lim_{\substack{\mu \rightarrow 0^+ \\ \eta \rightarrow 0^+}} \left(\int_0^{+\infty} \phi(\tilde{x}(t), t)([\rho]\tilde{v}_\delta(t) - [\rho v]) dt + \tilde{\omega}(\tilde{x}(t), t)\phi(\tilde{x}(t), t) \Big|_{t=0}^{t=+\infty} - \int_0^{+\infty} \phi(\tilde{x}(t), t) d\tilde{\omega}(\tilde{x}(t), t) \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \phi(x(t), t)([\rho]v_\delta(t) - [\rho v]) dt - \int_0^{+\infty} \phi(x(t), t) d\omega(x(t), t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

由最后一个等式得到

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = [\rho]v_\delta(t) - [\rho v] \tag{29}$$

类似的, 代入式 (14) 的第二个方程, 有

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\mu \rightarrow 0^+ \\ \eta \rightarrow 0^+}} \left(\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho u\phi_t + \rho v u\phi_x) dx dt + \int_{-\infty}^0 (\rho_- v_- - \eta)\phi(x, 0) dx + \int_0^{+\infty} (\rho_+ v_+ - \mu)\phi(x, 0) dx \right) \\ &= \lim_{\substack{\mu \rightarrow 0^+ \\ \eta \rightarrow 0^+}} \left(\left(\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{\tilde{x}(t)} + \int_0^{+\infty} \int_{\tilde{x}(t)}^{+\infty} \right) ((\rho u\phi)_t + (\rho v u\phi)_x) dx dt - \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi((\rho u)_t + (\rho v u)_x) dx dt \right. \\ &+ \int_0^{+\infty} (\tilde{\omega}(\tilde{x}(t), t)\tilde{v}_\delta(t)\phi_t(\tilde{x}(t), t) + \tilde{\omega}(\tilde{x}(t), t)(\tilde{v}_\delta(t))^2\phi_x(\tilde{x}(t), t)) dt + \int_{-\infty}^0 (\rho_- v_- - \eta)\phi(x, 0) dx \\ &+ \int_0^{+\infty} (\rho_+ v_+ - \mu)\phi(x, 0) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\substack{\mu \rightarrow 0^+ \\ \eta \rightarrow 0^+}} \left(- \int_{-\infty}^0 (\rho_- v_- - \eta) \phi(x, 0) dx + \int_0^{+\infty} \phi(\tilde{x}(t), t) (\rho_-(v_-)^2 - \eta v_- - (\rho_- v_- - \eta) \tilde{v}_\delta(t)) dt \right. \\
 &\quad - \int_0^{+\infty} (\rho_+ v_+ - \mu) \phi(x, 0) dx - \int_0^{+\infty} \phi(\tilde{x}(t), t) (\rho_+(v_+)^2 - \mu v_+ - (\rho_+ v_+ - \mu) \tilde{v}_\delta(t)) dt \\
 &\quad \left. + \int_0^{+\infty} \tilde{\omega}(\tilde{x}(t), t) \tilde{v}_\delta(t) \frac{d\phi(\tilde{x}(t), t)}{dt} dt + \int_{-\infty}^0 (\rho_- v_- - \eta) \phi(x, 0) dx + \int_0^{+\infty} (\rho_+ v_+ - \mu) \phi(x, 0) dx \right) \\
 &= \lim_{\substack{\mu \rightarrow 0^+ \\ \eta \rightarrow 0^+}} \left(\int_0^{+\infty} \phi(\tilde{x}(t), t) (\rho_-(v_-)^2 - \eta v_- - (\rho_- v_- - \eta) \tilde{v}_\delta(t) - \rho_+(v_+)^2 + \mu v_+ + (\rho_+ v_+ - \mu) \tilde{v}_\delta(t)) dt \right. \\
 &\quad \left. + \tilde{\omega}(\tilde{x}(t), t) \tilde{v}_\delta(t) \phi(\tilde{x}(t), t) \Big|_{t=0}^{t=+\infty} - \int_0^{+\infty} \phi(\tilde{x}(t), t) d\tilde{\omega}(\tilde{x}(t), t) \tilde{v}_\delta(t) \right) \\
 &= \int_0^{+\infty} \phi(x(t), t) ([\rho v] v_\delta(t) - [\rho v^2]) dt - \int_0^{+\infty} \phi(x(t), t) d\omega(x(t), t) v_\delta(t) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

由最后一个等式得到

$$\frac{d\omega(t)v_\delta(t)}{dt} = [\rho v]v_\delta(t) - [\rho v^2] \tag{30}$$

方程 (29) 和 (30) 表示黎曼解 (23) 的广义 Rankine-Hugoniot 条件^[17-18]成立, 即当 $\mu \rightarrow 0^+$ 且 $\eta \rightarrow 0^+$ 时, 式 (26) 的极限是式 (23). 下面证明极限后的熵条件成立, PTS_δ 的熵条件为

$$\lambda_1(\mu, v_+, \rho_+) < \lambda_2(\mu, v_+, \rho_+) < \tilde{v}_\delta < \lambda_1(\eta, v_-, \rho_-) < \lambda_2(\eta, v_-, \rho_-) \tag{31}$$

令 $\mu \rightarrow 0^+$ 且 $\eta \rightarrow 0^+$, 熵条件 (31) 变为

$$\tilde{\lambda}_1(v_+, \rho_+) = \tilde{\lambda}_2(v_+, \rho_+) < v_\delta < \tilde{\lambda}_1(v_-, \rho_-) = \tilde{\lambda}_2(v_-, \rho_-) \tag{32}$$

而式 (32) 正是 S_δ 满足的熵条件. 因此, 当 $v_+ < v_-$ 时, CAR 模型 (1)、(3)、(4) 的黎曼解 (26) 收敛到 PGD 模型 (6)、(3) 的黎曼解 (23).

当 $v_+ < v_-$ 时, CAR 模型 (2)、(3)、(4) 的黎曼解为

$$(v_-, \rho_-) + PTS_\delta + (v_+, \rho_+) \tag{33}$$

类似上面讨论, 可以证明黎曼解 (33) 也收敛到 PGD 模型 (6)、(3) 的黎曼解 (23).

命题 3 当 $v_+ = v_-$ 时, 令 $\mu \rightarrow 0^+$ 且 $\eta \rightarrow 0^+$, CAR 模型 (1)、(3)、(4) 和 (2)、(3)、(4) 的黎曼解都收敛到 PGD 模型 (6)、(3) 的黎曼解 (如图 5 所示)

$$(v_-, \rho_-) + J + (v_+, \rho_+) \tag{34}$$

其中 J 的速度为 $\sigma = v_+$.

证明 当 $v_+ = v_-$ 时, CAR 模型 (1)、(3)、(4) 黎曼解为 (如图 6 所示)

$$(v_-, \rho_-) + PTJ + (v_+, \rho_+) \tag{35}$$

其中 PTJ 的速度为 $\tilde{\sigma} = v_+$. 很显然, 当 $v_+ = v_-$ 时, CAR 模型 (1)、(3)、(4) 的黎曼解 (35) 收敛到 PGD 模型 (6)、(3) 的黎曼解 (34); 当 $v_+ = v_-$ 时, CAR 模型 (2)、(3)、(4) 的黎曼解

$$(v_-, \rho_-) + PTJ + (v_+, \rho_+) \tag{36}$$

也收敛到 PGD 模型 (6)、(3) 的黎曼解 (34).

结合命题 1~3, 得到本文主要结果定理 1.

定理 1 当两侧压力消失时, 即 $\mu \rightarrow 0^+$ 且 $\eta \rightarrow 0^+$ 时, 带有 Chaplygin 压力 (4) 的 CAR 模型 (1) 和 (2) 的黎曼解都收敛到具有相同初值的 PGD 模型 (6) 的黎曼解.

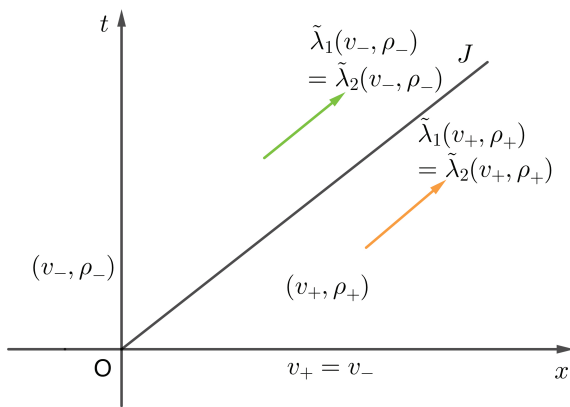


图 5 PGD 模型 (6) 的黎曼解

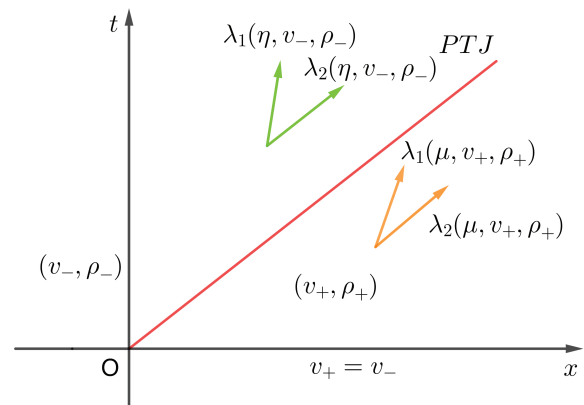


图 6 CAR 模型 (1) 的黎曼解

参考文献:

- [1] HERTY M, SCHLPER V. Traffic flow with unobservant drivers[J]. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 2011, 91(10): 763-776.
- [2] MOUTARI S, HERTY M, KLEIN A, et al. Modeling road traffic accidents using macroscopic second-order models of traffic flow[J]. IMA Journal of Applied Mathematics, 2013, 78(5): 1087-1108.
- [3] HU Y B, WANG G D. The resonance behavior for the coupling of two Aw-Rascle traffic models[J]. Advances in Difference Equations, 2020, 2020(1): 1-23.
- [4] KOLB O, COSTESEQUE G, GOATIN P, et al. Pareto-optimal coupling conditions for the Aw-Rascle-Zhang traffic flow model at junctions[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2018, 78(4): 1981-2002.
- [5] FAN S, ZHANG Y. Wave interactions and stability of Riemann solutions to the Aw-Rascle model with friction for modified Chaplygin gas[J]. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, 2022, 53(3): 765-785.
- [6] CHENG H J. Two-dimensional Aw-Rascle model with Chaplygin pressures: Riemann solutions consisting of contact discontinuities[J]. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 2022, 52(4): 1267-1288.
- [7] LIU Y J, SUN W H. Wave Interactions and stability of Riemann solutions of the Aw-Rascle model for generalized Chaplygin gas[J]. Acta Applicandae Mathematicae, 2018, 154(1): 95-109.
- [8] GUO L H. The Riemann problem of the transport equations for the generalized Chaplygin gas[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition), 2013, 30(2): 170-176.
- [9] 辛晓庆, 郭俐辉. 广义 Chaplygin 气体 Aw-Rascle 交通流方程组解奇异性的形成[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2023, 40(4): 422-432.
- [10] 范永强. Chaplygin、广义 Chaplygin 及修正 Chaplygin 气体欧拉方程组黎曼解的研究[D]. 乌鲁木齐: 新疆大学, 2019.
- [11] AW A, RASCLE M. Resurrection of "second order" models of traffic flow[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2000, 60(3): 916-938.
- [12] SHEN C, SUN M N. Formation of delta shocks and vacuum states in the vanishing pressure limit of solutions to the Aw-Rascle model[J]. Journal of Differential Equations, 2010, 249(12): 3024-3051.
- [13] PAN L J, HAN X L. The Aw-Rascle traffic flow model with Chaplygin pressure[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2013, 401(1): 379-387.
- [14] YANG H C, WANG J H. Delta-shocks and vacuum states in the vanishing pressure limit of solutions to the isentropic Euler equations for modified Chaplygin gas[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2014, 413(2): 800-820.
- [15] YANG H C, WANG J H. Concentration in vanishing pressure limit of solutions to the modified Chaplygin gas equations[J]. Journal of Mathematical Physics, 2016, 57(11): 111504.
- [16] COLOMBO R M. Hyperbolic phase transitions in traffic flow[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2002, 63(2): 708-721.
- [17] LI J Q, ZHANG T, YANG S L. The two-dimensional Riemann problem in gas dynamics[M]. Harlow: Longman, 1998.
- [18] YANG H C. Riemann problems for a class of coupled hyperbolic systems of conservation laws[J]. Journal of Differential Equations, 1999, 159(2): 447-484.